II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Б. ГРИГЕЛИОНИС

1. Вещественную или комплексную функцию $f(m)$, определенную на множестве натуральных чисел, называем мультипликативной (аддитивной), если для всех пар взаимно простых натуральных чисел m, n

$$f(mn)=f(m)f(n) \quad [f(mn)=f(m)+f(n)].$$

Если, кроме этого, $f(p^\alpha)=f(p)$ для всех натуральных степеней p^α, $\alpha \geqslant 2$, простых чисел p, то функцию $f(m)$ называем сильно мультипликативной (сильно аддитивной).

В последнем случае имеем, что

$$f(m)=\prod_{p \backslash m} f(p) \quad \Big[f(m)=\sum_{p \backslash m} f(p)\Big].$$

Значит, и сильно мультипликативные, и сильно аддитивные функции достаточно задать только для простых чисел.

Значение как мультипликативных, так и аддитивных функций распределены весьма нерегулярно, так как они зависят, как видели, от мультипликативной структуры аргумента. В целом, оказывается, можно найти достаточно простые законы распределения этих значений. Для доказательства этих законов естественно пользоваться вероятностными методами, соответственно интерпретировав аксиоматику теории вероятностей. Вероятностные методы в теории чисел особенно развиты И. Кубилюсом [1], которым исследованы законы распределения значений широкого класса аддитивных функций и ряд других вопросов.

Законы распределения значений положительных мультипликативных функций $f(m)$ можно прямо получить, используя известные результаты для аддитивных функций, так как $\log f(m)$ есть аддитивная функция. Этого вообще нельзя сказать о неотрицательных мультипликативных функциях. В настоящей работе как раз и будет изучаться вопрос о распределении значений таких функций.

Если буквой Q обозначим множество натуральных чисел m, для которых $f(m)>0$, то фактически нам достаточно указать распределение значений функции $f(m)$, когда аргумент перебегает множество Q, ибо в остальном множестве натуральных чисел функция равна нулю. На множестве

Q можем изучать функцию $\log f(m)$, которая будет аддитивной. Итак, достаточно указать условия, при которых

$$\frac{N_n\left\{\frac{f(m)-A_n}{B_n}<x,\ m\in Q\right\}}{N_n\{m\in Q\}}$$

стремится к некоторому закону распределения при $n\to\infty$, где символ $N_n\{\ldots\}$ означает число натуральных чисел $m\leqslant n$, удовлетворяющих в скобках указанным условиям, A_n и B_n — некоторые константы, а $f(m)$ — аддитивная функция. Эта идея еще раньше была высказана И. Кубилюсом. Часто достаточно ограничиться изучением сильно аддитивных функций. Метод доказательства упомянутых выше законов разработан И. Кубилюсом, хотя основные леммы получены, вообще говоря, аналитическими методами.

2. Для рядов Дирихле доказываем одну общую теорему, которой часто придется пользоваться.

Теорема А. *Пусть числа a, T и x удовлетворяют условиям: $1<a\leqslant 2$, $T\geqslant 1$, $x\geqslant 3$ и последовательность чисел a_1, a_2, $\ldots$ ограничена, т. е:*

$$|a_n|\leqslant c_1 \qquad \text{для всех } n$$

(константа c_1 зависит только от последовательности $\{a_n\}$).

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}, \qquad s=\sigma+it,$$

абсолютно сходится в полуплоскости $\sigma>1$ и функция $f(s)$, выражаемая этим рядом, удовлетворяет соотношению:

$$\sum_{n\leqslant x} a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{x^s f(s)}{s}\,ds+R_T(x),$$

где

$$|R_T(x)|\leqslant 6{,}5\,c_1\left(\frac{x^a}{T(a-1)}+\frac{x\ln x}{T}+1\right).$$

Доказательство в основном следует по известной схеме [[3], стр. 69]. Мы его опускаем.

Придется пользоваться и другим результатом.

Теорема В. [[3], стр. 75]. *Если в полуплоскости $\sigma>a$ ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

сходится абсолютно и a_n является „вполне мультипликативной“ функцией, т. е. $a_{mn}=a_m a_n$ для всех пар натуральных чисел, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)^{-1},$$

где символ $\prod\limits_p$ обозначает произведение по всем простым числам.

Бесконечное произведение абсолютно сходится при $\sigma>a$.

Перейдем к доказательству основных лемм.

3. В дальнейшем будем употреблять обозначения:

P_1 – множество простых чисел p, принадлежащих l классам вычетов по модулю k, взаимно простых с k, т. е.

$$\begin{cases} p \equiv l_\nu \pmod{k}, & \nu = 1, \ldots, l, \\ (l_\nu, k) = 1; \end{cases}$$

P_2 – конечный набор простых чисел p, $p \bar{\in} P_1$;

$P = P_1 \cup P_2$ – множественная сумма P_1 и P_2;

Q_1 – множество натуральных чисел m, все простые делители которых принадлежат множеству P_1;

Q – множество натуральных чисел m, все простые делители которых принадлежат множеству P;

$h = \varphi(k)$, где $\varphi(m)$ – функция Эйлера;

$$a = 1 + \frac{1}{\ln n}, \quad T = \exp\left\{\frac{\ln x}{\ln r}\right\}, \quad r = r(x) = \exp\left\{\frac{c_2 \ln x}{\ln \ln x}\right\},$$

где c_2 – достаточно малая положительная константа.

Лемма 1. *Пусть $M_1(x)$ – число натуральных чисел $m \leqslant x$, $m \in Q_1$. Тогда*

$$M_1(x) = \frac{B_0 x}{(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right),$$

где

$$B_0 = \lim_{s \to 1+0} \frac{\prod\limits_{p}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\frac{l}{h}}}{\Gamma\left(\frac{l}{h}\right)\prod\limits_{p \in P_1}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)},$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\zeta_1(s) = \sum_{n \in Q_1} \frac{1}{n^s} \qquad (\sigma > 1).$$

Пользуяс теоремами A и B, можем написать, что

$$\zeta_1(s) = \prod_{p \in P_1}\left(1 - \frac{1}{n^s}\right)^{-1}.$$

Сначала исследуем случай, когда $l < h$.

Пусть $\chi(m)$ – характер по модулю k, $\chi_0(m)$ – главный характер по модулю k. Возьмем L – функцию Дирихле, соответствующую характеру χ:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p}\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \qquad (\sigma > 1).$$

Имеем

$$L(s, \chi) = \exp\left\{\sum_{p} \frac{\chi(p)}{p^s}\right\} \exp\left\{-\sum_{p}\left[\ln\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) + \frac{\chi(p)}{p^s}\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{p} \frac{\chi(p)}{p^s}\right\} R(s, \chi), \tag{3.1}$$

где

$$R(s, \chi) = \exp\left\{-\sum_{p}\left[\ln\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) + \frac{\chi(p)}{p^s}\right]\right\}.$$

Пользуясь тем, что $\chi(l_\nu)\neq 0$, ибо $(l_\nu,\ k)=1$, известным свойством характеров:

$$\sum_{(\chi)} \frac{\chi(p)}{\chi(l_\nu)} = \begin{cases} h, & \text{когда} \quad p\equiv l_\nu \,(\mathrm{mod}\, k), \\ 0, & \text{когда} \quad p\not\equiv l_\nu \,(\mathrm{mod}\, k), \end{cases}$$

где символ $\sum\limits_{(\chi)}$ означает суммирование по всем различным характерам по модулю k, и тем что

$$\chi_0(m) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad (m,\ k)>1 \\ 1 & \text{при} \quad (m,\ k)=1, \end{cases}$$

после очевидных преобразований из (3.1) получаем:

$$\ln L(s,\ \chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + \ln R(s,\ \chi),$$

$$\sum_{(\chi)} \frac{1}{\chi(l_\nu)} \ln L(s,\ \chi) = h \sum_{p\equiv l_\nu (\mathrm{mod}\, k)} \frac{1}{p^s} + \sum_{(\chi)} \frac{1}{\chi(l_\nu)} \ln R(s,\ \chi),$$

$$\sum_{(\chi)} \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{\chi(l_\nu)} \ln L(s,\ \chi) = h \sum_{p\in P_1} \frac{1}{p^s} + \sum_{(\chi)} \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{\chi(l_\nu)} \ln R(s,\ \chi),$$

$$\exp\left\{ h \sum_{p\in P_1} \frac{1}{p^s} \right\} = \prod_{\chi\neq\chi_0} \left(L(s,\ \chi)\right)^{a(\chi)} \left(L(s,\ \chi_0)\right)^l \prod_{(\chi)} \left(R(s,\ \chi)\right)^{-a(\chi)} =$$

$$= \left(\zeta(s)\right)^l \prod_{\chi\neq\chi_0} \left(L(s,\ \chi)\right)^{a(\chi)} \prod_{p\backslash k} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^l \prod_{(\chi)} \left(R(s,\ \chi)\right)^{-a(\chi)}, \tag{3.2}$$

где

$$a(\chi) = \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{\chi(l_\nu)}.$$

Здесь $\zeta(s)-\zeta$ – функция Римана. По определению везде считаем, что

$$z^s = \exp\{ s \ln z \},$$

где выбирается главная ветвь логарифма, т. е. если $z=re^{i\varphi}$, то

$$\ln z = \ln r + i\varphi, \quad 0\leqslant \varphi < 2\pi.$$

При $\sigma>1$ имеем:

$$\zeta_1(s) = \exp\left\{ \sum_{p\in P_1} \frac{1}{p^s} \right\} \exp\left\{ -\sum_{p\in P_1} \left[\ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right) + \frac{1}{p^s} \right] \right\}.$$

Используя соотношения (3.2) и (3.1), получаем:

$$\left(\zeta_1(s)\right)^h = \left(\zeta(s)\right)^l \prod_{\chi\neq\chi_0} \left(L(s,\ \chi)\right)^{a(\chi)} R(s), \tag{3.3}$$

где

$$R(s) = \prod_{p\backslash k} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^l \prod_{(\chi)} \left(R(s,\ \chi)\right)^{-a(\chi)} \exp\left\{ -h \sum_{p\in P_1} \left[\ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right) + \frac{1}{p^s} \right] \right\} =$$

$$= \prod_{p\backslash k} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^l \exp\left\{ \sum_{(\chi)} \sum_p \ln\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{a(\chi)} - h \sum_{p\in P_1} \ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right) \right\}. \tag{3.4}$$

Из соотношения (3.4) видно, что при $\sigma>\frac{1}{2}$

$$|R(s)| \ll 1 \quad \text{и} \quad R(s)\neq 0. \tag{3.5}$$

Действительно,

$$\sum_{(\chi)} \sum_{p} \ln\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{a(\chi)} - h\sum_{p\in P_1} \ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right) =$$

$$= \sum_{(\chi)} \sum_{p} \left[-\frac{\chi(p)}{p^s} + O\left(\frac{1}{p^{2\sigma}}\right)\right] \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{\chi(l_\nu)} - h\sum_{p\in P_1}\left[-\frac{1}{p^s}+O\left(\frac{1}{p^{2\sigma}}\right)\right] =$$

$$= -h\sum_{p\in P_1}\frac{1}{p^s} + O\left(\sum_{p}\frac{1}{p^{2\sigma}}\right) + h\sum_{p\in P_1}\frac{1}{p^s} + O\left(\sum_{p\in P_1}\frac{1}{p^{2\sigma}}\right) = O(1).$$

Из соотношения (3.3) следует, что

$$\zeta_1(s) = \sqrt[h]{(\zeta(s))^l \prod_{\chi\neq\chi_0}(L(s,\chi))^{a(\chi)} R(s)}. \tag{3.6}$$

С помощью равенства (3.6) функцию $\zeta_1(s)$ определяем в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$.

В дальнейшем придется пользоваться некоторыми результатами теории L – функций Дирихле [3—5]. Известно, что $L(s,\chi)$, когда $\chi\neq\chi_0$, является целой функцией; $\zeta(s)$ регулярна во всей плоскости, исключая точку $s=1$, в которой она имеет простой полюс, $\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta(s)=1$. Существует константа A_1, зависящая только от k, такая, что в области $\sigma\geqslant 1-\frac{A_1}{\ln|t|}$, $|t|\geqslant t_0$, где t_0 – достаточно большая константа, имеют место оценки:

$$\begin{aligned} &1)\quad \zeta(s)=O(\ln|t|),\\ &2)\quad L(s,\chi)=O(\ln|t|),\\ &3)\quad \frac{1}{L(s,\chi)}=O(\ln|t|). \end{aligned} \tag{3.7}$$

В указанной области, а также в области $\sigma\geqslant A_2$, $|t|\leqslant t_0$, где $A_2<1$ – константа, зависящая только от k, функции $L(s,\chi)$ не имеют нулей. Из (3.6) тогда следует, что в указанных областях, исключая точку $s=1$, функция $\zeta_1(s)$ регулярна.

Из всего сказанного следует, что в окрестности точки $s=1$

$$\zeta_1(s) = \sqrt[h]{(s-1)^{-l}}\ \sqrt[h]{[(s-1)\zeta(s)]^l \prod_{\chi\neq\chi_0}(L(s,\chi))^{a(\chi)} R(s)} =$$

$$= \frac{A_0}{\sqrt[h]{(s-1)^l}} + R^*(s)(s-1)^{1-\frac{l}{h}}, \tag{3.8}$$

где $|R^*(s)|\leqslant 1$, а $A_0=\lim\limits_{s\to 1}\sqrt[h]{\prod_{\chi\neq\chi_0}(L(s,\chi))^{a(\chi)} R(s)}$. По выше сказанному подрадикальная функция в окрестности точки $s=1$ регулярна, так что последний предел существует. Из соотношений (3.1) и (3.4) следует, что при $\sigma > 1$

$$\prod_{\chi \neq \chi_0} \left(L(s, \chi)\right)^{a(\chi)} R(s) = \prod_{\chi \neq \chi_0} \exp\left\{-\sum_p \ln\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{\chi(l_\nu)}\right\} \times$$

$$\times \prod_{p \backslash k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^l \prod_{(\chi)} \exp\left\{\sum_p \ln\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{\chi(l_\nu)}\right\} \exp\left\{-h \sum_{p \in P_1} \ln\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right\} =$$

$$= \prod_{p \backslash k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^l \exp\left\{l \sum_p \ln\left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}\right) - h \sum_{p \in P_1} \ln\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right\} = \frac{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^l}{\prod_{p \in P_1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^h}.$$

Итак,

$$A_0 = \lim_{s \to 1+0} \frac{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\frac{l}{h}}}{\prod_{p \in P_1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}. \tag{3.9}$$

Из равенства (3.8) видно, что функция $\zeta_1(s)$ в точке $s = 1$ имеет алгебраическую точку разветвления конечного порядка. Плоскость „разрежем" вдоль отрицательной действительной оси, начиная с точки $s = 1$. В „разрезанной" плоскости по определению изучаем главную ветвь радикала (3.6), т. е. если подрадикальное выражение действительно и положительно, то таким считаем и радикал. В выше упомянутой области регулярности функция $\zeta_1(s)$ будет однозначной. К ней применяя теорему А, получаем:

$$M_1(x) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in Q_1}} 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{x^s}{s} \zeta_1(s)\, ds + R_1(x) = I(x) + R_1(x),$$

где

$$|R_1(x)| \ll \frac{x \ln x}{T}. \tag{3.10}$$

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру L

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{x^s}{s} \zeta_1(s)\, ds,$$

где

$$L = \sum_{j=1}^{10} L_j,$$

L_1 — отрезок, соединяющий точки $1 - \frac{1}{\ln r} + iT$ и $a + iT$,

L_2 — „ „ „ $1 - \frac{1}{\ln r} + it_0$ и $1 - \frac{1}{\ln r} + iT$,

L_3 — „ „ „ $\left(1 - \frac{1}{\ln r}\right) e^{i0}$ и $1 - \frac{1}{\ln r} + it_0$,

L_4 — „ „ „ $\left(1 - \frac{1}{\ln r}\right) e^{i0}$ и $(1 - \varepsilon) e^{i0}$,

L_5 – окружность достаточно малого радиуса ε с центром в точке $s=1$;

L_6, L_7, L_8, L_9 – отрезки, симметричные относительно действительной оси соответственно отрезкам L_4, L_3, L_2, L_1;

L_{10} – отрезок, соединяющий точки $a-iT$ и $a+iT$.

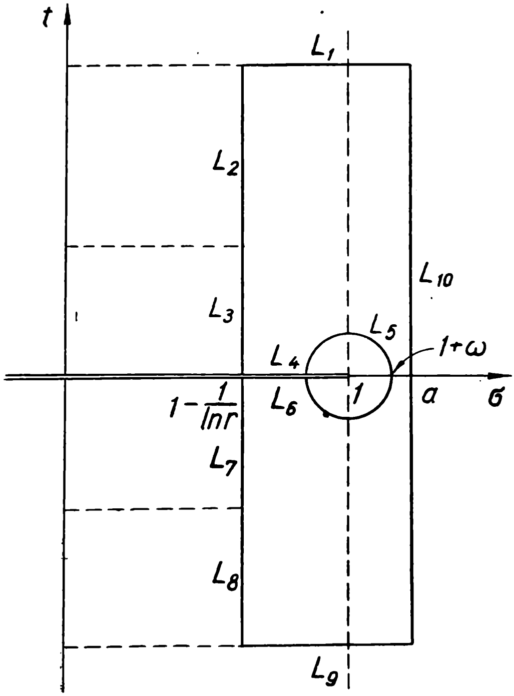

Рис. 1.

Для достаточно большого x имеем;

$$1-\frac{A_1}{\ln T}=1-\frac{A_1 \ln r}{\ln x}<1-\frac{1}{\ln r}, \quad 1-\frac{1}{\ln r}>A_2.$$

Значит, тогда весь контур L входит в область регулярности функции $\zeta_1(s)$. Применяя интегральную теорему Коши [6], получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{x^s}{s}\zeta_1(s)\,ds=0.$$

Имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-iT}^{a+iT}\frac{x^s}{s}\zeta_1(s)\,ds=\sum_{j=1}^{9}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_j}\frac{x^s}{s}\zeta_1(s)\,ds=\sum_{j=1}^{9}I(L_j), \tag{3.11}$$

где контур $L-L_{10}$ обходится по часовой стрелке. Ясно, что

$$|I(L_1)|=|I(L_9)|\leqslant\int\limits_{1-\frac{1}{\ln r}}^{1+\frac{1}{\ln x}}\frac{x^{\sigma}}{T}\ln^l T\,d\sigma\leqslant\frac{x\ln^l T}{T\ln x},\tag{3.12}$$

ибо

$$\left|\left(L(s,\ \chi)\right)^{a(\chi)}\right|=|L(s,\ \chi)|^{\operatorname{Re}a(\chi)}\exp\{-\arg L(s,\ \chi)\operatorname{Im}a(\chi)\}\leqslant\ln^l t.$$

Далее

$$|I(L_2)|=|I(L_8)|\leqslant\int\limits_{t_0}^{T}\frac{x^{1-\frac{1}{\ln r}}\ln^l t}{t}\,dt\leqslant x^{1-\frac{1}{\ln r}}\ln^{l+1}T,$$

$$|I(L_3)|=|I(L_7)|\leqslant\int\limits_{0}^{t_0}x^{1-\frac{1}{\ln r}}|\zeta(s)|^{\frac{l}{h}}\,ds\leqslant x^{1-\frac{1}{\ln r}}\ln r.\tag{3.13}$$

При оценке последних интегралов пользовались тем, что в окрестности точки $s=1$ имеет место соотношение:

$$\zeta(s)=O\left(\frac{1}{|s-1|}\right).\tag{3.14}$$

Ясно, что

$$I(L_4)=-e^{\frac{2\pi il}{h}}I(L_6),\tag{3.15}$$

ибо подинтегральные функции отличаются лишь на множитель $e^{\frac{2\pi il}{h}}$ (в интеграле $I(L_6)$ значения функции $\zeta_1(s)$ надо брать следующей ветви), и, кроме того, направления пути интегрирования противоположны.

Из соотношения (3.8) имеем:

$$I(L_4)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\varepsilon}^{1-\frac{1}{\ln r}}\frac{A_0x^s}{s\sqrt[h]{(s-1)^l}}\,ds+O\left(\left|\int\limits_{1-\varepsilon}^{1-\frac{1}{\ln r}}\frac{x^s}{s}(1-s)^{1-\frac{l}{h}}\,ds\right|\right).\tag{3.16}$$

Полагая $u=(1-s)\ln x$, получаем, что

$$I=\int\limits_{1-\varepsilon}^{1-\frac{1}{\ln r}}\frac{x^s\,ds}{s\sqrt[h]{(1-s)^l}}=-\frac{x}{(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\int\limits_{\varepsilon\ln x}^{\frac{\ln x}{\ln r}}\frac{e^{-u}\,du}{\left(1-\frac{u}{\ln x}\right)u^{\frac{l}{h}}}=$$

$$=-\frac{x}{(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\left[\Gamma\left(1-\frac{l}{h}\right)-\int\limits_{0}^{\varepsilon\ln x}u^{-\frac{l}{h}}e^{-u}\,du-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\frac{\ln x}{\ln r}}^{\infty}u^{-\frac{l}{h}}e^{-u}\,du+\frac{1}{\ln x}\int\limits_{\varepsilon\ln x}^{\frac{\ln x}{\ln r}}\frac{e^{-u}u^{1-\frac{l}{h}}}{1-\frac{u}{\ln x}}\,du\right]=$$

$$=-\frac{x\Gamma\left(1-\frac{l}{h}\right)}{(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\left[1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right]\quad\text{при}\quad c_2\leqslant\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\varepsilon\leqslant\frac{1}{[\ln x]^{h+1}}.\tag{3.17}$$

Действительно

$$\int_0^{\varepsilon \ln x} u^{-\frac{l}{h}} e^{-u} du \ll (\varepsilon \ln x)^{1-\frac{l}{h}} \ll \frac{1}{\ln x},$$

$$\int_{\frac{\ln x}{\ln r}}^{\infty} u^{-\frac{l}{h}} e^{-u} du = \int_{\frac{1}{c_2}\ln\ln x}^{\infty} u^{-\frac{l}{h}} e^{-u} du \ll e^{-\frac{1}{2c_2}\ln\ln x} \int_{\frac{1}{c_2}\ln\ln x}^{\infty} u^{-\frac{l}{h}} e^{-\frac{\mu}{2}} du \ll \frac{1}{\ln x},$$

$$\int_{\varepsilon \ln x}^{\frac{\ln x}{\ln r}} \frac{e^{-u} u^{1-\frac{l}{h}}}{1-\frac{u}{\ln x}} du \ll 1.$$

Аналогично вычисляем интеграл

$$\int_{1-\varepsilon}^{1-\frac{1}{\ln r}} \frac{x^s}{s}(1-s)^{q-\frac{l}{h}} ds = -\frac{x\Gamma\left(1+q-\frac{l}{h}\right)}{(\ln x)^{q-\frac{l}{h}+1}}\left(1+O\left(\frac{q}{\ln x}\right)\right), \tag{3.18}$$

где $q>0$.

Из соотношений (3.16) и (3.17) следует, что

$$I(L_4) = -\frac{A_0 e^{-\frac{\pi l i}{h}} x\Gamma\left(1-\frac{l}{h}\right)}{2\pi i(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right). \tag{3.19}$$

Тогда из равенств (3.15) и (3.19) получаем:

$$I(L_4)+I(L_6) = \frac{A_0 x\Gamma\left(1-\frac{l}{h}\right)}{\pi(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\left(\frac{e^{\frac{\pi l i}{h}}-e^{-\frac{\pi l i}{h}}}{2i}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)=$$

$$= \frac{A_0 x\Gamma\left(1-\frac{l}{h}\right)\sin\frac{\pi l}{h}}{\pi(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) = \frac{A_0 x}{\Gamma\left(\frac{l}{h}\right)(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right), \tag{3.20}$$

ибо $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$.

Наконец, оцениваем интеграл $I(L_5)$:

$$|I(L_5)| \ll \left|\int_{L_5} x|\zeta(s)|^{\frac{l}{h}} ds\right| \ll x\varepsilon^{1-\frac{l}{h}} \ll x^{1-\frac{1}{\ln r}} \tag{3.21}$$

при $\varepsilon \leqslant x^{-\frac{h}{\ln r}}$.

Сопоставляя соотношения (3.10)–(3.13), (3.20) и (3.21), получаем, что

$$M_1(x)=\frac{A_0 x}{\Gamma\left(\frac{l}{h}\right)(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)+R_2(x), \tag{3.22}$$

где

$$|R_2(x)|\ll\frac{x\ln x}{T}+\frac{x\ln^l T}{T\ln x}+x^{1-\frac{1}{\ln r}}\ln^{l+1}T+x^{1-\frac{1}{\ln r}}\ln r\ll$$

$$\ll x^{1-\frac{1}{\ln r}}\ln x\ll\frac{x}{\ln^2 x}(\ln x)^{3-\frac{1}{c_2}}\ll\frac{x}{\ln^2 x} \tag{3.23}$$

при $c_2\leqslant\frac{1}{3}$.

Из соотношений (3.22) и (3.23) имеем, что

$$M_1(x)=\frac{B_0 x}{(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right),$$

где

$$B_0=\frac{A_0}{\Gamma\left(\frac{l}{h}\right)}.$$

В случае, когда $l=h$, т. е. когда множеству P_1 не принадлежит лишь, может быть, конечное число простых чисел, имеем, что

$$\zeta_1(s)=\zeta(s)\prod_{p\,\bar{\in}\,P_1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right).$$

Эта функция регулярна и однозначна во всей плоскости, исключая точку $s=1$, в которой она имеет простой полюс:

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_1(s)=\prod_{p\,\bar{\in}\,P_1}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Пользуясь теорией вычетов [6], имеем:

$$I(L_5)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_5}\frac{x^s\zeta_1(s)}{s}\,ds=x\prod_{p\,\bar{\in}\,P_1}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Из однозначности функции $\zeta_1(s)$ следует, что

$$I(L_4)+I(L_6)=0.$$

Оценка других интегралов остается та же самая. Тогда

$$M_1(x)=B_0x+O\left(x^{1-\frac{1}{\ln r}}\ln x\right)=B_0x\left[1+O\left((\ln x)^{1-\frac{1}{c_2}}\right)\right],\qquad c_2\leqslant\frac{1}{2}.$$

Действительно, в этом случае

$$B_0=\frac{A_0}{\Gamma(1)}=\lim_{s\to 1+0}\frac{\prod\limits_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}{\prod\limits_{p\in P_1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}=\prod_{p\,\bar{\in}\,P_1}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Лемма 1 доказана полностью.

Лемма 2. *Пусть* $M_2(x)$ — *число натуральных чисел* m, $m \leqslant x$, $m \in Q_1$, *удовлетворяющих условиям:*

$$\begin{cases} m \equiv 0 \pmod{b}, & b \in Q_1,\ b \leqslant \beta_1(x), \\ m \not\equiv 0 \pmod{bp}, & p \in \mathfrak{P} \subset P_1, \end{cases}$$

где $\beta_1(x)$ — *положительная функция*, $\ln \beta_1(x) = o(\ln x)$, $\mathfrak{P}$ — *любой набор простых чисел* $p \in P_1$, $p \leqslant r$. *Тогда*

$$M_2(x) = \frac{B_0 x}{b (\ln x)^{1-\frac{l}{h}}} \prod_{p \in \mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + O\left(\frac{\ln \beta_1 + \ln r}{\ln x}\right)\right).$$

Доказательство. Изучаем функцию

$$\zeta_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad (\sigma > 1),$$

где

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{когда } n \in Q_1, \quad \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{b} \\ n \not\equiv 0 \pmod{pb}, \ p \in \mathfrak{P}, \end{cases} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пользуясь теоремами A и B, можем написать, что

$$\zeta_2(s) = \frac{\zeta_1(s)}{b^s} \prod_{p \in \mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \tag{3.24}$$

С помощью равенства (3.24) функцию $\zeta_2(s)$ аналитически продолжаем на всю область регулярности функции $\zeta_1(s)$ и опять применяем теорему A и контурное интегрирование. На контуре интегрирования имеем оценки:

$$\left| \frac{1}{b^s} \right| \ll \frac{b^{\frac{1}{\ln r}}}{b}, \quad \left| \prod_{p \in \mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right| \ll \exp\left\{ \sum_{p \leqslant r} \frac{1}{p^{1 - \frac{1}{\ln r}}} \right\} \ll \ln^3 r, \tag{3.25}$$

ибо (см. [4], стр. 33)

$$\sum_{p \leqslant r} \frac{1}{p} = \ln \ln r + O(1).$$

Сначала рассмотрим случай, когда $l < h$. В окрестности точки $s = 1$ имеем:

$$\zeta_2(s) = \frac{1}{\sqrt[h]{(s-1)^l}} \left[A_0 + O(|1-s|)\right] \left\{ \prod_{p \in \mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left[\prod_{p \in \mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right]'_{s=s'} (s-1) \right\} \times$$

$$\times \frac{1}{b} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\ln b)^q}{q!} (1-s)^q, \tag{3.26}$$

где $|1 - s'| < \frac{1}{\ln r}$. При $1 \geqslant s \geqslant 1 - \frac{1}{\ln r}$, s — действительное,

$$\left[\prod_{p \in \mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right]' = \prod_{p \in \mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \sum_{p \in \mathfrak{P}} \frac{\ln p}{p^s} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \ll$$

$$\ll \prod_{p \in \mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{p \leqslant r} \frac{\ln p}{p} \ll \ln r \prod_{p \in \mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{3.27}$$

Из соотношений (3.26) и (3.27) получаем, что в окрестности точки $s=1$ на действительной оси

$$\zeta_2(s)=\frac{1}{b\sqrt[h]{(s-1)^l}}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(A_0+O(|1-s|)\right)[1+O(|1-s|\ln r)]\left(1+\right.$$

$$\left.+\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(\ln b)^q}{q!}(1-s)^q\right)=\frac{A_0}{b\sqrt[h]{(s-1)^l}}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{b}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{p}\right)O\left[\left(\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(\ln b)^q}{q!}|1-s|^{q-\frac{l}{h}}\right)(1+|1-s|\ln r)+|1-s|^{1-\frac{l}{h}}\ln r\right].$$

Пользуясь соотношениями (3.17) и (3.18), получим:

$$I(L_4)=-\frac{A_0e^{-\frac{\pi li}{h}}\Gamma\left(1-\frac{l}{h}\right)x}{2\pi i b(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)+$$

$$+O\left(\frac{x}{b}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left\{\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(\ln b)^q}{q!}\frac{\Gamma\left(1+q-\frac{l}{h}\right)}{(\ln x)^{1+q-\frac{l}{h}}}\left(1+O\left(\frac{q}{\ln x}\right)\right)+\frac{\ln r}{(\ln x)^{2-\frac{l}{h}}}\right\}\right)=$$

$$=-\frac{A_0e^{-\frac{\pi li}{h}}\Gamma\left(1-\frac{l}{h}\right)x}{2\pi i b(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)+$$

$$+O\left(\frac{x(\ln b+\ln r)}{b(\ln x)^{2-\frac{l}{h}}}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right),$$

ибо $\Gamma\left(1+q-\frac{l}{h}\right)\leqslant\Gamma(1+q)=q!$ и $\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{\ln b}{\ln x}\right)^q q\ll 1$ при $b\leqslant\beta_1$. Итак,

$$I(L_4)=-\frac{A_0e^{-\frac{\pi li}{h}}\Gamma\left(1-\frac{l}{h}\right)x}{2\pi i b(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+O\left(\frac{\ln\beta_1+\ln r}{\ln x}\right)\right),$$

$$I(L_4)+I(L_6)=\frac{B_0x}{b(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+O\left(\frac{\ln\beta_1+\ln r}{\ln x}\right)\right). \tag{3.28}$$

Из соотношений (3.25) и (3.28), а также ранее полученных оценок следует, что

$$M_2(x)=\frac{B_0x}{b(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+O\left(\frac{\ln\beta_1+\ln r}{\ln x}\right)\right)+R_3(x),$$

где

$$|R_3(x)|\leqslant|R_2(x)|\frac{b^{\frac{1}{\ln r}}}{b}\ln^3 r\ll\frac{x}{b}b^{\frac{1}{\ln r}}x^{-\frac{1}{\ln r}}\ln x\ln^3 r\ll$$

$$\ll\frac{x}{b}(\ln x)^{1-\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_2}\frac{\ln\beta_1}{\ln x}}\ln^3 r\ll\frac{x}{b\ln^3 x}\qquad\text{при } c_2\leqslant\frac{1}{12}\ \text{ и }\ \frac{\ln\beta_1(x)}{\ln x}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Значит,

$$M_2(x) = \frac{B_0 x}{b(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}} \prod_{p\in\mathfrak{P}} \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+O\left(\frac{\ln\beta_1+\ln r}{\ln x}\right)\right).$$

Случай, когда $l=h$, исследуется как и в лемме 1.

Имеем

$$I(L_4)=I(L_6)=0,$$

$$I(L_5)=\frac{B_0 x}{b}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

$$M_2(x)=\frac{B_0 x}{b}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)+O\left(\frac{x}{b}x^{-\frac{1}{\ln r}}\ln x b^{\frac{1}{\ln r}}\ln^3 r\right).$$

В последнем случае можем менее ограничить b. Именно, когда

$$b\leqslant\beta_2(x)=x^{1-5c_2},\qquad c_2<\frac{1}{5},$$

то

$$x^{-\frac{1}{\ln r}}\ln x b^{\frac{1}{\ln r}}\ln^3 r \ll x^{-\frac{1}{\ln r}}\ln x\ln^3 r\exp\left\{\frac{\ln\beta_2}{\ln r}\right\}\ll$$

$$\ll\frac{(\ln x)^{4-\frac{1}{c_2}}}{(\ln\ln x)^3}\exp\left\{\frac{1-5c_2}{c_2}\ln\ln x\right\}\ll\frac{1}{(\ln\ln x)^4\ln r}.$$

Итак, при $l=h$, $b\leqslant\beta_2$

$$M_2(x)=\frac{B_0 x}{b}\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{(\ln\ln x)^4}\right)\right].$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $p_0<\alpha\leqslant r$, $\beta_3>p_0$, $\ln\beta_3=o(\ln x)$, Q_2 — множество натуральных чисел m, все простые делители которых $p\in P_1$, $p\leqslant\alpha$ (p_0 — наименьшее простое число в множестве P_1), $M_3(x)$ — число натуральных чисел $m\leqslant x$, $m\in Q_1$, делящихся хотя бы на одно из чисел $d\in Q_2$, $d\geqslant\beta_3(x)$.*

Тогда

$$M_3(x)\ll\frac{x\ln\alpha}{(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}\ln\beta_3}.$$

Оценка, также как и в других леммах, зависит вообще только от k.

Доказательство. Пусть $\Theta(m)$ — наибольшее из чисел $d\in Q_2$, делящих m. Тогда ясно, что

$$\prod_{\substack{m\leqslant x\\ m\in Q_1}}\Theta(m)\geqslant\beta_3^{M_3(x)}. \tag{3.29}$$

С другой стороны

$$\prod_{\substack{m\leqslant x\\ m\in Q_1}}\Theta(m)=\prod_{\substack{p\leqslant\alpha\\ p\in P_1}}p^{\psi(p,x)}, \tag{3.30}$$

где $\psi(p, x)$ — p степень в каноническом разложении числа $\prod_{\substack{m\leqslant x\\ m\in Q_1}} m$. Пользуясь леммой 2, получаем, что

$$\psi(p,x)\ll\frac{x}{(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\ln\beta_1}{\ln p}\right]}\frac{1}{p^\nu}+x\sum_{\nu=\left[\frac{\ln\beta_1}{\ln p}\right]+1}^{\infty}\frac{1}{p^\nu}\ll\frac{x}{(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\frac{1}{p}+\frac{x}{\beta_1}. \tag{3.31}$$

Из соотношений (3.29) – (3.31) следует, что

$$\beta_3^{M_3(x)} \leqslant \prod_{\substack{m \leqslant x \\ m \in Q_1}} \Theta(m) \leqslant \prod_{\substack{p \leqslant \alpha \\ p \in P_1}} p^{\,o\left(\frac{x}{(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\frac{1}{p}+\frac{x}{\beta_1}\right)},$$

$$M_3(x)\ln\beta_3 \leqslant \frac{x}{(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}}\sum_{p\leqslant\alpha}\frac{\ln p}{p}+\frac{x}{\beta_1}\sum_{p\leqslant\alpha}\ln p.$$

Так как (см. [4], стр. 33)

$$\sum_{p\leqslant\alpha}\frac{\ln p}{p}\leqslant\ln\alpha, \qquad \sum_{p\leqslant\alpha}\ln p\leqslant\alpha,$$

то

$$M_3(x)\leqslant\frac{x\ln\alpha}{(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}\ln\beta_3}+\frac{x\alpha}{\beta_1\ln\beta_3}\leqslant\frac{x\ln\alpha}{(\ln x)^{1-\frac{l}{h}}\ln\beta_3},$$

что и требовалось доказать.

Замечания. 1) Доказательство лемм в сущности не изменится, если множества P_1 и Q_1 заменить множествами P и соответственно Q. В результате константу B_0 придется заменить константой

$$B_0'=B_0\prod_{p\in P_1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

2) Лемма 1 является уточнением одного результата Э. Ландау [7].

4. В этом пункте будем изучать сильно аддитивные функции $f(m)$, определенные на множестве Q. Имеем

$$f(m)=\sum_{p\backslash m}f(p).$$

Обозначим

$$f^{(p)}(m)=\begin{cases} f(p), & \text{если } p\backslash m,\\ 0, & \text{если } p\times m.\end{cases}$$

Тогда

$$f(m)=\sum_{p}f^{(p)}(m).$$

Как увидим ниже, часто достаточно знать законы распределения значений так называемых „урезанных“ функций, т. е. функций, определяемых равенством:

$$f_r(m)=\sum_{p\leqslant r}f^{(p)}(m).$$

Вопрос нахождения законов распределения значений последних же функций, используя в 3 пункте доказанные леммы и рассуждая в сущности по той же схеме, что и при доказательстве соответствующих теорем И. Кубилюса [см. [1], § 4], сводится к определению законов распределения сумм довольно простых независимых случайных величин. А именно, показываем, что

$$\frac{N_n\left\{\frac{f_r(m)-A_r}{B_n}<x,\ m\in Q\right\}}{N_n\{m\in Q\}}=F_{nr}(x)+o(1).$$

где

$$A_n = \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in P}} \frac{f(p)}{p}, \qquad B_n^2 = \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in P}} \frac{f^2(p)}{p}, \tag{4.1}$$

$F_{nr}(x)$ – функция распределения суммы независимых случайных величин

$$\sum_{\substack{p \leqslant r \\ p \in P}} \zeta_{rp}, \tag{4.2}$$

ζ_{rp} – случайные величины, т. е. измеримые функции относительно некоторого вероятностного поля, которого мы сконструируем ниже, принимающие значения $\frac{f(p)}{B_n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ с вероятностью $\frac{1}{p}$, и $-\frac{f(p)}{B_n}\frac{1}{p}$ с вероятностью $1 - \frac{1}{p}$.

Упомянутое поле конструируем следующим образом. Пусть Q – множество элементарных событий; Q_p – множество натуральных чисел $m \in Q$, делящихся на p, $p \in P$; $\mathfrak{F}_k$ – наименьшее борелевское поле, включающее в себя множества Q и Q_p, $p \leqslant k$, $p \in P$, где k – фиксированное положительное число. Для всех множеств $A \in \mathfrak{F}_k$ вероятностную меру определяем следующим образом:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n\{m \in A \cap Q\}}{N_n\{m \in Q\}}.$$

Выбираем поле вероятностей в смысле аксиоматики Колмогорова $\{Q, \mathfrak{F}, P\}$, где $\mathfrak{F}$ – конечная система множеств $\mathfrak{F}_k$.

Легко убеждаемся, что все события $A \in \mathfrak{F}$ имеют вероятность и что выше упомянутые случайные величины являются измеримыми функциями относительно нами сконструированного поля. К величинам ζ_{rp} применяя известную теорему Б. В. Гнеденко $\left[[2], \text{ стр. } 107\right]$, мы и получаем требуемые результаты.

Скажем, что сильно аддитивная функция $f(m)$ принадлежит классу H_1, если:

1) $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$,

2) $B_n - B_r = o(B_n)$, $r = r(n) = \exp\left\{\frac{c_2 \ln n}{\ln \ln n}\right\}$.

По выше указанной схеме доказываем такое утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f(m) \in H_1$. Для того, чтобы выражение*

$$\frac{N_n\left\{\frac{f_r(m) - A_r}{B_n} < x, \quad m \in Q\right\}}{N_n\{m \in Q\}}$$

при $n \to \infty$ стремилось к некоторой функции распределения с дисперсией 1 во всех точках непрерывности, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неубывающая функция $K(u)$, что во всех точках непрерывности $K(u)$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{\substack{p \leqslant n \\ f(p) < uB_n \\ p \in P}} \frac{f^2(p)}{p} \to K(u) \qquad (n \to \infty).$$

Логарифм характеристической функции $\ln\varphi(t)$ *предельного закона вычисляется по формуле Колмогорова:*

$$\ln\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)\frac{1}{u^2}\,dK(u).$$

Отсюда сразу следует, что для того, чтобы предельный закон был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\tau>0$ при $n\to\infty$

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |f(p)|>\tau B_n\\ p\in P}}\frac{f^2(p)}{p}\to 0. \tag{4.3}$$

Это аналог условия Линдеберга. Для того, чтобы предельные законы распределения значений функций $f_r(m)$ и $f(m)$ совпадали, ясно, надо показать, что неравенство

$$\left|\left(f(m)-A_n\right)-\left(f_r(m)-A_r\right)\right|\geqslant o\,(B_n)$$

имеет место не более как для $o\left(\frac{n}{(\ln n)^{1-\frac{l}{h}}}\right)$ чисел $m\leqslant n,\ m\in Q$.

Возьмем подкласс H_2 класса H_1 таких функций, которые удовлетворяют условию:

$$\Lambda_n=o\left(\frac{B_n}{\ln\ln\ln n}\right),$$

где

$$\Lambda_n=\max_{\substack{p\leqslant n\\ p\in P}}|f(p)|.$$

Для функций из этого класса имеет место выше сформулированное утверждение. Для этого достаточно показать, что сумма

$$S=\sum_{\substack{m\leqslant n\\ m\in Q}}\left|\left(f(m)-A_n\right)-\left(f_r(m)-A_r\right)\right|\ll\frac{n\Lambda_n\ln\ln\ln n}{(\ln n)^{1-\frac{l}{h}}}.$$

Имеем

$$S=\sum_{\substack{m\leqslant n\\ m\in Q}}\left|\sum_{\substack{p\backslash m\\ r<p\leqslant n}}f(p)-\sum_{\substack{r<p\leqslant n\\ p\in P}}\frac{f(p)}{p}\right|\leqslant\sum_{\substack{m\leqslant n\\ m\in Q}}\left\{\sum_{\substack{p\backslash m\\ r<p\leqslant\beta_1}}|f(p)|+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{p\backslash m\\ \beta_1<p\leqslant n}}|f(p)|+\sum_{\substack{r<p\leqslant n\\ p\in P}}\frac{|f(p)|}{p}\right\}. \tag{4.4}$$

Пользуясь 2 леммой, в которой выбираем $\beta_1(n)=\exp\left\{\frac{\ln n}{\ln\ln\ln n}\right\}$ и тем, что число простых чисел $p>\beta_1(n)$, делящих $m\leqslant n$, не больше $\frac{\ln n}{\ln\beta_1(n)}$, из соотношения (4.4) получаем:

$$S\ll\frac{n\Lambda_n}{(\ln n)^{1-\frac{l}{h}}}\sum_{r<p\leqslant\beta_1}\frac{1}{p}+\frac{n\Lambda_n}{(\ln n)^{1-\frac{l}{h}}}\frac{\ln n}{\ln\beta_1}+\frac{n\Lambda_n}{(\ln n)^{1-\frac{l}{h}}}\sum_{r<p\leqslant n}\frac{1}{p}\ll\frac{n\Lambda_n\ln\ln\ln n}{(\ln n)^{1-\frac{l}{h}}},$$

что и требовалось доказать.

Из условия (4.3) следует, что асимптотическое распределение значений функций, принадлежащих классу H_2, нормально.

Итак, имеет место

Теорема 2. *Пусть* $f(m) \in H_2$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{N_n\left\{\frac{f(m)-A_n}{B_n} < x, \quad m \in Q\right\}}{N_n\{m \in Q\}} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x).$$

Для этих функций можно доказать и некоторые другие теоремы, аналогичные известным теоремам И. Кубилюса.

5. Далее будем изучать сильно мультипликативные функции, определенные на множестве Q; $f(m) > 0$, $m \in Q$.

Обозначим

$$A_n^* = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in P}} \frac{\log f(p)}{p}, \qquad B_n^* = \left\{\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in P}} \frac{\log^2 f(p)}{p}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Скажем, что функция $f(m)$ принадлежит классу H_2^*, если $\log f(m) \in H_2$, т. е. если $f(m)$ удовлетворяет условию:

$$\Lambda_n^* = o\left(\frac{B_n^*}{\ln \ln \ln n}\right),$$

где

$$\Lambda_n^* = \max_{\substack{p \leq n \\ p \in P}} |\log f(p)|.$$

Из теоремы 2 следует такое утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $f(m) \in H_2^*$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{N_n\left\{\frac{\log f(m)-A_n^*}{B_n^*} < x, \quad m \in Q\right\}}{N_n\{m \in Q\}} \to \Phi(x).$$

Рассмотрим пример. Пусть $W(m)$ — число решений целыми числами уравнения

$$m = x^2 + y^2.$$

Функция $V(m) = \frac{1}{4} W(m)$ является мультипликативной и имеет вид:

$$V(p^\alpha) = \begin{cases} \alpha+1 & \text{при} \quad p \equiv 1 \pmod 4, \\ 1 & \text{при} \quad p = 2, \\ 0 & \text{при} \quad p \equiv -1 \pmod 4, \quad \alpha \text{ — нечетное}, \\ 1 & \text{при} \quad p \equiv -1 \pmod 4, \quad \alpha \text{ — четное}. \end{cases}$$

Известно $\left[[1],\ 4\ \S\right]$, что, когда $B_n \to \infty$, предельный закон распределения значений аддитивной функции $f(m)$ совпадает с асимптотическим законом распределения значений сильно аддитивной функции $f^*(m)$, определяемой равенством

$$f^*(p^\alpha) = f(p) \qquad \text{для всех} \quad p \quad \text{и} \quad \alpha = 1, 2, \ldots .$$

То же можно сказать и о неотрицательных мультипликативных функциях.

В нашем случае достаточно изучить функцию

$$V^*(p) = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad p \equiv 1 \pmod 4, \\ 1 & \text{при} \quad p = 2, \\ 0 & \text{при} \quad p \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

Выбираем P_1 — множество простых чисел вида $p \equiv 1 \pmod 4$, $P_2 = \{2\}$, а Q — множество натуральных чисел, делящихся только на простые числа $p \in P_1 \cup P_2$. Имеем

$$h = \varphi(4) = 2, \quad l = 1,$$

$$A_n^* = \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \equiv 1 \pmod 4}} \frac{\log 2}{p} \sim \frac{\log 2}{2} \ln \ln n,$$

$$(B_n^*)^2 = \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \equiv 1 \pmod 4}} \frac{\log^2 2}{p} \sim \frac{\log^2 2}{2} \ln \ln n.$$

Ясно, что $V^*(m) \in H_2^*$.

Выбрав основание логарифмов 2, применив теорему 3 и выше сделанные замечания, имеем при $n \to \infty$

$$\frac{N_n\left\{ \dfrac{\log V(m) - \frac{1}{2} \ln \ln n}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln \ln n}} < x, \quad m \in Q \right\}}{N_n\{m \in Q\}} \to \Phi(x).$$

Применяя последнее соотношение и лемму 1, находим:

$$\frac{1}{n} N_n \left\{ V(m) < 2^{x \sqrt{\frac{1}{2} \ln \ln n} + \frac{1}{2} \ln \ln n} \right\} =$$

$$= \frac{1}{n} N_n\{V(m) = 0\} + \frac{1}{n} N_n \left\{ \frac{\log V(m) - \frac{1}{2} \ln \ln n}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln \ln n}} < x, \quad m \in Q \right\} =$$

$$= 1 - \left(1 - \Phi(x)\right) \frac{B_0}{\sqrt{\ln n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right),$$

где

$$B_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{s \to 1+0} \frac{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{p \equiv 1 \pmod 4} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}.$$

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю профессору И. Кубилюсу за предложенную тему и ряд ценных указаний при выполнении этой работы.

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию 10.IV.1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1959.
2. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. Н. Г. Чудаков. Введение в теорию L-функций Дирихле, М.—Л., Гостехиздат, 1947.
4. А. Е. Ингам. Распределение простых чисел. М.—Л., ОНТИ, 1936.

5. Е. К. Тичмарш. Теория дзета-функции Римана. М., ИИЛ, 1953.
6. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
7. E. Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 2, Leipzig, Teubner, 1909 (p. 641—669).

APIE MULTIPLIKATYVINIŲ FUNKCIJŲ REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMĄ

B. GRIGELIONIS

(Reziumė)

Funkciją $f(m)$, apibrėžtą natūrinių skaičių aibėje, vadiname multiplikatyvine, jeigu

$$f(mn)=f(m)f(n)$$

visoms reliatyviai pirminių skaičių poroms m, n.

Darbe nagrinėjamas tam tikros klasės neneigiamų multiplikatyvinių funkcijų reikšmių asimptotinis pasiskirstymas.

ON DISTRIBUTION OF VALUES OF MULTIPLICATIVE FUNCTIONS

B. GRIGELIONIS

(Summary)

A function $f(m)$, defined on the set of positive integers, is said to be multiplicative, if

$$f(mn)=f(m)f(n)$$

for every pair of relatively prime numbers m, n.

In the paper an asymptotic distribution of values of some class of nonnegative multiplicative functions is considered.