II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

# О ТЕОРЕМАХ А. Я. ХИНЧИНА и И. П. КУБИЛЮСА

В. Г. СПРИНДЖУК

Хорошо известна теорема А. Я. Хинчина (1; 7, стр. 147–148), согласно которой для почти всех вещественных векторов $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ система диофантовых неравенств

$$\max(\|\omega_1 q\|, \|\omega_2 q\|, \ldots, \|\omega_m q\|) < \varphi(q), \tag{1}$$

где $\|x\|$ – расстояние $x$ до ближайшего целого, $\varphi(q)$ положительна и монотонно убывает, имеет конечное или бесконечное число решений в зависимости от того, сходится или расходится ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \varphi^m(q).$$

В связи с общей теорией трансцендентных чисел важно знать для данных целочисленных полиномов $\Omega_i = \Omega_i(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ точную нижнюю грань тех $\lambda>0$, для которых аналогичная (1) система неравенств

$$\max(\|\Omega_1 q\|, \|\Omega_2 q\|, \ldots, \|\Omega_m q\|) < q^{-\lambda} \tag{2}$$

имеет конечное число решений при почти всех $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$.

Известно предположение К. Малера (3) о том, что система

$$\max(\|\omega q\|, \|\omega^2 q\|, \ldots, \|\omega^h q\|) < q^{-\frac{1}{n}-\delta}$$

для почти всех вещественных чисел $\omega$ имеет лишь конечное число решений, если $\delta>0$.

Первый шаг в решении задач такого рода сделал И. П. Кубилюс (4-5), доказавший некоторое усиление предположения К. Малера при $n=2$.

В настоящей статье мы получаем следующие результаты.

**Теорема 1.** *Система диофантовых неравенств*

$$\max_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}(\|\omega_i q\|, \|\omega_i\omega_j q\|) < \varphi(q)$$

*для почти всех* $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ *имеет лишь конечное число решений, если сходится ряд*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \varphi^n(q)\, q^{\frac{n}{m}-1}, \quad m = \frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Применением принципа переноса А. Я. Хинчина (2; 7, стр. 100) получается следующая

**Теорема 2.** *При любом* $\delta > 0$ *для почти всех векторов* $\bar\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ *имеет место неравенство*

$$|\Phi(\omega_1, \ldots, \omega_n)| > h^{-m-\delta}, \quad m = \frac{n(n+1)}{2} + n,$$

*где* $\Phi$ — *целочисленный полином вида*

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i x_i + a,$$

$$h = \max\left(|a_{ij}|, \ |a_i|, \ |a|\right) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

*при условии, что* $h > h_0 = h_0(\bar\omega, \delta)$.

Доказательство теоремы 1 основано на хорошо известных оценках обобщенных гауссовых сумм (см., например, Бахман (6), стр. 508—510). Применяемый метод позволяет решить также некоторые задачи с более общими системами вида (2), о чем мы надеемся сообщить в дальнейшем.

Ради простоты рассуждений будем считать $\varphi(q) = q^{-\frac{1}{m}-\delta}$, $\delta > 0$.

Достаточно рассматривать $\omega_i$ с условием $0 \leqslant \omega_i < 1$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пусть

$$\|\omega_i q\| = |\omega_i q - a_i|, \quad \|\omega_i \omega_j q\| = |\omega_i \omega_j q - a_{ij}|.$$

Очевидно,

$$\left|\frac{a_i a_j}{q} - a_{ij}\right| \ll \varphi(q)$$

и пусть $N(q)$ — число решений этого неравенства в целых числах $a_i$ $0 \leqslant a_i < q$. Нам достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{N(q)}{q^n} \varphi^n(q).$$

Мы докажем это, показав, что $N(q) \ll q^{n+\frac{n}{m}-1}$.

Из (4) при любых целых $c_{ij}$ с условиями $|c_{ij}| \leqslant q^{\frac{1}{m}}$ получаем

$$\left\| c_{ij} \frac{a_i a_j}{q} \right\| \ll \left| c_{ij} \left( \frac{a_i a_j}{q} - a_{ij} \right) \right| \ll q^{\frac{1}{m}} \cdot q^{-\frac{1}{m}-\delta} = q^{-\delta}.$$

Следовательно,

$$e^{2\pi i c_{kl} \frac{a_k a_l}{q}} = 1 + O(q^{-\delta}),$$

$$\left| \sum_S \exp 2\pi i \frac{S(a_1, \ldots, a_n)}{q} \right| > \frac{1}{2} \left(2 q^{\frac{1}{m}}\right)^{m_1} > q^{\frac{m_1}{m}}, \quad m_1 \frac{n(n+1)}{2},$$

где $S = S(a_1, \ldots, a_n) = \sum\limits_{1 \leq k,\, l \leq n} c_{kl} a_k a_l$ и в экспоненциальной сумме суммирование ведется по всем $S$ с условием $\overline{|S|} \leq q^{\frac{1}{m}}$. Мы находим далее

$$N(q) \cdot q^{2\frac{m_1}{m}} < \sum_{a_1, \ldots, a_n} \left| \sum_S \exp 2\pi i \frac{S(a_1, \ldots, a_n)}{q} \right|^2 =$$

$$= \sum_{a_1, \ldots, a_n} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \exp 2\pi i \left\{ \frac{S_1(a_1, \ldots, a_n) - S_2(a_1, \ldots, a_n)}{q} \right\} \leq$$

$$\leq q^{\frac{m_1}{m}} \sum_{\overline{|S|} \leq 2q^{\frac{1}{m}}} \left| \sum_{a_1, \ldots, a_n} \exp 2\pi i \frac{S(a_1, \ldots, a_n)}{q} \right|.$$

Поэтому

$$N(q) \leq q^{-\frac{m_1}{m}} \sum_{\overline{|S|} \leq 2q^{\frac{1}{m}}} |\Gamma_q(S)|,$$

где $\Gamma_q(S)$ – обобщенная гауссова сумма квадратичной формы $S$.

Если $S$ вырождается в нуль, то $\Gamma_q = q^n$, а для $N(q)$ можно ожидать не лучшую оценку, чем $c(n) q^{n - \frac{m_1}{m}}$. Но $n - \frac{m_1}{m} = n - 1 + \frac{2}{n+3} = n - 1 + \frac{n}{m}$, так что нам остается рассмотреть формы $S$, отличные от нуля.

Пусть для данной формы $S$ будет $c = (c_{11} \ldots, c_{ij}, \ldots; q)$ – о. н. д. коэффициентов формы и $q$. Тогда

$$\sum_{\overline{|S|} \leq 2q^{\frac{1}{m}}} |\Gamma_q(S)| = \sum_{c \mid q} c^n \sum_{\overline{|S|} \leq 2q^{\frac{1}{m}} c^{-1}} \left| \sum_{\bar{a} \bmod q_1} \exp 2\pi_i \frac{S_1(\bar{a})}{q_1} \right|,$$

где $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $S$ имеет с $q_1 = qc^{-1}$ взаимно простые коэффициенты.

Интерполируя форму $S_1$ по значениям в прямоугольнике $0 \leq x_i \leq 2$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ находим такую точку $(x_i^{(0)})$, что

$$\text{о. н. д.} \left( S_1(x_i^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),\ q \right) = 1.$$

Унимодулярной подстановкой переводим $S$ в форму $S_1'$ с условием $(c_{11}', q_1) = 1$, причем коэффициенты этой подстановки можно выбрать не превосходящими $c(n)$ по абсолютной величине. Следовательно,

$$S_1' = \frac{1}{c_{11}} (c_{11}' x_1 + c_{12}' x_2 + \ldots + c_{1n}' x_n)^2 + S_{12}(x_2, \ldots, x_n),$$

где $S_{13}$ — форма с рациональным коэффициентами, знаменатели которых входят в $c'_{11}$, т. е. взаимно просты с $q_1$, $|c'_{1l}| \leqslant c(n) q^{\frac{1}{m}} c^{-1}$ $(l=1, 2, \ldots, n)$. Выделяя из $S_{12}$ общий с $q_1$ делитель коэффициентов и продолжая для получаемой формы предыдущее рассуждение, мы найдем для $S'_1$ представление

$$S'_1 = \frac{1}{m_1} X_1^2 + \frac{q^2}{m^2} X_2^2 + \ldots + \frac{q^{(k)}}{m_k} X_k^2, \qquad k \leqslant n,$$

где

$$m_1 = c'_{11}, \ (m_i, q_1) = 1, \ q^{(i)} | q^{(i+1)}, \ q^{(1)} = 1, \ q^{(k+1)} = q_1,$$
$$X_1 = c'_{11} x_1 + c'_{12} x_2 + \ldots + c'_{1n} x_n,$$
$$|c'_{1i}| \leqslant c(n) q^{\frac{1}{m}} c^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Теперь находим

$$q_1^{-(n-k)} \sum_{\bar{a} \bmod q_1} \exp 2\pi i \frac{S'_1(\bar{a})}{q_1} =$$
$$= \sum_{X_1 \bmod q_1} \exp 2\pi i \frac{X_1^2}{m_1 q_1} \sum_{X_2 \bmod q_1} \exp 2\pi i \frac{X_2^2 q^{(2)}}{m_2 q_1} \ldots \sum_{X_k \bmod q_1} \exp 2\pi i \frac{X_k^2 q^{(k)}}{m_k q_1}.$$

Пусть $q^{(l)} = \prod_{p | q_1} p^{\gamma_l}$, $q_1 = \prod_{p | q_1} p^{\alpha}$. Тогда $0 = \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_k$,

$$\left| \sum_{X_l \bmod q_1} \exp 2\pi i \frac{q^{(l)} X_l^2}{m_l q_1} \right| \ll \prod_{p | q_1} p^{\frac{\alpha + \min(\alpha, \gamma_l)}{2}}.$$

Таким образом, имеем

$$\left| \sum_{\bar{a} \bmod q_1} \exp 2\pi i \frac{S(\bar{a})}{q_1} \right| = \left| \sum_{\bar{a} \bmod q_1} \exp 2\pi i \frac{S'_1(\bar{a})}{q_1} \right| \ll q_1^{n-1} \prod_{p | q_1} p^{\frac{\min(\alpha, \gamma_2)}{2}}.$$

Из соотношений (5) заключаем, что

$$c'_{1i} c'_{1j} \equiv c'_{11} c'_{ij} \left(\bmod \prod_{p | q_1} p^{\gamma_2}\right),$$

и, следовательно,

$$c'_{ij} \equiv \sigma_{ij} \left(\bmod \prod_{p | q_1} p^{\gamma_2}\right),$$

где для $\sigma_{ij}$ имеется не более, чем $c(n) \min\left(q^{\frac{n}{m}} c^{-n}, \prod_{p | q_1} p^{\gamma_2}\right) \ll c^{-n} q^{\frac{n}{m}}$ возможностей. Разбивая все формы на классы $K\{\gamma_2\}$ соответственно множеству $\{\gamma_2\}$, мы находим, что число форм $S'_1$ в данном классе есть величина порядка

$$c(n) c^{-n} q^{\frac{n}{m}} \left(1 + \frac{c^{-1} q^{\frac{1}{m}}}{\prod_{p | q_1} p^{\gamma_2}}\right)^{m_2}, \qquad m_2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Число всех классов совпадает с числом всех возможных множеств $\{\gamma_2\}$, т. е. равно $\tau(q_1)$ — числу делителей $q_1$.

Теперь находим

$$\sum_{c\mid q} c^{-n} \sum_{\overline{|S_1|} \leqslant 2q^{\frac{1}{m}} c^{-1}} \Big| \sum_{\bar{a} \bmod q_1} \exp 2\pi i \frac{S_1(\bar{a})}{q_1} \Big| \ll$$

$$\ll \sum_{c\mid q} \sum_{K\{\gamma_s\}} \Big( q^{\frac{n}{m}+n-1} \prod_{p\mid q_1} p^{\min\frac{(\alpha,\,\gamma_s)}{2}} + c^{-m_s} q^{\frac{m_1}{m}+n-1} \sum_{p\mid q_1} p^{\min\frac{(\alpha,\,\gamma)}{2} - m_s\gamma_s} \Big) \ll$$

$$\ll \tau(q) \sum_{c\mid q} \Big( q^{\frac{n}{m}+n-1} q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{m_1}{m}+n-1} c^{-m_s} \Big) \ll$$

$$\ll \tau^2(q)\, q^{\frac{n}{m}+n-\frac{1}{2}} + 2q^{\frac{m_1}{m}+n-1} \tau(q) \ll q^n,$$

если $n>2$. В случае $n=2$ мы получаем здесь $q^2\tau(q)$, но фактически, проводя рассуждения описанного типа в этом специальном случае, получаем $q^2$.

Таким образом,

$$N(q) \ll q^{n+\frac{n}{m}-1},$$

чем и завершается доказательство.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию 23. XII. 1961

## ЛИТЕРАТУРА


1. Khintchine A., Zur metrischen Theorie der Diophantischen Aproximationen, Math. Zeitschr., 24, 1926 (707—714).
2. Khintchine a., Über eine Klasse linearer Diophantischer Aproximationen, Rend. Circ. mat. Palemo, 50, 1926 (170—195).
3. Mahler K., Über das Maß der Menge aller S-Zahlen, Math. Annal. 106, 1932 (131−139).
4. Кубилюс И. П., О применении метода акад. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел, ДАН СССР, 67, 1949 (783—786).
4. Kubilius J., Об одной метрической задаче теории диофантовых приближений, Liet. TSR Mokslų Akademijos Darbai, ser. B, 2(18), 1959 (3—7).
6. Bachmann P., Die Arithmetik der Quadratischen Formen, Leipzig, 1898.
7. Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, Москва, 1961.


# APIE A. CHINČINO IR J. KUBILIAUS TEOREMAS

V. SPRINDŽIUK


*(Reziumė)*

Tegul $\omega$ yra realus skaičius, $\|\omega\|=\min\limits_{(a)}|\omega-a|$, $a$ — sveikas. Nelygybių sistema

$$\max_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}\Big(\|\omega_i q\|,\ \|\omega_i\omega_j q\|\Big) < q^{-\frac{1}{m}-\delta},$$

kur

$$m=\frac{n(n+1)}{2}+n, \quad \delta>0 \text{ — bet kuris skaičius,}$$

beveik visiems realiems vektoriams $(\omega_1,\dots\ \omega_n)$ turi tik baigtinį sprendinių skaičių, kas įrodoma šiame straipsnyje.

# ON THE THEOREMS OF A. KHINTCHINE AND J. KUBILIUS

by V. SPRINDJUK


## (Summary)

Let $\omega$ be a real number, $\|\omega\| = \min\limits_{(a)} |\omega - a|$, $a$ — integer. The set of ine qualities

$$\max_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \left( \| \omega_i q \|, \| \omega_i \omega_j \| \right) < q^{-\frac{1}{m} - \delta}$$

where

$$m = \frac{n(n+1)}{2} + n, \quad \delta > 0 \text{ — any number,}$$

for almost all real vectors ($\omega_1$, $\omega_2$... $\omega$ ) has only a finite number of solutions what is proved in this paper.