II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
1962

ОБ ОЦЕНКАХ ПАРАМЕТРОВ ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА СО СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ $|P(i\lambda)|^{-2}$

В. Ф. ПИСАРЕНКО

Введение

Рассмотрим гауссовский стационарный процесс ξ_t со спектральной плотностью $|2\pi P(i\lambda)|^{-2}$, где $P(i\lambda)=(i\lambda)^n+\sum_{k=0}^{n-1} p_k(i\lambda)^k$ — многочлен с вещественными коэффициентами, все корни которого лежат в верхней полуплоскости комплексного переменного λ. Предполагается, что $\mathbf{M}\xi_t=0$. По реализации процесса ξ_t на отрезке $[0, T]$ требуется дать оценку для параметра $p=(p_0p_1\ldots p_{n-1})$, $p\in P$, где P — ограниченная область в n-мерном пространстве, причем замыкание P целиком лежит внутри области возможных значений параметра p. Мы будем рассматривать оценки максимального правдоподобия для параметра p (см. [1], стр. 94), то есть оценки, получаемые из системы уравнений:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial p_k}\log\frac{d\mu_p}{d\mu}=0, \qquad k=\overline{0,\ n-1}, \tag{1}$$

где μ_p — мера, являющаяся продолжением конечномерных распределений на σ-алгебру цилиндрических множеств функций на $[0, T]$, причем индекс p указывает, что берутся конечномерные распределения процесса ξ_t с параметром p; μ — некоторая фиксированная мера (на той же σ-алгебре), относительно которой абсолютно непрерывны меры μ_p при всех $p\in P$; через $\frac{d\mu_p}{d\mu}$ обозначена производная меры μ_p по мере μ.

Мы покажем (§ 1), что при $T\to\infty$ у системы уравнений (1) с вероятностью сколь угодно близкой к 1 существует решение $\hat{p}_T$, которое является асимптотически нормальной (а.-н.) и асимптотически-эффективной (а.-э.) оценкой для p, причем асимптотика равномерна по всем $p\in P$. Асимптотическая эффективность оценки $\hat{p}_T$ понимается здесь в обычном смысле (см. [2], стр. 532): вектор $\sqrt{T}(\hat{p}_T-p)$ распределен асимптотически нормально со средним значением 0 и с матрицей ковариации, которая является обратной к пределу информационной матрицы Фишера:

$$J_p=\{J_p^{ij}\}_{ij=\overline{1,n}}=\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathbf{M}_p\frac{\partial\log\frac{d\mu_p}{d\mu}}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial\log\frac{d\mu_p}{d\mu}}{\partial p_j}\right\}_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Отсюда, конечно, как следствие неравенства Фреше-Крамера-Рао для семейства регулярных мер (см. [1], стр. 92) получается, что для любой регулярной несмещенной оценки p_T^* эллипсоид рассеяния вектора $\sqrt{T}(p_T^*-p)$ при больших T будет содержать эллипсоид рассеяния предельного нормального распределения вектора $\sqrt{T}(p_T-p)$.

В § 2 мы укажем, оценку $\tilde{p}_T$, которая так же, как и $\hat{p}_T$ будет а.-н. и а.-э. оценкой. Преимущество $\tilde{p}_T$ в том, что для ее нахождения нужны лишь n статистик, которые мы назвали „асимптотически-достаточными". Кроме того $\tilde{p}_T$ находится из системы линейных уравнений, в то время как система (1) является трансцендентной. Затем (§ 3) будет указан способ построения доверительных областей для параметра p. После этого (§ 4) рассматривается вопрос об оценке некоторой функции $f(p)$ от параметра. В заключение (§ 5) мы кратко сформулируем аналогичные результаты для процесса с дискретным временем.

§ 1. Оценка максимального правдоподобия для p

Как известно, для рассматриваемого нами процесса ξ_t при любом p можно выбрать эквивалентный процесс, у которого почти все реализации имеют на $[0, T]$ непрерывную $(n-1)$-ую производную. Будем считать, что ξ_t уже является таким процессом. Так как у многочлена $P(i\lambda)$ старший коэффициент равен 1, то мера μ_p при любом p будет абсолютно непрерывна по мере $\mu_{p'}$, где p' – некоторое фиксированное значение параметра, и поэтому меру $\mu_{p'}$ можно взять в качестве меры μ. Мы воспользуемся для $\frac{d\mu_p}{d\mu}$ выражением, взятым из работы [3], несколько видоизменив его (нестрогий вывод этого выражения можно найти в [6]):

$$\frac{d\mu_p}{d\mu}=K^{\frac{1}{2}}(p')\cdot K^{-\frac{1}{2}}(p)\cdot \exp\left\{(p_{n-1}-p'_{n-1})\frac{T}{2}-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(\pi_k-\pi'_k)\cdot\int_0^T(\xi_t^{(k)})^2\,dt+\right.\right.$$
$$\left.\left.+M(p)-M(p')\right]\right\}, \tag{2}$$

где $K(p)$ – определитель корреляционной матрицы

$$\{\mathbf{M}_p\,\xi_0^{(i)}\xi_0^{(j)}\}_{i,\,j=\overline{0,\,n-1}}\,; \qquad \pi_k=\sum_{j=-\infty}^{\infty}p_{k+j}p_{k-j}(-1)^j,$$

причем в этой сумме надо считать $p_n=1$ и $p_j=0$ при $j<0$ и $j>n$;

$$M(p)=\sum_{i,\,j=0}^{n-1}\left[(-1)^{(i)}\xi_T^{(i)}\xi_T^{(j)}+(-1)^j\xi_0^{(i)}\xi_0^{(j)}\right]\cdot\sum_{k=0}^{i}(-1)^k p_k p_{i+j-k+1}+$$
$$+\sum_{m=0}^{n-2}(-1)^m\sum_k q_{2k}\left(\xi_T^{(m)}\xi_T^{(2k-m-1)}-\xi_0^{(m)}\xi_0^{(2k-m-1)}\right),$$

причем внутренняя сумма последнего слагаемого $M(p)$ берется по $k:2(m+1)\leqslant 2k<(n+m+1)$ и через q_{2k} обозначен коэффициент при z^{2k} в многочлене $P(z)P(-z)$.

Доказательство наших утверждений аналогично классическому доказательству для независимых наблюдений и одного оцениваемого параметра (см. Крамер, [2], стр. 543).

Проверим условия регулярности семейства производных $\frac{d\mu_p}{d\mu}$, требуемые для доказательства наших утверждений. $\log\frac{d\mu_p}{d\mu}$ состоит из двух слагаемых: $1/2\log K(p')K^{-1}(p)$ и некоторой квадратичной формы от коэффициентов p_i. Функция $K(p)$ имеет в области P любое число непрерывных производных и, кроме того, $K(p)$ ограничена и $K(p)\geqslant\varepsilon>0$. В самом деле, элементы матрицы $K(p)$ имеют вид $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|p(i\lambda)|^{-2}\cdot\lambda^{2k}d\lambda$ и их можно дифференцировать сколь угодно раз по p_k. Кроме того, $K(p)$ не может вырождаться внутри области возможных значений p.

Поэтому $\log K(p)$ является гладкой ограниченной функцией в P. Второе слагаемое $\log\frac{d\mu_p}{d\mu}$ также является, как видно, из формулы (2), дифференцируемой сколь угодно раз функцией от p, причем все производные имеют конечное математическое ожидание.

Далее надо проверить невырожденность матрицы

$$\left\{\mathbf{M}_p\frac{\partial^2\log\frac{d\mu_p}{d\mu}}{\partial p_i\,\partial p_j}\right\}_{i,\,j=\overline{0,\,n-1}},\qquad p\in P.$$

Написанная матрица равна информационной матрице Фишера J_p^T, взятой со знаком минус. Условие невырожденности этой матрицы выполнено в нашем случае по крайней мере асимптотически при $T\to\infty$, чего нам достаточно. Покажем это. Используя формулу (2), с помощью прямых выкладок получаем, что

$$-\frac{1}{T}J_p^T=\left\{\frac{1}{T}\mathbf{M}_p\frac{\partial^2\log\frac{d\mu_p}{d\mu}}{\partial p_i\,\partial p_j}\right\}=\left\{-\frac{1}{2T}\cdot\frac{\partial^2\log K(p)}{\partial p_i\,\partial p_j}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial^2\pi_k}{\partial p_i\,\partial p_j}\cdot\mathbf{M}_p\frac{1}{T}\int\limits_0^T(\xi_t^{(k)})^2\,dt+M_p\frac{1}{T}\frac{\partial^2 M(p)}{\partial p_i\,\partial p_j}\right\}=$$

$$=\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial^2\pi_k}{\partial p_i\,\partial p_j}\cdot B_p^{(2k)}(0)\cdot(-1)^k+O\left(\frac{1}{T}\right)\right\}=\left\{-(-1)^i B_p^{(i+j)}(0)+O\left(\frac{1}{T}\right)\right\},$$

где $B_p(t)$ – корреляционная функция процесса ξ_t. Матрица $\{(-1)^i B_p^{(i+j)}(0)\}$ невырождена, так как она является корреляционной матрицей линейно-независимых случайных величин $\xi_0,\ \xi_0'\ldots\xi_0^{(n-1)}$. В самом деле, если бы с вероятностью 1 для некоторых $c_0\ldots c_{n-1}$ выполнялось равенство $\sum\limits_{j=0}^{n-1}c_j\xi_0^{(j)}=0$, то тогда мы имели бы:

$$0=M_p\Big(\sum_{j=0}^{n-1}c_j\,\xi_0^{(j)}\Big)^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\sum\limits_{j=0}^{n-1}c_j(i\lambda)^j\right|^2}{|p(i\lambda)|^2}\,d\lambda,$$

откуда следует, что $c_0 = \ldots = c_{n-1} = 0$. Это значит, что $\xi_0^{(i)}$ линейно-независимы.

Попутно мы нашли, что информационная матрица Фишера J_p^T, поделенная на T, стремится к $J_p = \{(-1)^i B_p^{(i+j)}(0)\}$.

При доказательстве наших утверждений понадобится тот факт, что случайные величины

$$\frac{1}{T}\frac{\partial \log \frac{d\mu_p}{d\mu}}{\partial p_i}, \quad \frac{1}{T}\frac{\partial^2 \log \frac{d\mu_p}{d\mu}}{\partial p_i \partial p_j}, \quad \frac{1}{T}\frac{\partial^3 \log \frac{d\mu_p}{d\mu}}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k}$$

сходятся по вероятности к своим математическим ожиданиям. Это следует из того, что процесс ξ_t и его производные являются эргодическими процессами (так как они гауссовские и имеют непрерывную спектральную функцию).

После сделанных замечаний доказательство существования со сколь угодно близкой к 1 вероятностью состоятельного решения $\hat{p}_T$ у системы уравнений (1) проводится так же, как в классическом случае.

Нам остается показать, что $\hat{p}_T$ будет а.-н. и а.-э. оценкой. Это будет следовать из того, что вектор $\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial \log \frac{d\mu_p}{d\mu}}{\partial p_i}\right\}_{i=\overline{0,\, n-1}}$ является а.-н. Составляющие этого вектора состоят из величин $-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial \pi_k}{\partial p_i}\cdot\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T (\xi_t^{(k)})^2\,dt$ и слагаемых, стремящихся к нулю по вероятности. Но вектор $\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T (\xi_t^{(k)})^2\,dt\right\}_{k=\overline{0,\, n-1}}$ распределен асимптотически нормально, что следует из результатов Ю. А. Розанова для аддитивных случайных функционалов (см. [4], стр. 243). Эти результаты применимы в нашем случае, так как коэффициент сильного перемешивания процесса ξ_t убывает экспоненциально (см. [5]) и ковариации величин $\int_0^T (\xi_t^{(k)})^2\,dt$ растут линейно с ростом T (с точностью до бесконечно малых высшего порядка). Кроме того, как убывание коэффициента сильного перемешивания, так и рост ковариаций происходят равномерно по $p \in P$. Это следует из нашего предположения об ограниченности области P и о том, что замыкание P лежит внутри области возможных значений p.

Учитывая сделанные замечания, доказательство того, что $\hat{p}_T$ является а.-н. и а.-э. оценкой, можно провести целиком так же как в классическом случае. При этом все утверждения будут справедливы равномерно по $p \in P$.

§. 2. Асимптотически достаточные статистики для параметра p

Из рассуждений § 1 видно, что вместо системы уравнений (1) можно было бы пользоваться системой уравнений:

$$-\frac{1}{2T}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial\pi_k}{\partial p_i}\cdot\int_0^T(\xi_t^{(k)})^2\,dt+\frac{\delta_{n-1,\,i}}{2}=0,\qquad i=\overline{0,\ n-1}.\tag{3}$$

Левые части в (1) и (3) отличаются лишь на слагаемые, которые стремятся к нулю по вероятности. При $T\to\infty$ к системе (3) применимы те же рассуждения, что и к системе (1), и ее решение сходится при той же нормировке к той же многомерной нормальной величине. В систему уравнений (3) входят лишь n статистик (по числу оцениваемых параметров): $\int_0^T(\xi_t^{(k)})^2\,dt$, $k=\overline{0,\ n-1}$. Эти статистики можно назвать „асимптотически достаточными" для параметра p в том смысле, что при $T\to\infty$ с их помощью из системы (3) можно получить а.-э., оценку для p. Система (3) является линейной системой относительно неизвестных $p_0\ldots p_{n-1}$ и распадается на 2 несвязанные линейные подсистемы, одна из которых содержит p_i с четными индексами, а другая с нечетными. Отметим, что получаемая из (3) оценка совпадает с оценкой наименьших квадратов, минимизирующей интеграл $\int_0^T\left[\sum_{k=1} p_k\,d\xi_t^{k-1}+p_0\xi_t\,dt\right]^2$. Система (3) имеет вид:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_{2k-m}(-1)^k\cdot\frac{1}{T}\int_0^T(\xi_t^{(k)})^2\,dt-\frac{1}{2}\delta_{n-1,\,m}=0,\qquad m=0,\ 2,\ 4\ldots\\&\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_{2k-m}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T(\xi_t^{(k)})^2\,dt-\frac{1}{2}\delta_{n-1,\,m}=0,\qquad m=1,\ 3,\ 5\ldots\end{aligned}\tag{4}$$

где как и раньше $p_i=0$ при $i<0$, $i>n$; $p_n=1$ и $\delta_{n-1,\,n-1}=1$, $\delta_{n-1,\,m}=0$ при $m\neq n-1$. Определитель этой системы, как мы уже отмечали, сходится при $T\to\infty$ к $|J_p|=\det|(-1)^i B_p^{(i+j)}(0)|$. Поэтому со сколь угодно близкой к 1 вероятностью система (4) имеет единственное решение $\tilde{p}_T$.

§ 3. Доверительные области для параметра p

Поскольку векторы $\sqrt{T}(\hat{p}_T-p)$ и $\sqrt{T}(\tilde{p}_T-p)$ при $T\to\infty$ имеют в качестве предельного нормальное распределение с нулевым средним значением и матрицей ковариаций J_p^{-1}, то все наши рассуждения в § 3 и § 4 о построении доверительных областей и об оценках функции от p будут относиться и к оценке $\hat{p}_T$ и к оценке $\tilde{p}_T$, так как при этом будет использоваться лишь упомянутый выше факт о предельном распределении этих оценок. Поэтому мы будем говорить лишь об оценке $\hat{p}_T$.

В качестве доверительной области для вектора p можно взять область вида $s^2 \leqslant a^2$, где

$$s^2 = T \sum_{i,j} (\hat{p}_i^T - p_i)(\hat{p}_j^T - p_j) \hat{B}^{(i+j)}(0) (-1)^i$$

и

$$\hat{B}^{(i+j)}(0) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{i+j}{2}}}{T} \cdot \displaystyle\int_0^T \left(\xi_t^{\left(\frac{i+j}{2}\right)}\right)^2 dt, & i+j \text{ — четное}, \\ 0, & i+j \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

Статистика s^2 аналогична обобщенному Стьюдентову отношению (см. [2], стр. 444), она имеет в пределе χ^2 — распределение с n степенями свободы. Чтобы доказать это, перепишем s^2 в следующем виде:

$$s^2 = T \sum (\hat{p}_i^T - p_i)(\hat{p}_j^T - p_j) [\hat{B}^{(i+j)}(0) - B_p^{(i+j)}(0)] (-1)^i +$$
$$+ T \sum (\hat{p}_i^T - p_i)(\hat{p}_j^T - p_j) B_p^{(i+j)}(0) (-1)^i. \tag{5}$$

Первая сумма сходится по вероятности к нулю, так как величины $T(\hat{p}_i^T - p_i)(p_j^T - p_j)$ сходятся к некоторым случайным величинам, а величины $\hat{B}^{(i+j)}(0) - B_p^{(i+j)}(0)$ сходятся по вероятности к нулю. Перейдем от вектора $\sqrt{T}(p_T - p)$ с помощью унитарного преобразования U к вектору $\hat{q}$:

$$\sqrt{T}\,(\hat{p}_T - p)\,U = \hat{q},$$

причем выберем U так, чтобы $U^* J_p U$ была диагональной матрицей. Перепишем второе слагаемое в (5) в матричном виде:

$$\sum_{i,j} T(\hat{p}_i^T - p_i)(\hat{p}_j^T - p_j) B_p^{(i+j)}(0) (-1)^i = \sqrt{T}\,(\hat{p}_T - p)\, J_p \sqrt{T}\,(\hat{p}_T - p)^*.$$

Подставляя вместо вектора $\sqrt{T}(\hat{p}_T - p)$ вектор $\hat{q}\,U^*$ и пользуясь тем, что матрица $U^* J_p U$ диагональная, получим:

$$\sqrt{T}\,(\hat{p}_T - p)\, J_p \sqrt{T}\,(\hat{p}_T - p) = \hat{q}\, U^* J_p U \hat{q}^* = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q_i^2}{\sigma_i^2},$$

где q_i — $i^{\text{ая}}$ компонента вектора $\hat{q}$ и σ_i^2 — ее дисперсия. При $T \to \infty$ компоненты вектора $\hat{q}$ стремятся по вероятности к независимым гауссовским величинам, так как корреляционная матрица вектора $\hat{q}$ равна диагональной матрице $UJ_p^{-1}U^*$. Поэтому распределение s^2 стремится к χ^2 — распределению с n степенями свободы.

§ 4. Оценка функции от параметра p

Часто на практике нас может интересовать не сам параметр p, а некоторая векторная функция от него $f(p)$. Если обозначить область изменения $f(p)$ при $p \in P$ через F, и если соответствие между F и P взаимнооднозначно, то $f(p_T)$ будет, очевидно, оценкой максимального правдоподобия для f (см. [7]). Предположим дополнительно, что функция $f(p)$ имеет равномерно ограниченные в P вторые производные, и что матрица

$$\Phi = \{\Phi_{ij}\}_{i,j=\overline{0,n-1}} = \left\{ \frac{\partial f_i(p)}{\partial p_j} \right\}_{i,j=\overline{0,n-1}}$$

невырождена в замыкании P. Тогда величины $\sqrt{T}\,[f(\hat{p}_T)-f(p)]$ будут а.-н. со средним значением 0 и корреляционной матрицей

$$\Phi J_p^{-1}\Phi^* = \left\{ \sum_{k,\,l=0}^{n-1} \frac{\partial f_i}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial f_j}{\partial p_l}\beta_{kl} \right\}_{i,\,j=\overline{0\ n-1}},$$

где через f_i обозначены компоненты вектора f и через β_{kl} — элементы матрицы J_p^{-1}. Поделенная на T информационная матрица Фишера стремится к $\Phi^{*-1}J_p\Phi^{-1}$, а оценка $f(\hat{p}_T)$ является а.-э.

Пример

Пусть $P(i\lambda)=(i\lambda^2)+p_1(i\lambda)+p_0$, где $p_0>\frac{p_1^2}{4}$ и для всех точек области $P: p_1\geqslant\varepsilon>0$. В этом случае система (4) имеет вид:

$$p_0\frac{1}{T}\int_0^T \xi_t^2\,dt-\frac{1}{T}\int_0^T(\xi_t')^2\,dt=0,$$

$$p_1\frac{1}{T}\int_0^T(\xi_t')^2\,dt-\frac{1}{2}=0.$$

Отсюда

$$p_0=\frac{\int_0^T(\xi_t')^2\,dt}{\int_0^T\xi_t^2\,dt},\qquad \tilde{p}_1=\frac{1}{\frac{2}{T}\int_0^T(\xi_t')^2\,dt}.$$

При $T\to\infty$ величины $\sqrt{T}\,(\tilde{p}_0-p_0)$ и $\sqrt{T}\,(\tilde{p}_1-p_1)$ сходятся к некоррелированным нормальным величинам с дисперсиями $2p_0p_1$ и $2p_1$ соответственно. Часто берут в качестве параметров не p_0 и p_1, $\omega=\sqrt{p_0}$ и $\alpha=\frac{p_1}{2}$ при $\omega\gg\alpha$ параметр ω имеет наглядный физический смысл центральной резонансной частоты фильтра, через который надо пропустить „белый шум", чтобы получить процесс ξ_t; α при этом имеет смысл декремента затухания этого фильтра. В этом случае а.-э. оценками будут

$$\tilde{\omega}=\sqrt{\tilde{p}_0}\qquad\text{и}\qquad\tilde{\alpha}=\frac{\tilde{p}_1}{2}.$$

Обе оценки сходятся к нормальным некоррелированным величинам, а дисперсии $\sqrt{T}\,(\tilde{\omega}-\omega)$ и $\sqrt{T}\,(\tilde{\alpha}-\alpha)$ стремятся к α.

§ 5. Процесс с дискретным временем

Сформулируем теперь кратко аналогичные результаты для процессов с дискретным временем и со спектральной плотностью $|2\pi P(e^{i\lambda})|^{-2}$, где $P(z)$ — многочлен $n^{ой}$ степени с вещественными коэффициентами, все корни которого по модулю больше 1. (В этом случае p_n также является оцениваемым параметром.) Пусть наблюдаются значения процесса ξ_t при $1\leqslant t\leqslant N$. Роль асимптотически достаточных статистик здесь играют $(n+1)$ первых значений выборочной корреляционной функции:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k}\xi_i\xi_{i+k},\qquad k=\overline{0,\ n}.$$

Число этих статистик равно числу оцениваемых параметров $p_0 p_1 \ldots p_n$. Функция правдоподобия имеет вид:

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} f(\xi_1 \ldots \xi_n; p) = \frac{p_0^{N-n}}{B_n^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{k-1} p_j p_l \xi_k \xi_{k+j-l} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{N-n} \sum_{j,\, l=0}^{n} p_j p_l \xi_k \xi_{k+j-l} - \frac{1}{2} \sum_{k=N-n+1}^{N} \sum_{j=0}^{N-k} \sum_{l=0}^{n} p_j p_l \xi_k \xi_{k+j-l} \right\}, \quad N > n, \tag{6}$$

где B_n — корреляционная матрица случайных величин $\xi_1 \ldots \xi_n$; p_0 считается положительным. Система уравнений, аналогичная (6), выглядит так:

$$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n} \sum_{j=1}^{N-|k-l|} \xi_j \xi_{j+|k-l|} \cdot p_l - \frac{1}{p_0} \delta_{0,k} = 0 \qquad k = \overline{0,\ n}, \tag{7}$$

где $\delta_{0l} = 0$ при $l \neq 0$ и $\delta_{00} = 1$.

Тот факт, что эта система не является линейной, не приносит особенных затруднений. Можно, например (решая линейные уравнения (7) при $k = 1, 2, \ldots, n$ относительно $p_1 \ldots p_n$), найти p_j:

$$p_j = A_j \cdot p_0,$$

где A_j — некоторые величины, не зависящие от p.

После этого последнее уравнение (7) при $k = 0$ дает нам:

$$p_0 \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \xi_j^2 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cdot \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-k} \xi_j \xi_{j+k} \right) - \frac{1}{p_0} = 0.$$

Отсюда в силу принятого соглашения $p_0 > 0$ однозначно находим p_0.

Оценки, получаемые для p из систем (6) или (7), являются а.-н. и а.-э. Информационная матрица Фишера, умноженная на N^{-1}, стремится к матрице

$$\left\{ B_p(i-j) + \delta_{ij} \cdot \frac{1}{p_0} \right\}_{i,\, j = \overline{0,\, n}},$$

где $\delta_{00} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при остальных i, j. Ясно, что эта матрица невырождена, так как она равна сумме положительной и неотрицательной матриц.

В заключение заметим, что аналогичные утверждения можно было бы получить для случая, когда оцениваются некоторые из параметров p_i, а остальные предполагаются известными. Автор выражает искреннюю благодарность Р. Л. Добрушину за советы, полученные при подготовке настоящей заметки.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
22.V.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Гренандер. Случайные процессы и статистические выводы, Москва, ИИЛ, 1961.
2. Г. Крамер. Математические методы статистики, Москва, ИИЛ, 1948.
3. И. В. Гирсанов. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры. Теор. вер. и ее прим., 5, 3 (1960), 314—330.
4. Ю. А. Розанов. О центральной предельной теореме для аддитивных случайных функций. Теор. вер. и ее прим., 5, 2 (1960), 243—245.

5. А. Н. Колмогоров, Ю. А. Розанов. Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса, Теор. вер. и ее прим, 5, 2 (1960), 222—227.
6. В. Ф. Писаренко. К задаче обнаружения случайного сигнала на фоне шума, Радиотехника и электроника, 6, 4 (1961), 514—528.
7. T. Anderson. Introduction to multivariate statistical analysis, New York, Wiley, 1958.

APIE STACIONARAUS GAUSO PROCESO SU SPEKTRINIU TANKIU $|P(i\lambda)|^{-2}$ PARAMETRŲ ĮVERTINIMUS

V. PISARENKO

(Reziumė)

Straipsnyje randami stacionaraus Gauso proceso su spektriniu tankiu $|P(i\lambda)|^{-2}$ parametrų asimptotiškai normalūs ir asimptotiškai efektyvūs įvertinimai.

ON ESTIMATES FOR THE PARAMETERS OF A GAUSSIAN STATIONARY PROCESS WITH THE SPECTRAL DENSITY $|P(i\lambda)|^{-2}$

V. PISARENKO

(Summary)

In the paper asymptotically efficient and asymptotically normal estimates and confidence regions for the parameters of a Gaussian stationary process with the spectral density $|P(i\lambda)|^{-2}$ are constructed.