II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

К ТЕОРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ЕВКЛИДОВОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

В. БЛИЗНИКАС

Пространство линейных элементов с потенциальной и непотенциальной метрикой не раз являлось объектом изучения у целого ряда геометров (Э. Картан, Л. Бервальд, О. Варга, В. В. Вагнер, Г. Буземан, А. Моор, Й. И. Хорват и др.). Это объясняется важностью такого типа пространств, возникающих при геометризации основной вариационной задачи, некоторых понятий современной физики и единой теории поля и являющихся обобщением широко известных римановых пространств и пространств евклидовой связности. Существуют различные теории финслеровых пространств, т. е. пространств линейных элементов с потенциальной метрикой, среди которых наиболее распространенной является картановская теория [3], положившая основу систематическому использованию тензорных методов и метода внешних форм в этих пространствах.

Пространство линейных элементов с непотенциальной метрикой называется метрическим пространством линейных элементов. Й. И. Хорват [6], [7] и А. Моор [6] доказали, что пространство Юкава, т. е. модельное пространство билокальной теории поля отображается на пространство линейных элементов с непотенциальной метрикой. Пространства этого класса, но только под другими названиями (финслерово-римановые системы, многообразия финслеровой структуры и т. д.) рассматривались Й. И. Фриманом [4] и Хассан Акбар—Задеком [5]. Аналоги и обобщения тех или иных основных геометрических понятий возможны в различных направлениях, а это и вызвало построение различных теорий метрических пространств линейных элементов, в частности, в работах [1] и [2] была построена общая теория этих пространств методом продолжений и охватов полей дифференциально-геометрических объектов (методом Г. Ф. Лаптева и А. М. Васильева).

Геометрия подмногообразий, погруженных в метрические пространства линейных элементов, мало разработана (построена только теория кривых [1] и теория конгруэнций центроидальных геодезических кривых [2]). Существуют различные теории гиперповерхностей финслерова пространства. Гиперповерхностью финслерова пространства в смысле Й. М. Вегенера [8] называется $(n-1)$-мерное многообразие линейных элементов, линейные элементы которого трансверсальны к гиперцентроиде.

В заметке строится дифференциальная геометрия $(n-1)$-мерного многообразия линейных элементов, т. е. теория гиперповерхностей метрического пространства линейных элементов с евклидовой связностью. Эта теория обобщает вегенеровскую теорию гиперповерхностей в том смысле, что линейные элементы не трансверсальны к гиперцентроиде. Основные результаты этой заметки доложены автором на IV Всесоюзном математическом съезде.

1. Пространство линейных элементов с заданным полем невырожденного симметрического тензора второй валентности называется метрическим пространством линейных элементов $\mathscr{F}_n$. Если репер $\{A, e_i\}$ касательного пространства A_n, связанного с линейным элементом пространства $\mathscr{F}_n$, выбран так, что направление вектора e_1 совпадает с направлением линейного элемента, а точка A — с центром этого линейного элемента, то структурные уравнения пространства $\mathscr{F}_n$ имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} D\omega^i &= [\omega^k, \omega^i_k] + R^i_{pq}[\omega^p, \omega^q] + C^i_{p\alpha}[\omega^p, \omega^\alpha_1], \\ D\omega^i_j &= [\omega^k_j, \omega^i_k] + R^i_{jpq}[\omega^p, \omega^q] = S^i_{jp\alpha}[\omega^p, \omega^\alpha_1] + P^i_{j\alpha\beta}[\omega^\alpha_1, \omega^\beta_1], \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$R^i_{(pq)} = 0, \quad R^i_{j(pq)} = 0, \quad P^i_{j(\alpha\beta)} = 0,$$

$$i, j, k = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha, \beta, \gamma = 2, 3, \dots, n; \quad a, b, c = 1, 2, \dots, n-1,$$

причем аффинная связность, определенная формами ω^i и ω^i_j, является евклидовой, т. е.

$$dg_{ij} - g_{ik}\,\omega^k_i - g_{kj}\,\omega^k_i = 0, \tag{2}$$

и формы ω^i и ω^α_1 образуют базис кольца линейных дифференциальных форм пространства $\mathscr{F}_n$. Инфинитезимальное перемещение образа соседнего репера в исходном пространстве A_n можно определить уравнениями:

$$dA = \omega^i e_i, \qquad de_i = \omega^k_i e_k,$$

которые вполне интегрируемы только вдоль кривой пространства $\mathscr{F}_n$.

2. Назовем гиперповерхностью $\mathfrak{M}_{n-1}$ пространства $\mathscr{F}_n$ $(n-1)$-параметрическое многообразие линейных элементов. Дифференциальные уравнения гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ можно записать в виде:

$$\omega^i = \Lambda^i_a \Theta^a, \quad \omega^\alpha_1 = \lambda^\alpha_a \Theta^a, \tag{3}$$

где Θ^a — инвариантные формы группы аналитических преобразований параметров, имеющие следующую структуру:

$$\begin{aligned} D\Theta^a &= [\Theta^b, \Theta^a_b], \\ D\Theta^a_b &= [\Theta^c_b, \Theta^a_c] + [\Theta^a_{bc}, \Theta^c], \end{aligned} \tag{4}$$

причем $\Theta^a_{bc} = \Theta^a_{cb}$.

Продолжая систему (3), мы получим (предполагается, что $g_{1\alpha} = 0$):

$$d\Lambda^i_a + \Lambda^k_a\,\omega^i_k - \Lambda^i_b\,\Theta^b_a = \Lambda^i_{ab}\,\Theta^b, \tag{5}$$

$$d\lambda^\alpha_a + \lambda^\beta_\alpha\,\omega^\alpha_\beta - \lambda^\alpha_\beta\,\Theta^b_a - \lambda^\alpha_a\,\omega^1_1 = \lambda^\alpha_{ab}\,\Theta^b, \tag{6}$$

$$d\Lambda^i_{ab} + \Lambda^k_{ab}\,\omega^i_k - \Lambda^i_{cb}\,\Theta^c_a - \Lambda^i_{ac}\,\Theta^c_b + \Lambda^i_c\,\Theta^c_{ab} = \Lambda^i_{abc}\,\Theta^c, \tag{7}$$

$$d\lambda^\alpha_{ab} + \lambda^\beta_{ab}\,\omega^\alpha_\beta - \lambda^\alpha_{cb}\,\Theta^c_a - \lambda^\alpha_{ac}\,\Theta^c_b - 4\lambda^{(\alpha}_{(a}\lambda^{\beta)}_{b)}\,\omega^1_\beta - \lambda^\alpha_{ab}\,\omega^1_1 + \lambda^\alpha_c\,\Theta^c_{ab} = \lambda^\alpha_{abc}\,\Theta^c, \tag{8}$$

. . . . ,

где

$$\Lambda^i_{[ab]} = R^i_{jk}\,\Lambda^j_{[a}\Lambda^k_{b]} + C^i_{j\alpha}\,\Lambda^j_{[a}\lambda^\alpha_{b]}, \tag{9}$$

$$\lambda^\alpha_{[ab]} = R^\alpha_{1ij} \Lambda^i_{[a} \Lambda^j_{b]} + S^\alpha_{1i\beta} \Lambda^i_{[a} \Lambda^\beta_{b]} + P^\alpha_{1\beta\gamma} \lambda^\beta_{[a} \lambda^\gamma_{b]}, \tag{10}$$

$$\Lambda^i_{a[bc]} = R^i_{jkl} \Lambda^j_a \Lambda^k_{[b} \Lambda^l_{c]} + S^i_{jk\alpha} \Lambda^j_a \Lambda^k_{[b} \lambda^\alpha_{c]} + P^i_{j\alpha\beta} \Lambda^j_a \lambda^\alpha_{[b} \lambda^\beta_{c]}, \tag{11}$$

$$\lambda^\alpha_{a[bc]} = (R^\alpha_{\beta ij} - \delta^\alpha_\beta R^1_{1ij}) \lambda^\beta_a \Lambda^i_{[b} \Lambda^j_{c]} + (S^\alpha_{\beta i\gamma} - \delta^\alpha_\beta S^1_{1i\gamma}) \lambda^\beta_a \Lambda^i_{[b} \lambda^\gamma_{c]} +$$
$$+ (P^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon} - \delta^\alpha_\beta P^1_{1\gamma\varepsilon}) \lambda^\beta_a \lambda^\gamma_{[b} \lambda^\varepsilon_{c]}, \tag{12}$$

. . . .

Таким образом, первое дифференциальное продолжение системы (3) вводит систему величин Λ^i_{ab} и λ^α_{ab}, второе — Λ^i_{ab}, Λ^i_{abc}, λ^α_{ab}, λ^α_{abc} и т. д. Система величин g_{ij}, Λ^i_a и λ^α_a образует дифференциально-геометрический объект, который назовем фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом первого порядка гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Этот объект состоит из трёх функционально независимых тензоров g_{ij}, Λ^i_a и λ^α_a. Систему величин g_{ij}, Λ^i_a, Λ^i_{ab}, λ^α_a и λ^α_{ab} назовем фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом второго порядка гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, а систему — g_{ij}, Λ^i_a, Λ^i_{ab}, Λ^i_{abc}, λ^α_a, λ^α_{ab} и λ^α_{abc} — фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом третьего порядка и т. д.

3. Центры линейных элементов, принадлежащих многообразию $\mathfrak{M}_{n-1}$, образуют гиперповерхность $\mathfrak{N}_{n-1}$, которую назовем гиперцентроидой гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Векторы $\Lambda_a = \Lambda^i_a e_i$ образуют в пространстве $A_n(A)$ инвариантную гиперплоскость $A_{n-1}(A)$ — касательную гиперплоскость гиперцентроиды, ибо $d\Lambda_a \equiv \Theta^b_a \Lambda_b$ $(mod\,\Theta^a)$.

В том случае, когда опорный линейный элемент лежит в касательной гиперплоскости гиперцентроиды $\mathfrak{N}_{n-1}$, гиперповерхность $\mathfrak{M}_{n-1}$ назовем гиперцентроидальной, в противном случае — негиперцентроидальной. Для того, чтобы гиперповерхность $\mathfrak{M}_{n-1}$ была гиперцентроидальной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\|\lambda^\alpha_a\|$ был равен $n-2$. Если ранг матрицы $\|\lambda^\alpha_a\|$ равен $n-1$, то $\mathfrak{M}_{n-1}$ — негиперцентроидальная. Ограничимся рассмотрением только негиперцентроидальных гиперповерхностей.

На гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ пространственной метрикой g_{ij} индуцируется метрика, определяемая тензором

$$g_{ab} = g_{ij} \Lambda^i_a \Lambda^j_b. \tag{13}$$

Дифференцируя эти соотношения, в силу (2) и (5), получим

$$dg_{ab} - g_{ac} \Theta^c_b - g_{cb} \Theta^c_a = g_{ab,c} \Theta^c, \tag{14}$$

где

$$g_{ab,c} = 2g_{ij} \Lambda^i_{(a} \Lambda^j_{b)c}. \tag{15}$$

Следовательно, на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ пространства $\mathcal{F}_n$ пространственной метрикой g_{ij} индуцируется риманова метрика.

Гиперповерхность $\mathfrak{M}_{n-1}$ пространства $\mathcal{F}_n$ назовем оснащенной или нормализованной, если в каждой точке ее центроиды $\mathfrak{N}_{n-1}$ задан оснащающий вектор n, не принадлежащий касательной гиперплоскости к гиперцентроиде в этой точке. В качестве оснащающего вектора мы возьмем единичный вектор нормали гиперцентроиды. Координаты этого вектора имеют вид:

$$n^i = -\frac{g^{ik} \xi_k}{\sqrt{g^{pq} \xi_p \xi_q}}, \tag{16}$$

где

$$\xi_i = \sigma_{ii_1\ldots i_{n-1}} \Lambda^{i_1}_{[1} \ldots \Lambda^{i_{n-1}}_{n-1]},$$

$$g^{ik} = \frac{\partial \ln g}{\partial g_{ik}}, \qquad g = det \| g_{ij} \|$$

и

$$\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} 1, \text{ если } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} - \text{четная подстановка}, \\ -1, \text{ если } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} - \text{нечетная подстановка}, \\ 0, \text{ если хотя бы два индекса равны.} \end{cases}$$

Дифференцируя (10), получим

$$dn^i + n^k \omega^i_k = n^i_a \Theta^a, \tag{17}$$

где

$$n^i_a = \frac{n^{ipqr} \xi_p \xi_q \xi_{ra}}{(g^{jk} \xi_j \xi_k)^{3/2}}, \tag{18}$$

$$\xi_{qa} = \frac{\partial \xi_q}{\partial \Lambda^k_b} \tilde{\Lambda}^k_{ba}, \tag{19}$$

причем $\tilde{\Lambda}^k_{ba} = (-1)^{k+b+1} \Lambda^k_{ba}$, $n^{ipqr} = g^{pq} g^{ri} - g^{pr} g^{qi}$.

4. Так как на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ индуцируется риманова метрика, то касательные гиперплоскости гиперцентроиды $\mathfrak{N}_{n-1}$ являются клейновскими пространствами (евклидовыми). Геометрия гиперцентроиды $\mathfrak{N}_{n-1}$ определяется ее связностью, т. е. тем законом соответствия, который устанавливается между точками касательных гиперплоскостей, присоединенных к паре дифференциально близких точек. Это соответствие должно быть преобразованием фундаментальной группы касательной гиперплоскости гиперцентроиды. В силу того, что гиперцентроида оснащена нормалью, то связность на гиперцентроиде, т. е. соответствие между точками двух дифференциально близких касательных гиперплоскостей, можно установить при помощи проектирования вдоль нормали $\boldsymbol{n}$. Таким образом, установленную связность на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ мы будем называть индуцированной связностью.

Векторы Λ_a и $\boldsymbol{n}$ образуют базис пространства $A_n(A)$ и поэтому любой вектор этого пространства допускает представление в виде линейной комбинации векторов Λ_a и $\boldsymbol{n}$. В частности,

$$\Lambda^i_{ab} e_i = \Gamma^c_{ab} \Lambda_c + A_{ab} \boldsymbol{n} \tag{20}$$

и

$$n^i_a e_i = B^c_a \Lambda_c, \tag{21}$$

где

$$\Gamma^c_{ab} = g^{ce} g_{ij} \Lambda^i_{ab} \Lambda^j_e, \tag{22}$$

$$A_{ab} = g_{ik} \Lambda^i_{ab} n^k, \tag{23}$$

$$B^c_a = g^{ce} g_{ik} n^i_a \Lambda^k_e, \tag{24}$$

причем

$$g^{ab} = \frac{\partial \ln \tilde{g}}{\partial g_{ab}}, \quad \tilde{g} = det \| g_{ab} \|.$$

Дифференцируя соотношение (16), получим

$$d\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{eb} \Theta^e_a - \Gamma^c_{ae} \Theta^e_b + \Gamma^e_{ab} \Theta^c_e + \Theta^c_{ab} = \Gamma^c_{ab,e} \Theta^e, \tag{25}$$

где величины $\Gamma^c_{ab,e}$ выражаются через компоненты метрического тензора пространства $\mathscr{F}_n$ и компоненты объекта Λ^i_a, Λ_{ab}, Λ^i_{abc}, λ^α_a, λ^α_{ab} и λ^α_{abc}. Из структуры дифференциальных уравнений (25) следует, что Γ^c_{ab} — объект аффинной связности. Связность на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, определенная формами

$$\tilde{\Theta}^a = \Theta^a, \quad \tilde{\Theta}^b_a = \Theta^b_a + \Gamma^b_{ac}\Theta^c, \tag{26}$$

и является индуцированной связностью. Тензор g_{ab} ковариантно постоянен относительно индуцированной связности, т. е.

$$dg_{ab} - g_{cb}\tilde{\Theta}^c_a - g_{ac}\tilde{\Theta}^c_b = 0.$$

Оказывается, что величины $\Gamma^c_{(ab)}$ совпадают с обобщенными символами Кристоффеля второго рода гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, т. е. являются симметрическими решениями системы уравнений Г. Вейля:

$$g_{ab,c} - g_{ae}X^e_{bc} - g_{eb}X^e_{ac} = 0.$$

Формулы (20) и (21) будем называть обобщенными деривационными формулами Гаусса — Вейнгартена гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, а тензор A_{ab} — асимптотическим тензором или вторым фундаментальным тензором гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Симметрическая часть тензора A_{ab} определяет конус асимптотических направлений гиперцентроиды $\mathfrak{N}_{n-1}$:

$$A_{(ab)}\Theta^a\Theta^b = 0. \tag{27}$$

Дифференцируя внешним образом соотношения (20), в силу (4) и (25), получим

$$D\tilde{\Theta}^a = [\tilde{\Theta}^b, \tilde{\Theta}^a_b] + R^a_{bc}[\tilde{\Theta}^b, \tilde{\Theta}^c], \tag{28}$$

$$D\tilde{\Theta}^a_b = [\tilde{\Theta}^c_b, \tilde{\Theta}^a_c] + R^a_{bce}[\tilde{\Theta}^c, \tilde{\Theta}^e], \tag{29}$$

где

$$R^a_{bc} = -\Gamma^a_{[bc]}, \tag{30}$$

$$R^a_{bcd} = -\Gamma^a_{b[c,d]} - \Gamma^a_{f[c}\Gamma^f_{|b|d]}. \tag{31}$$

Величины R^a_{bc} образуют тензор — тензор кручения гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, а R^a_{bcd} — тензор кривизны или тензор Римана — Кристоффеля гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$.

Если проальтернируем левую и правую части равенства (20) по индексам a, b, а величины $\Lambda^i_{[ab]}$ заменим согласно (9) и сравним в полученных равенствах компоненты при e_i, то получим

$$R^i_{jk}\Lambda^j_{[a}\Lambda^k_{b]} + C^i_{j\alpha}\Lambda^j_{[a}\lambda^\alpha_{b]} = -R^c_{ab}\Lambda^i_c + A_{[ab]}n^i. \tag{32}$$

Этими уравнениями устанавливается связь между тензорами кручения R^i_{jk} и $C_{j\alpha}$ пространства $\mathscr{F}_n$ и тензором кручения R^c_{ab} индуцированной связности гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$.

Дифференцируя соотношение (20) и сравнивая коэффициенты при линейно независимых формах Θ^c и векторах e_i, получим

$$\Lambda^i_{abc} = (\Gamma^e_{ab,c} + \Gamma^f_{ab}\Gamma^e_{fc})\Lambda^i_e + (A_{ab,c} + \Gamma^e_{ab}A_{ec})n^i + A_{ab}B^e_c\Lambda^i_e. \tag{33}$$

Альтернируя эти соотношения, в силу (11), получаем

$$R^i_{jkl}\Lambda^j_a\Lambda^k_{[b}\Lambda^l_{c]} + S^i_{jk\alpha}\Lambda^j_a\Lambda^k_{[b}\lambda^\alpha_{c]} + P^i_{j\alpha\beta}\Lambda^j_a\lambda^\alpha_{[b}\lambda^\beta_{c]} =$$

$$= R^e_{abc}\Lambda^i_e + (\tilde{A}_{a[b,c]} + A_{af}R^f_{bc})n^i + A_{a[b}B^e_{c]}\Lambda^i_e, \tag{34}$$

где

$$\tilde{A}_{ab,c}=A_{ab,c}-A_{eb}\Gamma^e_{ac}-A_{ae}\Gamma^e_{bc},\quad dA_{ab}-A_{eb}\Theta^e_a-A_{ae}\Theta^e_b=A_{ab,c}\Theta^c.$$

Свертывая обе части равенства (34) с тензорами $g_{lq}\Lambda^q_d$ и $g_{iq}n^q$, получим следующие уравнения:

$$R_{ijkl}\Lambda^i_a\Lambda^j_b\Lambda^k_c\Lambda^l_d+S_{ijk\alpha}\Lambda^i_a\Lambda^j_b\Lambda^k_{[c}\lambda^\alpha_{d]}+P_{ij\alpha\beta}\Lambda^i_a\Lambda^j_b\lambda^\alpha_c\lambda^\beta_d=$$

$$=R_{abcd}+A_{a[b}A_{c]d}\tag{35}$$

и

$$R_{ijkl}n^i\Lambda^j_a\Lambda^k_b\Lambda^l_c+S_{ijk\alpha}n^i\Lambda^j_a\Lambda^k_{[b}\lambda^\alpha_{c]}+P_{ij\alpha\beta}n^i\Lambda^j_a\lambda^\alpha_a\lambda^\beta_b=$$

$$=\tilde{A}_{a[b,c]}+A_{af}R^f_{bc},\tag{36}$$

где

$$R_{ijkl}=g_{ip}R^p_{jkl},\quad R_{abcd}=g_{ae}R^e_{bcd}\quad \text{и т. д.}$$

Уравнения (35) назовем обобщенными уравнениями Гаусса, а (36) — обобщенными уравнениями Петерсона — Кодацци — Майнарди гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Если пространство $\mathcal{F}_n$ является римановым и репер $\{A, e_i\}$ голономный, то (35) — уравнения Гаусса, а (36) — уравнения Петерсона — Кодацци — Майнарди.

5. С каждой точкой гиперцентроиды $\mathfrak{N}_{n-1}$ связан вектор

$$e=\frac{e_1}{F}\qquad (F=\sqrt{g_{11}}).\tag{37}$$

Если отобразим все соседние локальные пространства $A_n(A+dA)$ на исходное $A_n(A)$, то концы векторов e опишут в пространстве $A_n(A)$ некоторую гиперповерхность, которую будем называть локальной относительной индикатрисой рассматриваемой гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Опорный линейный элемент гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ индуцирует радиальное оснащение на локальной относительной индикатрисе точки A, дифференциальные уравнения которой имеют вид:

$$\omega^\alpha_1\equiv\lambda^\alpha_a\Theta^a,\quad \omega^i\equiv 0\,(mod\,\Lambda^i_a).\tag{38}$$

Продолжая эту систему дифференциальных уравнений, мы получим последовательность фундаментальных дифференциально-геометрических объектов локальной относительной индикатрисы:

$$\begin{array}{llll} g_{ij}, & \lambda^\alpha_a, & & \\ g_{ij}, & \lambda^\alpha_a, & \lambda^\alpha_{ab}, & \\ g_{ij}, & \lambda^\alpha_a, & \tilde{\lambda}^\alpha_{ab}, & \tilde{\lambda}^\alpha_{abc}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \end{array}\tag{39}$$

где

$$\left.\begin{array}{l}\lambda^\alpha_{ab}\equiv\lambda^\alpha_{ab},\\ \tilde{\lambda}^\alpha_{abc}\equiv\lambda^\alpha_{abc},\\ \dots\dots\dots\end{array}\right. \quad (mod\,\Lambda^i_a)\tag{40}$$

Эти объекты назовем усеченными объектами рассматриваемой гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$.

Так как $F^2\omega^1_\alpha+g_{\alpha\beta}\omega^\beta_1=0$, то, дифференцируя (37), получаем

$$de\equiv\Theta^a\lambda_a\qquad (mod\,\Lambda^i_a),\tag{41}$$

$$d\lambda_a\equiv\Theta^b_a\lambda_b+\lambda_{ab}\Theta^b\qquad (mod\,\Lambda^i_a),\tag{42}$$

где

$$\lambda_a = \bar{\lambda}_a^\alpha e_\alpha, \tag{43}$$

$$\lambda_{ab} = \lambda_{ab}^\alpha e_\alpha - g_{ab} e, \tag{44}$$

$$g_{ab} = g_{\alpha\beta} \bar{\lambda}_a^\alpha \lambda_b^\beta, \tag{45}$$

причем

$$\bar{\lambda}_a^\alpha = \frac{\lambda_a^\alpha}{F}, \quad \bar{\lambda}_{ab}^\alpha = \frac{\bar{\lambda}_{ab}^\alpha}{F}.$$

Векторы λ_a и e образуют базис пространства $A_n(A)$ и

$$\bar{\lambda}_{ab}^\alpha e_\alpha = \gamma_{ab}^c \lambda_c, \tag{46}$$

где

$$\gamma_{ab}^c = \bar{g}^{ce} g_{\alpha\beta} \bar{\lambda}_{ab}^\alpha \lambda_e^\beta, \tag{47}$$

и

$$\bar{g}^{ab} = \frac{\partial \ln g}{\partial \bar{g}_{ab}}, \quad g = det \| \bar{g}_{ab} \|. \tag{48}$$

Из соотношений (47) непосредственно получается, что

$$d\gamma_{ab}^c - \gamma_{eb}^c \Theta_a^e - \gamma_{ae}^c \Theta_b^e + \gamma_{ab}^e \Theta_e^c \equiv \gamma_{ab,\,e}^c \Theta^e (mod\, \Lambda_a^i),$$

т. е. что величины γ_{ab}^c образуют объект аффинной связности. Аффинную связность, определенную пфаффовыми формами

$$\bar{\Theta}^a = \Theta^a, \quad \bar{\Theta}_a^b = \Theta_a^b + \gamma_{ac}^b \Theta^c, \tag{49}$$

назовем локальной индикатрисной связностью. Эта связность установлена на локальной относительной индикатрисе точки A путем проектирования пространственной связности (ω^i, ω_j^i) на касательную гиперплоскость этой индикатрисы вдоль опорного линейного элемента. Тензор g_{ab} ковариантно постоянен относительно локальной индикатрисной связности, и величины $\gamma_{(ab)}^c$ являются обобщенными символами Кристоффеля, построенными из компонент тензора g_{ab}.

Тензор кручения

$$\rho_{bc}^a = -\gamma_{[bc]}^a, \tag{50}$$

кривизны

$$\rho_{bcd}^a = -\gamma_{b[c,d]}^a - \gamma_{f[c}^a \gamma_{|b|d]}^f \tag{51}$$

локальной индикатрисной связности (49) назовем относительным тензором кручения и относительным тензором кривизны гиперповерхности. Компоненты тензоров ρ_{bc}^a и $P_{j\beta\gamma}^i$ связаны соотношениями:

$$P_{1\beta\gamma}^\alpha \bar{\lambda}_{[a}^\beta \bar{\lambda}_{b]}^\gamma + \rho_{ab}^c \lambda_c^\alpha = 0. \tag{52}$$

Дифференцируя соотношения (44), в силу (46), и сравнивая коэффициенты при линейно независимых формах Θ^c и векторах e_i, получим соотношения между тензорами $P_{j\beta\gamma}^i$, ρ_{bc}^a и ρ_{bce}^a, которые аналогичны соотношениям (34).

Итак, геометрия гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ определяется фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом третьего порядка рассматриваемой гиперповерхности.

Вильнюсский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
18. IX. 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас. К теории кривых метрического пространства линейных элементов, ДАН СССР, т. 127, № 1, 9–12, 1959.
2. В. И. Близникас. Конгруэнция центроидальных геодезических кривых метрического пространства линейных элементов ДАН СССР, т. 132, № 4, 735–738, 1960.
3. E. Cartan, Les espaces de Finsler, Paris, 1934.
4. J. G. Freeman. Finsler-Riemann systems, Quart. J. Math., **7**, 100—109, 1956.
5. Hassan Akbar-Zadeh. Sur une connexion euclidienne d'espace d'elements lineaires, C. R. Acad. sci., **245**, № 1, 26—28, 1957.
6. J. I. Horvath und A. Moór. Entwicklung einer Feldtheorie begründet auf einen allgemeinen metrischen Linienelementraum, I, II, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.= =Indagationes Math **17**, № 4, 421—430; № 5, 581—587, 1955.
7. J. I. Horvath. New geometrical methods of the theory of physical fields, Nuovo cimento, **9**, Suppl. № 2, 444—496, 1958.
8. J. M. Wegener. Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen, Monats. Math. und Phys., **44**, 115—130, 1936.

EUKLIDINIO SĄRYŠIO METRINĖS TIESINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖS HIPERPAVIRŠIŲ TEORIJOS KLAUSIMU

V. BLIZNIKAS

(Reziumė)

Finslerio erdvė yra atskiras atvejis euklidinio sąryšio metrinės tiesinių elementų erdvės $\mathcal{F}_n$ kurios geometrijos kai kurie klausimai išnagrinėti G. F. Laptevo ir A. M. Vasiljevo metodu straipsniuose [1] ir [2]. Finslerio erdvės hiperpaviršiumi Vegenerio prasme yra vadinama $(n—1)$ — parametrinė tiesinių elementų daugdara, kurios tiesiniai elementai yra transversalūs hipercentroidai. Jeigu Finslerio erdvėje transversalumo ir ortogonalumo sąvokos yra ekvivalentiškos, tai metrinėje tiesinių elementų erdvėje jos yra skirtingos. Straipsnyje erdvės $\mathcal{F}_n$ hiperpaviršiumi yra vadinama bet kokia $(n—1)$ — parametrinė tiesinių elementų daugdara. Tokios tiesinių elementų daugdaros geometrija yra nustatoma trečios eilės fundamentalinio geometrinio objekto pagalba. Straipsnyje yra surastos erdvės $\mathcal{F}_n$ hiperpaviršiaus derivacinės lygtys ir jų suderinamumo sąlygos.

ZUR THEORIE DER HYPERFLÄCHEN IN METRISCHEN LINIENELEMENTRAUM MIT EUKLIDISCHEN ZUSAMMENHANG

V. BLIZNIKAS

(Zusammenfassung)

Ein Finslerscher Raum ist ein Spezialfall des metrischen Linienelementenraumes $\mathcal{F}_n$ In diesem Artikel definiert man die Hiperfläche in Raum $\mathcal{F}_n$ als allgemeine $(n—1)$ — parametrische Manigfaltigkeit von Linienelementen. Im n — dimensionalen Finslerschen Raum definiert man die Hyperfläche von Wegener als $(n—1)$ — parametrische Manigfaltigkeit von transversalen Linienelementen. Die Geometrie der Hyperfläche des Raumes $\mathcal{F}_n$ wird mit Hilfe des fundamentalen differentialgeometrischen Objekte dritter Ordnung der Hyperfläche dargestellt.
