II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

О ПРЕПЯТСТВИЯХ И РАЗЛИЧАЮЩИХ СЕКУЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДВУКРАТНОГО РАССЛОЕНИЯ

А. МАТУЗЯВИЧЮС

1. Пусть $\overline{P}_1=(P_1,\ p_1,\ B,\ C_1)$ и $\overline{P}_2=(P_2,\ p',\ P_1,\ C')$ — два расслоенные пространства, базами в которых служит соответственно односвязные полиэдры B, P_1. Слои $C_1=p_1^{-1}(x_0)$ и $C'=(p')^{-1}(*)$ (где $x_0 \in B$, $* \in C_1 \subset P_1$) предполагаются гомотопически простыми в размерностях $(n-1)$ и n.

По заданным двум расслоенным пространствам $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ построим сложное расслоенное пространство $\overline{P}=(P_2,\ p_2,\ B,\ C_2)$, слой $C_2=(p')^{-1}(C_1)$ которого является также гомотопически простым в размерностях $(n-1)$, n, а проекция p_2 определяется по формуле $p_2=p_1^{\circ}p'$.

Три расслоенные пространства $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и $\overline{P}$ запишем при помощи следующей коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & P_2 \arrow[dl, "C_2"', "p_2"] \arrow[dd, "p_1"', "C'"] \\
B & \\
 & P_1 \arrow[ul, "p_1"', "C_1"]
\end{tikzcd}$$

2. Предполагается, что над n-мерным остовом B^n базисного пространства B в расслоенном пространстве $\overline{P}$ заданы две секущие поверхности φ_1 и φ_2, которые совпадают на $(n-2)$-мерном остове B^{n-2}. Тогда определены первые препятствия $z_{\varphi_i}^{n+1}\,(i=1,\ 2)$ по области коэффициентов $\pi_n(C_2)$ к распространению секущих поверхностей φ_i на $(n+1)$-мерный остов B^{n+1} базисного пространства B в расслоенном пространстве $\overline{P}_{n+1}$, классы когомологий которых обозначим через $Z_{\varphi_i}^{n+1}$. Здесь $Z_{\varphi_i}^{n+1}$ суть элементы группы когомологии $H^{n+1}\Big(B,\ \pi_n(C_2)\Big)$. Так как секущие поверхности φ_i заданы на B^n и совпадают на B^{n-2}, то они определяют $(n-1)$-мерный различающий коцикл $d_{\varphi_1,\varphi_2}^{n-1}$ по области коэффициентов $\pi_{n-1}(C_2)$. Класс когомологии этого коцикла обозначим через D_{φ}^{n-1}; этот класс является элементом группы когомологии $H^{n-1}\Big(B,\ \pi_{n-1}(C_2)\Big)$.

3. В расслоенном пространстве $\overline{P}_1$ формулами $\mathfrak{S}_i=p'\cdot\varphi_i$ определяются над n-мерным остовом B^n две секущие поверхности $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, совпадающие

на B^{n-2}. Тогда определены первые препятствия $z_{\mathfrak{S}_i}^{n+1}$ по области коэффициентов $\pi_n(C_1)$ к распространению секущих поверхностей $\mathfrak{S}_i$ на B^{n+1} базисного пространства B в расслоенном пространстве $\overline{P}_1$, классы когомологий которых обозначим через $Z_{\mathfrak{S}_i}^{n+1} \in H^{n+1}\left(B, \pi_n(C_1)\right)$. Эти секущие поверхности $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ определяют также $(n-1)$-мерный различающий коцикл $d_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}^{n-1}$ по области коэффициентов $\pi_{n-1}(C_1)$, класс когомологии которого обозначим через $D_{\mathfrak{S}}^{n-1} \in H^{n-1}\left(B, \pi_{n-1}(C_1)\right)$.

4. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Классы когомологий $Z_{\varphi_i}^{n+1}$, $Z_{\mathfrak{S}_i}^{n+1}$ $(i=1, 2)$; D_{φ}^{n-1}, $D_{\mathfrak{S}}^{n-1}$ связаны соответственно соотношениями

$$\hat{p}'_* Z_{\varphi_i}^{n+1} = Z_{\mathfrak{S}_i}^{n+1}, \tag{1}$$

$$\hat{p}'_* D_{\varphi}^{n-1} = D_{\mathfrak{S}}^{n-1}, \tag{2}$$

где $\hat{p}'_*$ — гомоморфизм групп когомологий

$$H^{n+1}\left(B, \pi_n(C_2)\right) \to H^{n+1}\left(B, \pi_n(C_1)\right)$$

или

$$H^{n-1}\left(B, \pi_{n-1}(C_2)\right) \to H^{n-1}\left(B, \pi_{n-1}(C_1)\right),$$

порождаемый соответственно гомоморфизмом

$$p'_* : \pi_n(C_2) \to \pi_n(C_1) \quad \text{или} \quad p'_* : \pi_{n-1}(C_2) \to \pi_{n-1}(C_1).$$

Эта теорема легко следует из определения секущих поверхностей $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ и гомоморфизма p'_*.

5. Пусть задана над всем базисом P_1 расслоенного пространства $\overline{P}_2$ секущая поверхность ψ.

Теперь предполагается, что над B^n базисного пространства B в расслоенном пространстве $\overline{P}_1$ заданы две секущие поверхности $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, которые совпадают на B^{n-2}. Тогда формулами $\varphi_i = \psi \circ \mathfrak{S}_i$ определяются над B^n расслоенного пространства $\overline{P}$ две секущие поверхности φ_1, φ_2, совпадающие на B^{n-2}.

Препятствия, различающие, определяемые секущими поверхностями $\mathfrak{S}_i$, φ_i, а также классы их когомологий обозначаются как и в пунктах 2 и 3.

6. При этих условиях имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Классы когомологий $Z_{\mathfrak{S}_i}^{n+1}$, $Z_{\varphi_i}^{n+1}$ $(i=1, 2)$; $D_{\mathfrak{S}}^{n-1}$, D_{φ}^{n-1} связаны соответственно соотношениями

$$\hat{\psi}_* Z_{\mathfrak{S}_i}^{n+1} = Z_{\varphi_i}^{n+1}, \tag{3}$$

$$\hat{\psi}_* D_{\mathfrak{S}}^{n-1} = D_{\varphi}^{n-1}, \tag{4}$$

где $\hat{\psi}_*$ — гомоморфизм групп когомологий

$$H^{n+1}\left(B, \pi_n(C_1)\right) \to H^{n+1}\left(B, \pi_n(C_2)\right)$$

или

$$H_n^{n-1}\left(B, \pi_{n-1}(C_1)\right) \to H^{n-1}\left(B, \pi_{n-1}(C_2)\right),$$

порождаемый соответственно гомоморфизмом

$$\psi_* : \pi_n(C_1) \to \pi_n(C_2) \quad \text{или} \quad \psi_* : \pi_{n-1}(C_1) \to \pi_{n-1}(C_2).$$

Доказательство. Покажем справедливость соотношения (3), а соотношение (4) доказывается аналогично.

Для доказательства соотношения (3), очевидно, нам достаточно показать, что имеет место соотношение

$$\psi_* z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i} = z^{n+1}_{\varphi_i}, \tag{3'}$$

где $z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i}$, $z^{n+1}_{\varphi_i}$ — препятствия соответственно в расслоенных пространствах $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, принадлежащие классам когомологий $z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i}$, $z^{n+1}_{\varphi_i}$.

В свою очередь, для доказательства соотношения (3)′ нам достаточно показать, что оно справедливо для любого $(n+1)$-мерного ориентированного симплекса T^{n+1} базисного пространства B, т. е.

$$\psi_* z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i}(T^{n+1}) = z^{n+1}_{\varphi_i}(T^{n+1}), \tag{3''}$$

где $z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i}(T^{n+1})$, $z^{n+1}_{\varphi_i}(T^{n+1})$ — значения препятствий $z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i}$, $z^{n+1}_{\varphi_i}$ на симплексе $\dot{T}^{n+1}$. Соотношение (3″) и докажем.

Обозначим когерентно ориентированную границу симплекса T^{n+1} через $S^n = \dot{T}^{n+1}$. В дальнейшем будем рассматривать секущие поверхности $\mathfrak{S}_i$, φ_i соответственно в расслоенных пространствах $\overline{P}_1$, $\overline{P}$ только на S^n.

По определению секущей поверхности $\mathfrak{S}_i$ в расслоенном пространстве $\overline{P}_1$ имеем $p_1 \circ \mathfrak{S}_i = e$, где e — тождественное отображение ориентированной сферы S^n на себя.

Пусть h_τ — деформация, соединяющая тождественное отображение $h_0 = e : S^n \to S^n$ с отображением $h_1 : S^n \to x_0$ и построенная таким образом, что сначала сфера S^n стягивается по симплексу T^{n+1} в точку, а затем эта точка непрерывно перемещается в точку x_0.

Применяя условия существования накрывающей гомотопии для секущей поверхности $\mathfrak{S}_i$ расслоенного пространства $\overline{P}_1$, получаем такое семейство отображений $\mathfrak{S}^\tau_i : S^n \to P_1$, что $p_1 \circ \mathfrak{S}^\tau_i = h_\tau$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$.

Но в конце деформации непрерывное отображение $\mathfrak{S}^1_i$ ориентированной n-мерной сферы S^n в слой C_1 определяет некоторый элемент гомотопической группы $\pi_n(C_1)$, который поставим в соответствие симплексу T^{n+1} и обозначим через $z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i}(T^{n+1})$. Этот элемент является значением препятствия $z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i}$ на симплексе T^{n+1}.

Секущая поверхность ψ в расслоенном пространстве $\overline{P}$, рассматриваемая на C_1 как отображение пространства C_1 в пространство C_2, индуцирует гомоморфизм

$$\psi_* : \pi_n(C_1) \to \pi_n(C_2).$$

Гомоморфизм ψ_* сопоставляет элементу $z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i}(T^{n+1})$ гомотопической группы $\pi_n(C_1)$ элемент $\psi_* z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i}(T^{n+1})$ гомотопической группы $\pi_n(C_2)$, которого определяет отображение $\psi \circ \mathfrak{S}^1_i$. Очевидно, это отображение является гомотопное отображению $\varphi_i = \psi \circ \mathfrak{S}_i$.

Теперь применяя условия существования накрывающей гомотопии для секущей поверхности φ_i расслоенного пространства $\overline{P}$, получаем такое семейство отображений $\varphi_i^\tau : S^n \to P_2$, что $p_2 \circ \varphi_i^\tau = h_\tau$. Непрерывное отображение $\varphi_i : S^n \to P_2$ деформируется в непрерывное отображение $\varphi_i^1 : S^n \to C_2$. Отображение φ_i^1 определяет элемент $z_{\varphi_i}^{n+1}(T^{n+1})$ гомотопической группы $\pi_n(C_2)$.

Так как отображения φ_i^1 и $\psi \circ \mathfrak{S}_i^1$ гомотопны одному и тому же отображению φ_i, то они гомотопны и между собой, а поэтому определяемые ими соответственно элементы $z_{\varphi_i}^{n+1}(T^{n+1})$, $\psi_* z_{\mathfrak{S}_i}^{n+1}(T^{n+1})$ гомотопической группы $\pi_n(C_2)$ равны.

7. Теперь пусть задана над всем базисом B расслоенного пространства $\overline{P_1}$ секущая поверхность $\mathfrak{S}$. Тогда часть расслоенного пространства $\overline{P_2}$ над $\mathfrak{S}(B)$ обозначим через $\overline{P}_{2,\mathfrak{S}} = \left(P_{2,\mathfrak{S}},\ p',\ \mathfrak{S}(B),\ C'\right)$.

Предполагается, далее, что над n-мерным остовом базисного пространства $\mathfrak{S}(B)$ в расслоенном пространстве $\overline{P}_{2,\mathfrak{S}}$ заданы две секущие поверхности ψ_1, ψ_2, совпадающие над $(n-2)$-мерным остовом этого базиса. Тогда эти секущие поверхности ψ_1, ψ_2, с одной стороны, определяют соответственно первые препятствия $z_{\psi_1}^{n+1}$, $z_{\psi_2}^{n+1}$ к продолжению их в расслоенном пространстве $\overline{P}_{2,\mathfrak{S}}$, принимающие значения в области коэффициентов $\pi_n(C')$, классы когомологий которых обозначим соответственно через

$$Z_{\psi_1}^{n+1},\ Z_{\psi_2}^{n+1} \in H^{n+1}\left(\mathfrak{S}(B),\ \pi_n(C')\right),$$

с другой стороны, они определяют различающую d_{ψ_1,ψ_2}^{n-1}, которая является коциклом, принимает значения в области коэффициентов $\pi_{n-1}(C')$, класс когомологии этого коцикла обозначим через

$$D_\psi^{n-1} \in H^{n-1}\left(\mathfrak{S}(B),\ \pi_{n-1}(C')\right).$$

Тогда над n-мерным остовом B^n базиса B в расслоенном пространстве $\overline{P}$ определяется формулами $\varphi_1 = \psi_1 \circ \mathfrak{S}$, $\varphi_2 = \psi_2 \circ \mathfrak{S}$ две секущие поверхности φ_1, φ_2, совпадающие над B^{n-2}. Препятствия и различающая, определяемые секущими поверхностями φ_1, φ_2, а также классы их когомологий обозначаются, как и в пункте 2.

8. При высказанных условиях имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Классы когомологий $Z_{\psi_i}^{n+1}$, $Z_{\varphi_i}^{n+1}$ $(i=1,\ 2)$; D_ψ^{n-1}, D_φ^{n-1} связаны соответственно соотношениями

$$\hat{j}_*\, Z_{\psi_i}^{n+1} = Z_{\varphi_i}^{n+1}, \tag{5}$$

$$\hat{j}_*\, D_\psi^{n-1} = D_\varphi^{n-1}, \tag{6}$$

где $\hat{j}_*$ — гомоморфизм групп когомологий

$$H^{n+1}\left(\mathfrak{S}(B),\ \pi_n(C')\right) \to H^{n+1}\left(B,\ \pi_n(C_2)\right)$$

или

$$H^{n-1}\left(\mathfrak{S}(B),\ \pi_{n-1}(C')\right) \to H^{n-1}\left(B,\ \pi_{n-1}(C_2)\right).$$

Доказательство. Покажем только справедливость соотношения (5), а соотношение (6) доказывается аналогично.

Для доказательства соотношения (5), похоже, как и при доказательстве теоремы 2, нам достаточно показать, что оно справедливо для любого $(n+1)$-мерного ориентированного симплекса T^{n+1} базисного пространства B, т. е.

$$j_* z^{n+1}_{\psi_i}(\mathfrak{S} T^{n+1}) = z^{n+1}_{\varphi_i}(T^{n+1}), \tag{5'}$$

где $z^{n+1}_{\varphi_i}(\mathfrak{S} T^{n+1})$, $z^{n+1}_{\varphi_i}(T^{n+1})$ — значения препятствий $z^{n+1}_{\psi_i} \in Z^{n+1}_{\psi}$, $z^{n+1}_{\varphi_i} \in Z^{n+1}_{\varphi_i}$ на симплексе T^{n+1}.

Пусть $S^n = \dot{T}^{n+1}$, а h_τ — такая же деформация сферы S^n, как и в доказательстве теоремы 2. Теперь, применяя условия существования накрывающей гомотонии дле секущей поверхности φ_i расслоенного пространства $\bar{P}$, получаем такое семейство отображений $\varphi_i^\tau : S^n \to P_2$, что $p_2 \circ \varphi_i^\tau = h_\tau$. Таким образом, отображение $\varphi_i = \psi_i \circ \mathfrak{S} : S^n \to P_2$ деформируется в отображение $\varphi_i^1 : S^n \to C_2$, которое определяет элемент $z^{n+1}_{\varphi_i}(T^{n+1})$ гомотопической группы $\pi_n(C_2)$.

Еще применяя условия существования накрывающей гомотопии для секущей поверхности ψ_i расслоенного пространства $\bar{P}_{2,\mathfrak{S}}$, получаем такое семейство отображений $\psi_i^\tau : S'^n \to P_2$, что $p' \circ \psi_i^\tau = h'_\tau$, где $S'^n = \mathfrak{S} S^n$, а h'_τ — деформация, соединяющая тождественное отображение $h'_0 = e : S'^n \to S'^n$ с отображением $h_1 : S'^n \to * \left(\mathfrak{S}(x_0) = *\right)$ и построенная таким образом, что сначала сфера S'^n стягивается по симплексу $\mathfrak{S} T^{n+1}$ в точку, а затем эта точка непрерывно перемещается в точку $*$. Но в конце деформации непрерывное отображение $\psi_i^1 : S'^n \to C'$ определяет элемент $z^{n+1}_{\psi_i}(\mathfrak{S} T^{n+1})$ гомотопической группы $\pi_n(C')$.

Пусть $j : C' \to C_2$ — отображение включения. Тогда оно индуцирует гомоморфизм

$$j_* : \pi_n(C') \to \pi_n(C_2).$$

При этом гомоморфизме элемент $z^{n+1}_{\psi_i}(\mathfrak{S} T^{n+1})$ гомотопической группы $\pi_n(C')$ переходит в элемент $j_* z^{n+1}_{\psi_i}(\mathfrak{S} T^{n+1})$ гомотопической группы $\pi_n(C_2)$.

В заключение доказательства заметим, что отображение $\varphi_i = \psi_i \circ \mathfrak{S}$ гомотопное отображению $\bar{\varphi}_i = \psi_i^1 \circ \mathfrak{S}$, которое, очевидно, определяет элемент $j_* z^{n+1}_{\psi_i}(\mathfrak{S} T^{n+1})$. Так как гомотопные отображения определяют один и тот же элемент гомотопической группы, то отображениями φ_i^1, $\bar{\varphi}_i$ соответственно определены элементы $z^{n+1}_{\varphi_i}(T^{n+1})$, $j_* z^{n+1}_{\psi_i}(\mathfrak{S} T^{n+1})$ гомотопической группы $\pi_n(C_2)$ равны.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
25. XI. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Болтянский. Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 47 (1955).
2. А. Матузявичюс. Литовский матем. сб., 1, 1—2, 110—122 (1961).

APIE KERTAMŲJŲ PAVIRŠIŲ KLIŪTIS IR SKIRIAMĄSIAS DVIGUBUOSE SLUOKSNIAVIMUOSE

A. MATUZEVIČIUS

(Reziumė)

Sakykime, kad $P_2 \xrightarrow{p'} P_1 \xrightarrow{p_1} B$ yra dvigubas sluoksniavimas, kurio bazė B–simpleksinis padalijimas, o sluoksniai C_1, C' yra homotopiniai paprasti matavimuose $(n-1)$ ir n. Tada apibrėžiamas sudėtingas sluoksniavimas $P_2 \xrightarrow{p_2} B$ su sluoksniu $C_2=(p')^{-1}(C_1)$ ir projekcija $p_2=p' \circ p_1$. Tegu sluoksniavime $P_2 \xrightarrow{p_2} B$ ant n-matės bazės dalies B^n duoti du kertamieji paviršiai φ_1, φ_2, kurie sutampa ant $(n-2)$-matės bazės B^{n-2}, tai apibrėžtos jų pratęsimo kliūtys $z^{n+1}_{\varphi_i}$ $(i=1, 2)$, ir skiriamoji $d^{n-1}_{\varphi_1, \varphi_2}$ priklauso atitinkamai kohomologijos klasėms

$$Z^{n+1}_{\varphi_i} \in H^{n+1}\left(B, \ \pi_n(C_2)\right), \quad D^{n-1}_{\varphi} \in H^{n-1}\left(B, \ \pi_{n-1}(C_2)\right).$$

Tuomet sluoksniavime $P_1 \xrightarrow{p_1} B$ ant B^n apibrėžiami formule $\mathfrak{S}_i=p' \circ \varphi_i$ du kertamieji paviršiai $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ sutampa ant B^{n-2} ir apibrėžia pratęsimo kliūtis $z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i}$ ir skiriamąją $d^{n-1}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}$, priklausančius atitinkamai kohomologijos klasėms

$$Z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i} \in H^{n+1}\left(B, \ \pi_n(C_1)\right), \quad D^{n-1}_{\mathfrak{S}} \in H^{n-1}\left(B, \ \pi_{n-1}(C_1)\right).$$

Tada teisingos pareinamybės

$$\hat{p}'_* Z^{n+1}_{\varphi_i} + Z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i}, \quad \hat{p}'_* D^{n-1}_{\varphi} = D^{n-1}_{\mathfrak{S}},$$

kur $\hat{p}'_*$–atitinkamai kohomologijos grupių

$$H^{n+1}\left(B, \ \pi_n(C_2)\right) \to H^{n+1}\left(B, \ \pi_n(C_1)\right),$$

$$H^{n-1}\left(B, \pi_{n-1}(C_2)\right) \to H^{n-1}\left(B, \ \pi_{n-1}(C_1)\right)$$

homomorfizmai, indukuoti homomorfizmų

$$p'_*: \pi_n(C_2) \to \pi_n(C_1), \quad p'_*: \pi_{n-1}(C_2) \to \pi_{n-1}(C_1).$$

Toliau tegu sluoksniavime $P_2 \xrightarrow{p'} P_1$ ant visos bazės P_1 duotas kertamasis paviršius ψ, o sluoksniavime $P_1 \xrightarrow{p_1} B$ ant B^n duoti du kertamieji paviršiai $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, kurie sutampa ant B^{n-2}. Tada sluoksniavime $P_2 \xrightarrow{p_2} B$ ant B^n apibrėžiami formule $\varphi_i=\psi \circ \mathfrak{S}_i$ du kertamieji paviršiai φ_1, φ_2 sutampa ant B^{n-2}. Kertamųjų paviršių $\mathfrak{S}_i$, φ_i kliūčių ir skiriamųjų kohomologijos klases pažymėsime taip pat, kaip anksčiau.

Darbe įrodomos formulės

$$\hat{\psi}_* Z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i} = Z^{n+1}_{\varphi_i}, \quad \hat{\psi}_* D^{n-1}_{\mathfrak{S}} = D^{n-1}_{\varphi},$$

kur ψ_*–atitinkamai kohomologijos grupių

$$H^{n+1}\left(B, \ \pi_n(C_1)\right) \to H^{n+1}\left(B, \ \pi_n(C_2)\right),$$

$$H^{n-1}\left(B, \ \pi_{n-1}(C_1)\right) \to H^{n-1}\left(B, \ \pi_{n-1}(C_2)\right)$$

homomorfizmai, indukuoti homomorfizmų

$$\psi_*: \pi_n(C_1) \to \pi_n(C_2), \quad \psi_*: \pi_{n-1}(C_1) \to \pi_{n-1}(C_2).$$

Pagaliau, tegu sluoksniavime $P_1 \xrightarrow{p_1} B$ ant visos bazės B duotas kertamasis paviršius $\mathfrak{S}$, o sluoksniavime $P_2 \xrightarrow{p'} P_1|_{\mathfrak{S}(B)}$ ant B^n duoti du kertamieji paviršiai ψ_1, ψ_2, sutampantieji ant B^{n-2}, tada sluoksniavime $P_2 \xrightarrow{p_2} B$ ant B^n apibrėžiami formule $\varphi_i = \psi_i \circ \mathfrak{S}$ du kertamieji paviršiai φ_1, φ_2 sutampa ant B^{n-2}. Kertamieji paviršiai ψ_1, ψ_2 apibrėžia pratęsimo kliūtis $z_{\psi_i}^{n+1}$ ir skiriamąją d_{ψ_1, ψ_2}^{n-1}, kurių kohomologijos klases pažymėsime atitinkamai

$$Z_{\psi_i}^{n+1} \in H^{n+1}\left(\mathfrak{S}(B),\ \pi_n(C')\right), \quad D_{\psi}^{n-1} \in H^{n-1}\left(\mathfrak{S}(B),\ \pi_{n-1}(C')\right).$$

Tada teisingos formulės

$$\hat{j}_* Z_{\psi_i}^{n+1} = Z_{\varphi_i}^{n+1}, \quad \hat{j}_* D_{\psi}^{n-1} = D_{\varphi}^{n-1},$$

kur j_* — atitinkamai kohomologijos grupių

$$H^{n+1}\left(\mathfrak{S}(B),\ \pi_n(C')\right) \to H^{n+1}\left(B,\ \pi_n(C_2)\right),$$

$$H^{n-1}\left(\mathfrak{S}(B),\ \pi_{n-1}(C')\right) \to H^{n-1}\left(B,\ \pi_{n-1}(C_2)\right)$$

homomorfizmai.

ÜBER DIE HINDERNISSE UND DIE UNTERSCHEIDUNGEN DER SCHNITTFLÄCHEN IM ZWEIMALIGEN FASERRAUME

A. MATUZEVIČIUS

(Zusammenfassung)

Es sei erstens $P_2 \xrightarrow{p'} P_1 \xrightarrow{p_1} B$ ein zweimaliger Faserraum mit homotopisch einfachen in den Dimensionen $(n-1)$ und n Fibern C', C_1, zweitens seien φ_1, φ_2 zwei zusamenfalende (auf B^{n-2}) Schnittflächen auf dem simplizialen n-dimensionalen Komplex B^n im Faserraume $P_2 \xrightarrow{p_2} B$ mit der Projektion $p_2 = p' \circ p_1$ und der Fiber $C_2 = (p')^{-1}(C_1)$, drittens seien

$$Z_{\varphi_i}^{n+1} \in H^{n+1}\left(B,\ \pi_n(C_2)\right), \quad D_{\varphi}^{n-1} \in H^{n-1}\left(B,\ \pi_{n-1}(C_2)\right)$$

die Kohomologieklassen der Hindernisse bzw. der Unterscheidung von Schnittflächen φ_i ($i = 1, 2$). Dann definiert die Formel $\mathfrak{S}_i = p' \circ \varphi_i$ zwei zusamenfallende (auf B^{n-2}) Schnittflächen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ auf B^n im Faserraume $P_1 \xrightarrow{p_1} B$. Bezeichnet man die Kohomologieklassen der Hindernisse bzw. der Unterscheidung von Schnittflächen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ mit

$$Z_{\mathfrak{S}_i}^{n+1} \in H^{n+1}\left(B,\ \pi_n(C_1)\right), \quad D_{\mathfrak{S}}^{n-1} \in H^{n-1}\left(B,\ \pi_{n-1}(C_1)\right).$$

Nun gelten die Formeln

$$\hat{p}'_* Z_{\varphi_i}^{n+1} = Z_{\mathfrak{S}_i}^{n+1}, \quad \hat{p}'_* D_{\varphi}^{n-1} = D_{\mathfrak{S}}^{n-1},$$

wo

$$\hat{p}'_*: H^{n+1}\left(B, \pi_n(C_2)\right) \to H^{n+1}\left(B,\ \pi_n(C_1)\right)$$

bzw.

$$\hat{p}'_*: H^{n-1}\left(B,\ \pi_{n-1}(C_2)\right) \to H^{n-1}\left(B,\ \pi_{n-1}(C_1)\right)$$

entsprechende Homomorphismen darstellen.

Ferner seien $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ zwei zusamenfallende (auf B^{n-2}) Schnittflächen auf B^n im Faserraume $P_1 \xrightarrow{p_1} B$ und sei ψ eine Schnittfläche auf P_1 im Faserraume $P_2 \xrightarrow{p'} P_1$. Die Formel $\varphi_i = \psi \circ \mathfrak{S}_i$ definiert zwei zusamenfallende (auf B^{n-2}) Schnittflächen φ_1, φ_2 auf B^n im Faserraume $P_2 \xrightarrow{p_2} B$. Im vorliegenden Aufsatz werden die Formeln

$$\hat{\psi}_* Z^{n+1}_{\mathfrak{S}_i} = Z^{n+1}_{\varphi_i}, \quad \hat{\psi}_* D^{n-1}_{\mathfrak{S}} = D^{n-1}_{\varphi}$$

abgeleitet. Hier stellen

$$\hat{\psi}_* : H^{n+1}\Big(B, \pi_n(C_1)\Big) \to H^{n+1}\Big(B, \pi_n(C_2)\Big)$$

bzw.

$$\hat{\psi}^* : H^{n-1}\Big(B, \pi_{n-1}(C_1)\Big) \to H^{n-1}\Big(B, \pi_{n-1}(C_2)\Big)$$

entsprechende Homomorphismen dar.