II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

МНОГОМЕРНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА В СЛУЧАЕ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЗАКОНА

А. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ

Аналогично теореме, доказанной в заметке автора [2], в многомерном случае имеет место следующая локальная теорема.

Пусть

$$\mathbf{X}_1, \ \mathbf{X}_2, \ \ldots \tag{1}$$

последовательность одинаково распределённых случайных s-мерных векторов, связанных в однородную цепь Маркова (цепь такая же, как и в одномерном случае, см. [2]).

Введём следующие обозначения: $\mathbf{k}=(k_1, \ \ldots, \ k_s)$,

$$\mathbf{x}=(x_1, \ \ldots, \ x_s), \quad \mathbf{t}=(t_1, \ \ldots, \ t_s) \ \ldots$$

s-мерные векторы, $|\mathbf{t}|$ — длина вектора $\mathbf{t}$, $d\mathbf{t}=dt_1 \ \ldots \ dt_s$, $(\mathbf{xt})=\sum_{j=1}^{s} x_j t_j = |\mathbf{t}|\,|\mathbf{x}|\cos(\widehat{\mathbf{tx}})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{t}$ и $\mathbf{x}$, $(\widehat{\mathbf{tx}})$ — угол между векторами $\mathbf{t}$ и $\mathbf{x}$.

Предположим, что случайные векторы $\mathbf{X}_l$, $(l=1, \ 2, \ \ldots)$ принимают своими значениями только целочисленные векторы $\mathbf{k}$ с вероятностями

$$P(\mathbf{k})=\mathbf{P}\{\mathbf{X}_l=\mathbf{k}\}.$$

Пусть

$$\mathbf{S}_n=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2+\ldots+\mathbf{X}_n,$$

$$P_n(\mathbf{k})=\mathbf{P}\{\mathbf{S}_n=\mathbf{k}\}, \quad F_n(\mathbf{x})=\mathbf{P}\{\mathbf{S}_n\leqslant\mathbf{x}\}, \quad F(\mathbf{x})=F_1(\mathbf{x}),$$

$V_\alpha(\mathbf{x})$-s — мерный устойчивый закон с показателем $\alpha(0<\alpha<2)$, а $v_\alpha(\mathbf{x})$ — плотность вероятности этого закона.

Теорема. *Пусть $F(\mathbf{x})$ принадлежит области притяжения s — мерного устойчивого закона $V_\alpha(\mathbf{x})$ и для последовательности* (1) *имеет место интегральная предельная теорема, т.е. для некоторой последовательности постоянных s-мерных векторов $\mathbf{A}_n$ и постоянных $B_n>0$*

$$F_n(B_n\mathbf{x}+\mathbf{A}_n)\to V_\alpha(\mathbf{x}), \qquad n\to\infty,$$

и пусть, кроме того, коэффициент эргодичности цепи $\alpha^*>0$.

Тогда для того, чтобы равномерно относительно $\mathbf{k}$ имело место соотношение

$$B_n P_n(\mathbf{k})-v_\alpha\left(\frac{\mathbf{k}-\mathbf{A}_n}{B_n}\right)\to 0, \qquad n\to\infty,$$

необходимо и дастаточно, чтобы распределение $F(\mathbf{x})$ было 1 — решетчатым.

Доказательство. Пусть

$$f_n(\mathbf{t}) = \mathbf{M}\, e^{i(\mathbf{S}_n,\, \mathbf{t})} = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_s=-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 k_1 + \dots + t_s k_s)} P_n(k_1 \dots k_s).$$

Тогда

$$(2\pi B_n)^s P_n(\mathbf{k}) = \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-i(\mathbf{z}_{n\mathbf{k}},\, \mathbf{t})} f_n^*\left(\frac{t_1}{B_n}, \dots, \frac{t_s}{B_n}\right) dt_1 \dots dt_s,$$

где

$$\mathbf{z}_{n\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k} - \mathbf{A}_n}{B_n}, \quad f_n^*\left(\frac{\mathbf{t}}{B_n}\right) = e^{i(\mathbf{t},\, A_n)} f_n\left(\frac{\mathbf{t}}{B_n}\right).$$

Нам следует оценить величину

$$R_n = (2\pi)^s \left[B_n^s P_n(\mathbf{k}) - \nu_\alpha(\mathbf{x})\right] = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{|t| \leqslant A} e^{-i(\mathbf{z}_{nk},\, \mathbf{t})} \left[f_n^*\left(\frac{\mathbf{t}}{B_n}\right) - g(\mathbf{t})\right] d\mathbf{t},$$

$$I_2 = \int_{A < |t| \leqslant \varepsilon B_n} e^{-i(\mathbf{z}_{n\mathbf{k}},\, t)} f_n^*\left(\frac{\mathbf{t}}{B_n}\right) d\mathbf{t}, \quad I_3 = \int\limits_{\substack{|t| > \varepsilon B_n \\ |t_i| \leqslant \pi B_n,\ i=1,\dots,s}} e^{-i(z_{nk},\, t)} f_n^*\left(\frac{\mathbf{t}}{B_n}\right) d\mathbf{t},$$

$$I_4 = \int_{|t| > A} e^{-i(\mathbf{z}_{n\mathbf{k}},\, t)} g(\mathbf{t})\, d\mathbf{t},$$

а $g(\mathbf{t})$ — характеристическая функция устойчивого закона $V_\alpha(\mathbf{x})$. Постоянные A и ε подбираются позднее.

Как и в одномерном случае (см. [2]) получаем

$$|f_n(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{64}\alpha^{*2}\left(1 - |f(\mathbf{t})|^2\right) + Ne^{-[\ln^2 n]}\right\},$$

где

$$N = \left[\frac{n}{\left[\frac{1}{\alpha^*}\ln^2 n\right] + 2}\right],$$

а $f(\mathbf{t}) = f(\mathbf{t}, \mathbf{X}_l)$ — характеристическая функция случайного вектора $\mathbf{X}_l$, ($l = 1, 2, \dots$).

Для оценки снизу функции $1 - |f(\mathbf{t})|^2$ мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма. *Если s-мерное распределение $P(M) = \int_M dF(\mathbf{x})$ принадлежит области притяжения невырождённого s-мерного устойчивого закона, то найдётся такое постоянное $c_0 > 0$, что в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{t} = 0$ выполняется неравенство*

$$1 - |f(\mathbf{t})|^2 > c_0 m_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}}\left\{|\mathbf{X}| \geqslant \frac{1}{|\mathbf{t}|}\right\},$$

где $m_{\mathbf{t}}$ — среднее значение случайной величины $\cos^2(\widehat{\mathbf{tX}})$, а $\tilde{P}(M)$ — распределение, соответствующее характеристической функции $|f(\mathbf{t})|^2$, и M — s-мерное борелевское множество.

Доказательство. Имеем

$$1-|f(\mathbf{t})|^2=\int\limits_{R_s}\Big(1-\cos(\mathbf{t},\mathbf{x})\Big)\tilde{P}(dM)=2\int\limits_{R_s}\sin^2\frac{(\mathbf{t},\mathbf{x})}{2}\tilde{P}(dM)>$$

$$>2\int\limits_{|(\mathbf{t},\mathbf{x})|\leqslant\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{(\mathbf{t},\mathbf{x})}{2}\tilde{P}(dM)\geqslant\frac{2}{\pi^2}\int\limits_{|(\mathbf{t},\mathbf{x})|\leqslant\frac{\pi}{2}}(\mathbf{t},\mathbf{x})^2\tilde{P}(dM)\geqslant\frac{2}{\pi^2}|\mathbf{t}|^2\int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant\frac{\pi}{2|\mathbf{t}|}}|\mathbf{x}|^2\cos^2(\widehat{\mathbf{tx}})\tilde{P}(dM),$$

где R_s — s-мерное евклидовое пространство. Отсюда

$$1-|f(\mathbf{t})|^2\geqslant\frac{1}{32}\int\limits_{\frac{\pi}{8|\mathbf{t}|}\leqslant|\mathbf{x}|\leqslant\frac{\pi}{2|\mathbf{t}|}}\cos^2(\widehat{\mathbf{tx}})\tilde{P}(dM)\geqslant\frac{1}{32}m_{\mathbf{t}}\Big[\tilde{P}\Big(|\mathbf{x}|\geqslant\frac{\pi}{8|\mathbf{t}|}\Big)-\tilde{P}\Big(|\mathbf{x}|>\frac{\pi}{2|\mathbf{t}|}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{1}{32}m_{\mathbf{t}}\tilde{P}\Big(|\mathbf{x}|\geqslant\frac{1}{|\mathbf{t}|}\Big)\left[\frac{\tilde{P}\Big(|\mathbf{x}|\geqslant\frac{\pi}{8|\mathbf{t}|}\Big)}{\tilde{P}\Big(|\mathbf{x}|\geqslant\frac{1}{|\mathbf{t}|}\Big)}-\frac{\tilde{P}\Big(|\mathbf{x}|\geqslant\frac{\pi}{2|\mathbf{t}|}\Big)}{\tilde{P}\Big(|\mathbf{x}|\geqslant\frac{1}{|\mathbf{t}|}\Big)}\right],$$

где $m_{\mathbf{t}}$ — среднее значение случайной величины $\cos^2(\widehat{\mathbf{tx}})$.

Пусть теперь $|\mathbf{t}|\leqslant\varepsilon$ и $\varepsilon>0$ столь мало, что

$$\frac{\tilde{P}\Big(|\mathbf{x}|\geqslant\frac{\pi}{8|\mathbf{t}|}\Big)}{\tilde{P}\Big(|\mathbf{x}|>\frac{1}{2|\mathbf{t}|}\Big)}=\Big(\frac{8}{\pi}\Big)^\alpha+\omega_1,$$

$$\frac{\tilde{P}\Big(|\mathbf{x}|>\frac{\pi}{2|\mathbf{t}|}\Big)}{\tilde{P}\Big(|\mathbf{x}|\geqslant\frac{1}{|\mathbf{t}|}\Big)}=\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^\alpha+\omega_2$$

и при всех $\mathbf{t}(|\mathbf{t}|\leqslant\varepsilon)$ (см. [1])

$$\max\Big(|\omega_1|,\ |\omega_2|\Big)<\frac{1}{4}\Big[\Big(\frac{8}{\pi}\Big)^\alpha-\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^\alpha\Big]=c_1.$$

Отсюда следует, что при $|\mathbf{t}|\leqslant\varepsilon$

$$1-|f(\mathbf{t})|^2>\frac{1}{32}m_{\mathbf{t}}c_1\tilde{P}\Big\{|\mathbf{x}|\geqslant\frac{1}{|\mathbf{t}|}\Big\}=c_0m_{\mathbf{t}}\tilde{P}\Big\{|\mathbf{X}|\geqslant\frac{1}{|\mathbf{t}|}\Big\},\tag{2}$$

где $c_0=\frac{1}{32}c_1$. Лемма доказана.

Но так как (см. [1])

$$n\tilde{P}\Big(|\mathbf{X}|\geqslant\frac{B_n}{|\mathbf{t}|}\Big)\sim|\mathbf{t}|^\alpha,$$

то при достаточно больших n

$$\Big|f_n\Big(\frac{\mathbf{t}}{B_n}\Big)\Big|\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{64}\frac{c_0}{4}m_{\mathbf{t}}\alpha^{*2}\frac{|\mathbf{t}|^\alpha}{\Big[\frac{1}{\alpha^*}\ln^2 n\Big]+2}+\frac{n}{\Big[\frac{1}{\alpha^*}\ln^2 n\Big]+2}e^{-[\ln^2 n]}\right\}$$

и

$$\Big|f_n\Big(\frac{\mathbf{t}}{B_n}\Big)\Big|\leqslant\exp\left\{-cm_{\mathbf{t}}\frac{|\mathbf{t}|^\alpha}{\Big[\frac{1}{\alpha^*}\ln^2 n\Big]}\right\},\tag{3}$$

когда $\ln^{\frac{4}{\alpha}}n\leqslant|\mathbf{t}|\leqslant\varepsilon B_n$. Здесь $c=\frac{1}{64}\frac{c_0}{8}\alpha^{*2}>0$.

Когда t изменяется в области

$$A \leqslant |t| \leqslant \ln^{\frac{4}{\alpha}} n,$$

при достаточно больших n и соответствующем подборе постоянного A справедлива оценка

$$\left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{|t|^{s+\delta}}, \qquad \delta > 0. \tag{4}$$

Тогда в силу неравенств (3) и (4) посредством выбора A, ε и n интеграл $|I_2|$ может быть сделан как угодно малым.

Остальные интегралы оцениваются совсем аналогично одномерному случаю.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
29. XII. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Л. Рвачёва. Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений. Учёные зап. Львовского Гос. ун-та, том XXIX, 1954, выпуск 1 (6), серия мех.-матем.
2. А. Алешкявичене. Локальная предельная теорема для сумм случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова в случае устойчивого предельного распределения, Лит. матем. сборник, 1–2, 1961 г.

DAUGIAMATĖ LOKALINĖ RIBINĖ TEOREMA HOMOGENINEI MARKOVO GRANDINEI STABILAUS RIBINIO DĖSNIO ATVEJU

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Reziumė)

Šiame darbe apibendrinami s-mačiam atvejui rezultatai, gauti autoriaus [2] darbe.

THE MULTI-DIMENSIONAL LOCAL LIMIT THEOREM FOR THE MARKOV CHAIN IN THE CASE OF THE STABLE LIMIT DISTRIBUTION LAW

A. ALESHKEVICHENE

(Summary)

In this note the results of the author's [2] work are generalized for the multi-dimensional case.