II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. СТАТУЛЯВИЧЮС

При получении асимптотических разложений по многочленам Эрмита для функции распределения $F_n(x)$ нормированной суммы

$$\bar{S}_n = \frac{S_n - \mathbf{M} S_n}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}}\,; \qquad S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j,$$

последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ (1 стр. 235, 2 стр. 97, 3), для плотности $p_n(x) = F_n'(x)$, в случае абсолютно непрерывного распределения $F_n(x)$ (1 стр. 243, 3), для вероятности $\mathbf{P}\{S_n = m\}$ при целочисленных ξ_j, $j = 1, 2, \ldots$ (1 стр. 257) обычно пользуются асимптотическим разложением Г. Крамера (2 стр. 90) для характеристической функции $f_n(t) = \mathbf{M} e^{it\bar{S}_n}$:

$$f_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{s-3} P_{kn}(it)\, n^{-\frac{k}{2}} + \frac{\Theta_s}{T_{sn}^{s-2}} \left(|t|^s + |t|^{3(s-2)}\right)\right), \tag{1}$$

справедливым в интервале $|t| \leqslant \sqrt[3]{\frac{1}{4} T_{sn}}$, если только существуют $\mathbf{M}|\xi_j|^s$ $(s \geqslant 3)$ и $\mathbf{M}\xi_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Здесь

$$P_{kn}(it) = \sum_{j=1}^{k} c_{jkn} (it)^{k+2j}$$

есть многочлен степени $3k$ относительно it с, вообще говоря, не ограниченными равномерно относительно n коэффициентами

$$c_{jkn} \ll T_{sn}^{-k} n^{\frac{k}{2}},$$

Θ_s – величина равномерно ограниченная относительно n и

$$T_{sn} = \frac{B_n^3}{n^{1-\frac{3}{s}} B_{sn}^{\frac{3}{s}}}, \tag{2}$$

$$B_n = \sqrt{\mathbf{D} S_n}, \qquad B_{kn} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}|\xi_j|^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Если при $n \to \infty$ дисперсия $B_n^2 \to \infty$ достаточно медлено, то, как видно из (2), при $s>3$ может случиться, что $T_{sn} \to 0$, когда $n \to \infty$, и, значит, разложение (1) не имеет смысла, хотя соответствующая дробь Ляпунова

$$L_{sn} = \frac{B_{sn}}{B_n^s} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(Такая ситуация встречается довольно часто в случае зависимых слагаемых ξ_j.)

Ниже дается асимптотическое разложение для $f_n(t)$ по дробям Ляпунова.

Теорема. *Пусть* ξ_1, ξ_2, ... — *последовательность независимых случайных величин с* $\mathbf{M}\xi_j = 0$, *имеющих конечные абсолютные моменты* $\mathbf{M}|\xi_j^s|$, $s \geqslant 3$, $j = 1, 2, \ldots$.

Если $L_{sn} \to 0\,(n \to \infty)$, *то для характеристической функции* $f_n(t)$ *в интервале*

$$|t| \leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}$$

имеет место следующее асимптотическое разложение

$$f_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{k=3}^{s-1} Q_{kn}(it)\, L_{kn} + \Theta_s \left(|t|^s + |t|^{3(s-2)} \right) L_{sn} \right). \tag{3}$$

Здесь

$$Q_{kn}(it) = \sum_{j=1}^{k-2} \frac{q_{jkn}}{j!} (it)^{k+2(j-1)}$$

является многочленом степени $3(k-2)$ *с равномерно относительно* n *ограниченными коэффициентами* q_{jkn} (*выражения для* q_{jkn} *даны в формуле* (23)). *Величина* Θ_s *равномерно ограничена относительно* n *и* t,

$$L_{3n} \leqslant L_{4n}^{\frac{1}{2}} \leqslant L_{5n}^{\frac{1}{3}} \leqslant \ldots \leqslant L_{kn}^{\frac{1}{k-2}} \leqslant \ldots \leqslant L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}, \tag{4}$$

где

$$L_{kn} = \frac{B_{kn}}{B_n^k}, \qquad k = 3, 4, \ldots, s.$$

Для сравнения разложений (3) и (1) заметим, что

$$L_{kn} = \left(\frac{1}{L_{kn}\, n^{\frac{k-2}{2}}} \right)^{\frac{2(k-3)}{k}} \cdot \frac{1}{T_{kn}^{k-2}} = \left(\frac{\bar{B}_{2n}^{\frac{1}{2}}}{\bar{B}_{kn}^{\frac{1}{k}}} \right)^{2(k-3)} \cdot \frac{1}{T_{kn}^{k-2}}, \qquad k = 3, \ldots, s, \tag{5}$$

причем всегда

$$L_{kn} \geqslant \frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}} \tag{6}$$

и

$$\frac{\bar{B}_{2n}}{\bar{B}_{kn}} \leqslant 1,$$

так как

$$\bar{B}_{k'n}^{\frac{1}{k'}} \leqslant \bar{B}_{k''n}^{\frac{1}{k''}} \tag{7}$$

при

$$1 \leqslant k' \leqslant k'' \leqslant s,$$

где

$$\overline{B}_{kn} = \frac{B_{kn}}{n}.$$

Улучшить остаточный член в соотношении (3), в общем случае, нельзя.

Доказательство. Соотношение (7), а тем самым (5) и (6), следует из того, что $\overline{B}_{kn}$ является к-ым абсолютным моментом случайной величины η с функцией распределения

$$\Psi(x) = \frac{P\{\xi_1 < x\} + \ldots + P\{\xi_n < x\}}{n}.$$

Далее, функция

$$\varphi(x) = \left| \ln \mathbf{M} |\eta^x| \right| = |\ln \overline{B}_{xn}|, \qquad 1 \leqslant x \leqslant s \tag{8}$$

выпуклая, поэтому

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) \tag{9}$$

для любых $1 \leqslant x_i \leqslant s$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, с $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Положив

$$x_1 = l, \quad x_2 = 2, \quad \lambda_1 = \frac{k-2}{l-2}, \quad \lambda_2 = \frac{l-k}{l-2}, \qquad 3 \leqslant k \leqslant l \leqslant s,$$

из (8) и (9) получаем

$$\overline{B}_{kn} \leqslant \overline{B}_{ln}^{\frac{k-2}{l-2}} \overline{B}_{2n}^{\frac{l-k}{l-2}}. \tag{10}$$

Заменой неравенства (7) на более точное (10) и получается разложение (3) вместо (1).

Так как $\frac{k-2}{l-2} + \frac{l-k}{l-2} = 1$, то после умножения обеих частей неравенства (10) на n получаем

$$B_{kn} \leqslant B_{ln}^{\frac{k-2}{l-2}} B_{2n}^{\frac{l-k}{l-2}},$$

или

$$L_{kn} \leqslant L_{ln}^{\frac{k-2}{l-2}}, \qquad 3 \leqslant k \leqslant l \leqslant s, \tag{11}$$

потому что

$$B_{2n}^{\frac{l-k}{l-2}} = \frac{B_n^k}{B_n^{l \frac{k-2}{l-2}}}.$$

Отсюда следует справедливость неравенств (4).

Положим $\varphi_j(t) = \mathbf{M} e^{it\xi_j}$. Тогда

$$f_n(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right).$$

В интервале

$$|t| \leqslant \frac{B_n}{\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sigma_j}, \qquad \sigma_j^2 = \mathbf{D}\xi_j^2, \tag{12}$$

имеем

$$\left|\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \geqslant \frac{1}{2}, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{13}$$

так как

$$\left|\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)-1\right| \leqslant \mathbf{M}\left|e^{it\frac{\xi_j}{B_n}}-1-it\frac{\xi_j}{B_n}\right| \leqslant \frac{t^2}{2B_n^2}\sigma_j^2.$$

Заметим, что

$$\frac{B_n}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j} \geqslant \frac{B_n}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\beta_{3j}^{\frac{1}{3}}} \geqslant \frac{B_n}{B_{3n}^{\frac{1}{3}}} = L_{3n}^{-\frac{1}{3}} \geqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}, \tag{14}$$

где

$$\beta_{kj}=\mathbf{M}\,|\xi_j^k|, \qquad 3\leqslant k\leqslant s,\ \ j=1,\ 2,\ \ldots .$$

Пусть $\gamma_{kj}(t)=\frac{1}{i^k}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi_j(t)$ — k-ая логарифмическая производная функция $\varphi_j(t)$, $\gamma_{kj}=\gamma_{kj}(0)$ и

$$\Gamma_{kn}=\sum_{j=1}^{n}\gamma_{kj}$$

k-ые семиинварианты случайных величин ξ_j и S_n соответственно, $1\leqslant k\leqslant s$. Тогда, в силу (13) в интервале (12), а тем более, как видно из неравенства (14), в интервале

$$|t|\leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}} \tag{15}$$

имеем

$$\left|\gamma_{kj}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \Theta_s\cdot\beta_{sj}, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad 3\leqslant k\leqslant s.$$

Θ_k здесь и в дальнейшем величина меньшая по абсолютной величине некоторого числа, зависящего только от k. Имеем, поэтому

$$\ln f_n(t)=\sum_{j=1}^{n}\ln\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)=-\frac{t^2}{2}+\sum_{k=3}^{s-1}\frac{\Gamma_{kn}}{k!}\left(\frac{it}{B_n}\right)^k+\Theta_s\frac{B_{sn}\,|t|^s}{B_n^s},$$

или

$$\ln f_n(t)=-\frac{t^2}{2}+\sum_{k=3}^{s-1}\frac{\lambda_{kn}(it)^k}{k!}L_{kn}+\Theta_s\,|t|^s L_{sn},$$

где

$$\lambda_{kn}=\frac{\Gamma_{kn}}{B_{kn}}, \qquad |\lambda_{kn}|\leqslant k^k.$$

Дальнейшие оценки получаются как и у Г. Крамера методом мажорирования рядов. Положим

$$V(z)=\ln\left(f_n^{\frac{1}{z^2}}(tz)\,e^{\frac{t^2}{2}}\right)=\sum_{k=3}^{s-1}\frac{\lambda_{kn}}{k!}(it)^k z^{k-2}L_{kn}+\Theta_s\,|t|^s\,|z|^{s-2}L_{sn}, \tag{16}$$

где действительное z изменяется в интервале $|z|\leqslant 1$. Согласно (11) в интервале (15) имеем

$$|V(z)|=\Theta_s\sum_{k=3}^{s}\frac{1}{k!}|t|^k\,|z|^{k-2}L_{kn}=\Theta_s\,|t|^3\,|z|\,L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left|tzL_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\right|^k=$$

$$=\Theta_s\,|t|^3\,|z|\,L_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\exp\left\{\left|tzL_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\right|\right\}=\Theta_s, \tag{17}$$

$$|V^j(z)|=\Theta_s^j\,|t|^{3j}\,|z|^j L_{sn}^{\frac{j}{j-2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left|jtzL_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\right|^k. \tag{18}$$

Имея в виду (17), получаем

$$e^{V(z)}=1+\sum_{j=1}^{s-3}\frac{V^j(z)}{j!}+\Theta_s|V(z)|^{s-2}. \tag{19}$$

Подставляя в правую часть соотношения (19) выражения (16) для $V(z)$ и собирая члены при одинаковых z степенях, находим

$$e^{V(z)}=f_n^{\frac{1}{z^2}}(tz)\,e^{\frac{t^2}{2}}=1+\sum_{k=3}^{s-1}Q_{kn}(it)L_{kn}z^{k-2}+R_{s,t,n}(z), \tag{20}$$

причем согласно (18)

$$|R_{s,t,n}(z)|=\Theta_s\sum_{j=1}^{s-2}|t|^{3j}|z|^jL_{sn}^{\frac{j}{s-2}}\sum_{k=s-2-j}^{\infty}\frac{1}{k!}\left|tzL_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\right|^k=$$

$$=\Theta_s\sum_{j=1}^{s-2}|t|^{3j}|z|^jL_{sn}^{\frac{j}{s-2}}|tz|^{s-2-j}L_{sn}^{\frac{s-2-j}{s-2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left|tzL_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\right|^k=$$

$$=\Theta_sL_{sn}|z|^{s-2}|t|^{s-2}\sum_{j=1}^{s-2}|t|^{2j}\exp\left|tzL_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\right|=\Theta_s|z|^{s-2}(|t|^s+|t|^{3(s-2)})L_{sn}. \tag{21}$$

Легко убедиться, что

$$Q_{kn}(it)=\sum_{j-1}^{s-2}\frac{q_{jkn}}{j!}(it)^{k+2(j-1)}, \tag{22}$$

где коэффициенты

$$q_{jkn}=\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_j\geqslant 3\\ k_1+\ldots+k_j=k+2(j-1)}}L_{kn}^{-1}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda_{k_in}L_{k_in}}{k_i!} \tag{23}$$

равномерно ограничены по n, так как

$$\left\{\begin{aligned}&|\lambda_{kn}|\leqslant k^k\\ &\frac{\prod_{i=1}^{j}L_{k_in}}{L_{kn}}\leqslant\frac{L_{kn}^{\frac{k_1+\ldots+k_j-2j}{k-2}}}{L_{kn}}=1\end{aligned}\right. \tag{24}$$

в силу (11) и того, что

$$k_1+\ldots+k_j-2j=k+2(j-1)-2j=k-2.$$

Положив в соотношении (20) $z=1$ и учитывая (15), (21)–(24), получаем утверждение теоремы.

Желая получить для $F_n(x)$ методом характеристических функций асимптотическое разложение по многочленам Эрмита с оценкой остаточного члена не только относительно n но и относительно x, т. е. разложение для

$$x^l\left(F_n(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right),\qquad 1\leqslant l\leqslant s$$

нужно иметь асимптотическое разложение для производных $f_n(t)$. П. Сурвилой [4] получен следующий результат:

В условиях теоремы

$$\frac{d^l}{dt^l}\left[f_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{k=3}^{m} Q_{kn}(it)L_{kn}\right)\right]=\Theta_s e^{\frac{t^2}{3}} L_{sn}\left(|t|^{s-l}+|t|^{3(s-2)+l}\right)$$

при любом $l=1, 2, \ldots, s$, $m=s-1$.

В случае одинаково распределенных случайных величин $m=s$, $\Theta_s \to 0$ $(n\to\infty)$ и

$$L_{kn}=\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}\frac{\beta_{k1}}{\sigma_1^k}, \qquad 3\leqslant k\leqslant s.$$

Институт физики и математики
АН Литовской ССР
Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
1.VI.1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Б. П. Гнеденко и А. Н. Колмогоров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, Москва—Ленинград, 1949.
2. Г. Крамер. Случайные величины и распределения вероятностей, Москва, 1947.
3. В. В. Петров. Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теор. вероятн. и ее прим. 4, 2 (1959), 220—224.
4. П. Сурвила. Остаточный член в асимптотическом разложении для плотностей, Литовский матем. сборник, 2, 2 (1962), 233—251.

APIE NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMOS CHARAKTERINGOSIOS FUNKCIJOS ASIMPTOTINĮ IŠDĖSTYMĄ

V. STATULEVIČIUS

(Reziumė)

Straipsnyje gautas normuotos sumos $\bar{S}_n$ charakteringajai funkcijai $f_n(t)$ asimptotinis išdėstymas (3) Liapunovo trupmenomis L_{kn}, $k=1, 2, \ldots, s$ $(s\geqslant 3)$, esant patenkintai sąlygai $L_{sn}\to 0$ $(n\to\infty)$.

Išdėstymas (3) galioja intervale $|t|\leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}$. Jis patikslina žinomą Kramerio išdėstymą (1) (žr. [2], 90 psl.).

ON ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE CHARACTERISTIC FUNCTION OF THE SUM OF INDEPENDENT RANDOM VALUES

V. STATULEVICHIUS

(Summary)

In the paper an asimptotic expansion (3) for the characteristic function $f_n(t)$ of a standardized sum $\bar{S}_n$ with respect to Liapunov's fractions L_{kn}, $k=1, 2, \ldots, s$ $(s\geqslant 3)$ under the condition $L_{sn}\to 0$ $(n\to\infty)$ is given.

The expansion (3) is true in the interval $|t|\leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}$. It improves the well-known Cramer's expansion (1) (look [2], p. 90).