III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

ОБ УТОЧНЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

А. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ

Теоремы, уточняющие сходимость к нормальному закону, изучены С. Х. Сираждиновым [6] и С. В. Нагаевым [1], [2] для однородных и В. А. Статулявичюсом [5] для неоднородных цепей Маркова. В настоящей работе изучается уточнение сходимости к устойчивым законам, отличным от нормального, для однородных цепей Маркова с произвольным множеством состояний аналогично уточнениям сходимости к таким же самым законам для независимых одинаково распределённых случайных величин, полученым В. М. Золотарёвым [3], [4].

Итак, рассматривается однородная цепь Маркова $\{\xi(t),\ t=1, 2, \ldots\}$ с произвольным множеством состояний Ω, на котором определена σ-алгебра F. Переходную функцию обозначим через $p(\omega, A)$, где $\omega\in\Omega$, $A\in F$, а через $p(A)$, $A\in F$, — начальное распределение.

Пусть $p(\omega, A)$ удовлетворяет следующему условию: существует целое положительное k_0 такое, что

$$\sup_{\omega,\,\omega',\,A} |p^{(k_0)}(\omega, A)-p^{(k_0)}(\omega', A)|=\delta<1, \tag{1}$$

$$A\in F;\quad \omega,\ \omega'\in\Omega,$$

где $p^{(k_0)}(\omega, A)$ — функция вероятностей перехода за k_0 шагов.

При выполнении условия (1) существует стационарное распределение $q(A)$ такое, что

$$\sup_{\omega,\,A} |q(A)-p^{(n)}(\omega, A)|\leqslant \delta^{\left[\frac{n}{k_0}\right]}=\bar{\gamma}\rho^n,\quad \omega\in\Omega,\ A\in F, \tag{2}$$

где $\bar{\gamma}=\delta^{-1}$, $\rho=\delta^{\frac{1}{k_0}}$. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что условие (1) выполняется.

Пусть

$$X_1,\ X_2,\ \ldots$$

последовательность случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова, т. е. $X_l=X\left(\xi(l)\right)$, $l=1, 2, \ldots$, где действительная функция $X(\omega)$ определена на Ω и F-измерима. Пусть, далее,

$$p(A)=q(A),\qquad A\in F.$$

Тогда случайные величины $X_l\,(l=1, 2, \ldots)$ будут одинаково распределены.

Обозначим

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

$$F_n(x) = P\{S_n < x\}, \qquad F(x) = F_1(x) = \int\limits_{\{\omega : X_1(\omega) < x\}} p(d\omega).$$

Предполагается, что $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона $V(x) = V(x, \lambda) = V(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$, характеристическая функция которого имеет вид

$$g(t) = \exp\left\{ it\lambda\gamma - \lambda |t|^\alpha \exp\left[-i\frac{\pi}{2}(1 - |1-\alpha|\beta \operatorname{sgn} t)\right]\right\}, \qquad 0 < \alpha < 2,\ \alpha \neq 1. \tag{3}$$

Это означает, что для подходящим образом выбранных констант A_n и $B_n > 0$ при $n \to \infty$

$$F^{*n}(B_n x + A_n) = V(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) + o(1). \tag{4}$$

Неограничивая общности мы будем считать, что $\gamma = 0$ (см. [4]).

Пусть, далее,

$$\Omega(x) = F(x) - V(x), \qquad \mu_k = \int x^k \, d\Omega(x),$$

$$\nu_r = \int |x|^r \, |d\Omega(x)|,$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $r \geqslant 0$. Очевидно, $\mu_0 = 0$. Если ν_α существует, то $F(x)$ принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона $V(x)$, и за счёт линейной нормировки аргумента функции $F(x)$ можно добиться того, чтобы $\mu_0 = \mu_1 = \mu_{[\alpha]} = 0$ (см. [3]), и, следовательно, того, что в (4) было бы $A_n = 0$ (см. [8]). Будем считать, что $B_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$.

Предполагается, что $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ независимые одинаково распределённые случайные величины, имеющие то же самое распределение, что и X_1. Через

$$F_{m+1}^{(\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_m)}(x)$$

обозначается функция распределения суммы

$$X_1 + \hat{X}_{k_2} + \ldots + \hat{X}_{k_m},$$

где $\hat{X}_{k_i}$ равняется или X_{k_i}, или Y_i $(i = 1, \ldots, k)$, а $\hat{k}_i$ равно k_i при $\hat{X}_{k_i} = X_{k_i}$, и $\hat{k}_i$ равно нулю при $\hat{X}_{k_i} = Y_i$.

Пусть

$$\Omega_{m+1}^{(\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_{m-1}, \bar{k}_m)}(x) = F_{m+1}^{(\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_{m-1}, k_m)}(x) - F_{m+1}^{(\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_{m-1}, 0)}(x),$$

$$\Omega_{m+1}^{(\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_{m-2}, \bar{k}_{m-1}, \bar{k}_m)}(x) = \Omega_{m+1}^{(\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_{m-2}, k_{m-1}, \bar{k}_m)}(x) - \Omega_{m+1}^{(\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_{m-2}, 0, \bar{k}_m)}(x), \quad \ldots,$$

$$\Omega_{m+1}^{(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_m)}(x) = \Omega_{m+1}^{(k_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_m)}(x) - \Omega_{m+1}^{(0, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_m)}(x);$$

$$\bar{\mu}_l(k_1) = \int x^l \, d\Omega_2^{(\bar{k}_1)}(x), \quad \ldots, \quad \bar{\mu}_l(k_1, \ldots, k_m) = \int x^l \, d\Omega_{m+1}^{(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_m)}(x);$$

$$\nu_r(k_1) = \int |x|^r \left| d\Omega_2^{(\bar{k}_1)}(x) \right|, \quad \ldots, \quad \bar{\nu}_r(k_1, \ldots, k_m) = \int |x|^r \left| d\Omega_{m+1}^{(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_m)}(x) \right|,$$

где $l = 1, 2, \ldots$ и $r \geqslant 0$.

Если $\gamma_1 = \min(1, \alpha - \varepsilon_1)$, где ε_1 — фиксированное сколь угодно малое положительное число, то всегда

$$\int_{\Omega} |X_1(\omega)|^{\gamma_1} p(d\omega) < \infty. \tag{5}$$

Характеристическую функцию суммы $\frac{S_n}{B_n} + A_n$ обозначим через $f_n(t)$.

Теорема 1. *Если существуют „моменты“*

$$\nu_{r_1},\ \bar{\nu}_{r_1}(1),\ \bar{\nu}_{r_1}(1,\ 1),\ \ldots,\ \bar{\nu}_{r_1}\underbrace{(1,\ \ldots,\ 1)}_{r_1}$$

порядка $\varkappa = 1 + [\alpha] \leqslant r_1 \leqslant r_2$, *для некоторого* $0 < \gamma \leqslant 1$, $\gamma < \alpha$,

$$\sup_{\omega} \int_{\Omega} |X_1(\omega')|^{\gamma} p(\omega,\ d\omega') < \infty, \tag{6}$$

и ряды

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{r_2-1} \bar{\nu}_{r_1}(k_1), \qquad \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} (k_1 + k_2)^{r_2-2} \bar{\nu}_{r_1}(k_1,\ k_2),\ \ldots,$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_{r_2}=1}^{\infty} (k_1 + \ldots + k_{r_2}) \bar{\nu}_{r_1}(k_1,\ \ldots,\ k_{r_2}) \tag{7}$$

сходятся, то при $|t| < \Delta n^{\frac{1}{\alpha}}$ (Δ — *некоторое постоянное*)

$$\Big| f_n(t) - g(t) \Big[1 + \sum{}' A(s,\ u,\ v,\ w) |t|^{(1+s)\alpha v + s\alpha w} (it)^{\varkappa w + u} \times$$

$$\times n^{w - (v+w)s - 1 - \frac{\varkappa w + u}{\alpha}} \Big] \Big| \leqslant \frac{C(r_1)}{n^{\frac{r_1}{\alpha} - 1}} \delta(n) \Big(|t|^{r_1} + |t|^{\varkappa \frac{r_1 - \alpha}{\varkappa - \alpha}} \Big) + O(t\rho_2^n).$$

Здесь Σ' *означает суммирование по всем* $s \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$ *таким, что* $v + w \geqslant 1$ *и* $(1+s)\alpha v + s\alpha w + \varkappa w + u - (v+w)\alpha \leqslant r_1$; *коэффициенты* $A(s,\ u,\ v,\ w)$ *ограниченны,* $C(r_1)$ — *постоянное, зависящее от* r_1; $\lim_{n\to\infty} \delta(n) = 0$; *и число* r_2 *определяется следующим образом:* $r_2 = r_1$ *при* $\alpha > 1$, *а при* $\alpha < 1$ *как наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству* $r_1 < r_2\gamma + \gamma_1$.

Теорема 2. *Если выполнены все условия теоремы* 1, *существует* $C \in \mathscr{F}$ *такое, что* $p(C) > 0$ *и* $0 < m < p_0(\omega,\ \omega') < M < \infty$ *для* $\omega,\ \omega' \in C$, *где* $p_0(\omega,\ \omega')$ — *плотность абсолютно непрерывной относительно* $p(\cdot)$ *компоненты* $p(\omega,\ \cdot)$, $p_0(\omega,\ \omega')$ *измерима относительно* $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$, *и*

$$\liminf_{t\to\infty} \int_C \int_C \sin^2 \big(X_1(\omega) - X_1(\omega') \big) t\, p(d\omega)\, p(d\omega') > 0, \tag{8}$$

то равномерно по x

$$F_n(B_n x + A_n) = V(x,\ \lambda) + \sum{}' A(s,\ u,\ v,\ w) \times$$

$$\times \frac{\partial^{(\varkappa + s\alpha)w + (1+s)\alpha v + u} V(x,\ \lambda)}{\partial x^{\varkappa w + u} \partial \lambda^{(1+s)\alpha v + s\alpha w}} n^{w - (v+w)s - 1 - \frac{\varkappa w + u}{\alpha}} + o\big(n^{1 - \frac{r_1}{\alpha}}\big),$$

где коэффициенты $A(s,\ u,\ v,\ w)$ *ограниченны, а* Σ' *означает суммирование по всем* $s \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$ *таким, что* $v + w \geqslant 1$ *и* $(1+s)\alpha v + s\alpha w + \varkappa w + u - (v+w)\alpha \leqslant r_1$.

Замечание. При некоторых дополнительных условиях для вероятностей переходной функции можно доказать, что

$$\frac{1}{|x|^{\alpha}}\left(c_1+\alpha_1(x)\right)\leqslant \mathbf{P}\{X_1+\hat{X}_2+\ldots+\hat{X}_k<x\}\leqslant\frac{1}{|x|^{\alpha}}\left(c_2+\alpha_1(x)\right), \qquad x<0,$$

и

$$\frac{1}{x^{\alpha}}\left(c_3+\alpha_2(x)\right)\leqslant 1-\mathbf{P}\{X_1+\hat{X}_2+\ldots+\hat{X}_k<x\}\leqslant\frac{1}{x^{\alpha}}\left(c_4+\alpha_2(x)\right), \qquad x>0,$$

где c_1, c_2, c_3 и c_4 — некоторые положительные постоянные, а $\alpha_1(x)\to 0$ при $x\to-\infty$, $\alpha_2(x)\to 0$ при $x\to\infty$, и $1\leqslant k\leqslant r_2$. Следовательно, функция $F_{X_1+\hat{X}_2+\cdots+\hat{X}_k}(x)=\mathbf{P}\{X_1+\hat{X}_2+\ldots+\hat{X}_k<x\}$ должна иметь вид

$$F_{X_1+\hat{X}_2+\cdots+\hat{X}_k}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|^{\alpha}}\left(c_1(x)+\alpha_3(x)\right), & x<0,\\[2mm] 1-\dfrac{1}{x^{\alpha}}\left(c_2(x)+\alpha_4(x)\right), & x>0.\end{cases} \tag{9}$$

Здесь $c_1\leqslant c_1(x)\leqslant c_2$ при $-\infty<x<0$, и $c_3\leqslant c_2(x)\leqslant c_4$ при $0<x<\infty$, $\alpha_3(x)\to 0$, когда $x\to-\infty$, и $\alpha_4(x)\to 0$, когда $x\to\infty$. Если $c_1(x)=c_5$ и $c_2(x)=c_6$, где c_5 и c_6 — некоторые положительные постоянные, то нетрудно видеть, что

$$c_5=a_1 \quad\text{и}\quad c_6=a_2, \tag{10}$$

где a_1 и a_2 — постоянные, входящие в соотношения

$$V(x)=\frac{1}{|x|^{\alpha}}\left(a_1+\alpha(x)\right), \qquad x<0,$$

и

$$1-V(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}\left(a_2+\bar{\alpha}(x)\right), \qquad x>0,$$

в которых $a_1>0$, $a_2>0$, $\alpha(x)\to 0$ при $x\to-\infty$, и $\bar{\alpha}(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

Так как из (9) и (10) следует, что $F_{X_1+\hat{X}_2+\cdots+\hat{X}_k}(x)$ принадлежит области притяжения некоторого устойчивого закона $V_{X_1+\hat{X}_2+\cdots+\hat{X}_k}(x)$, то вместо существования „моментов“

$$\nu_{r_1}(1),\ \ldots,\ \bar{\nu}_{r_1}(\underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{r_2}) \tag{11}$$

было бы естественее требовать существования „моментов“

$$\int|x|^{r_1}\left|d\left(F_{X_1+\hat{X}_2}(x)-V_{X_1+\hat{X}_2}(x)\right)\right|,\ \ldots,$$

$$\int|x|^{r_1}\left|d\left(F_{X_1+\hat{X}_2+\cdots+\hat{X}_{r_2}}(x)-V_{X_1+\hat{X}_2+\cdots+\hat{X}_{r_2}}(x)\right)\right|.$$

Но при существовании ν_{r_2} всегда

$$\int|x|^{r_1}\left|d\left(F_{X_1+\hat{X}_2+\cdots+\hat{X}_{k-1}+Y_k}(x)-V_{X_1+\hat{X}_2+\cdots+\hat{X}_{k-1}+Y_k}(x)\right)\right|<\infty,$$
$$1\leqslant k\leqslant r_2,$$

поэтому достаточно требовать существования „моментов“ (11).

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathfrak{M}$ — пространство Банаха ограниченных комплексных функций $\bar{g}(\omega)$, $\omega\in\Omega$, измеримых относительно $\mathscr{F}$ с нормой $\|\bar{g}(\omega)\|=\sup\limits_{\omega\in\Omega}|\bar{g}(\omega)|$, а $\mathfrak{M}^*$ — банахово пространство комплексных вполне конечных мер $\mu(A)$, $A\in\mathscr{F}$, с нормой $\|\mu\|=|\mu|(x)$, где $|\mu|(\cdot)$ — полная вариация меры $\mu(\cdot)$. Определим линейный оператор $P(t)$ в $\mathfrak{M}$ следующим образом

$$P(t)\bar{g}(\cdot)=\int_{\Omega}\bar{g}(\omega)e^{itX(\omega)}p(\cdot,\ d\omega).$$

Пусть $R(z,\ t)$ и $R(z)$ — резольвентные операторы соответственно для $P(t)$ и $P=P(0)$. Если

$$\|P(t)-P\|<\frac{1}{\|R(z)\|},$$

то

$$R(z,\ t)=\sum_{k=0}^{\infty}R(z)\Big[\big(P(t)-P\big)R(z)\Big]^k \tag{12}$$

(см. [1]). Обозначим через I_1 и I_2 окружности с центрами соответственно в точках 1 и 0 и радиусами $\rho_1=\frac{1-\rho}{3}$ и $\rho_2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\rho$.

Как известно (см. [1], лемма 1.1), существует такое $\varepsilon>0$, что при $\|P(t)-P\|<\varepsilon$

$$P^n(t)=\lambda^n(t)P_1(t)+P^n(t)P_2(t), \tag{13}$$

где

$$P_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{I_1}R(z,\ t)\,dz,\qquad P_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{I_2}R(z,\ t)\,dz,$$

$$\lambda(t)=\frac{\big(P(t)P_1(t)\psi,\ p\big)}{\big(P_1(t)\psi,\ p\big)}, \tag{14}$$

ψ — функция, тождественно равная 1, $p=p(\cdot)$ — стационарное распределение. Символом $(\bar{g},\ \mu)$, $\bar{g}\in\mathfrak{M}$, $\mu\in\mathfrak{M}^*$, обозначается функционал $\int\bar{g}(\omega)\mu(d\omega)$, а ε можно положить равным $\frac{1}{2}M^{-2}(\rho)$, где

$$M(\rho)=\frac{1}{1-\rho}\Big[2\cdot 3^{k_0}\cdot k_0(1+2\rho)+3\Big],$$

(см. [2], стр. 72). Поскольку

$$\|P(t)-P\|\leqslant m_\gamma|t|^\gamma, \tag{15}$$

где (см. (6))

$$m_\gamma=\sup_{\omega'}\int_{\Omega}|X_1(\omega)|^\gamma p(\omega',\ d\omega),$$

то разложение (13) справедливо для

$$|t|<\frac{1}{\big(2M^2(\rho)m_\gamma\big)^{1/\gamma}}.$$

Так как

$$f_n(t)=Me^{it\bar{S}_n}=\left(P^n\left(\frac{t}{B_n}\right)\psi,\ p\left(\frac{t}{B_n}\right)\right),$$

где $\bar{S}_n=\frac{S_n}{B_n}$ и $p(t,\ A)=\int_A e^{itX_1(\omega)}p(d\omega)$, то для $\frac{|t|}{B_n}<\frac{1}{\big(2M^2(\rho)m_\gamma\big)^{1/\gamma}}$

$$Me^{itS_n}=\lambda^n\left(\frac{t}{B_n}\right)\left(P_1\left(\frac{t}{B_n}\right)\psi,\ p\left(\frac{t}{B_n}\right)\right)+\left(P^n\left(\frac{t}{B_n}\right)P_2\left(\frac{t}{B_n}\right)\psi,\ p\left(\frac{t}{B_n}\right)\right). \tag{16}$$

В дальнейшем оператор $P_1(0)$ будем обозначать через P_1. Очевидно, что

$$P_1 g = \int_\Omega g(\omega)\, p(d\omega).$$

С другой стороны имеем

$$\begin{aligned} \left(P(t) P_1(t)\psi,\ p\right) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t), \\ \left(P_1(t)\psi,\ p\right) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t), \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} B_k(t) &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{l_1} z R(z) A^k(z,\ t)\, dz\, \psi,\ p\right), \\ C_k(t) &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{l_1} R(z) A^k(z,\ t)\, dz\, \psi,\ p\right) \end{aligned} \tag{18}$$

и

$$A(z,\ t) = \left(P(t) - P\right) R(z)$$

(см. [1]). Так как

$$B_1(t) = \int_\Omega e^{itX_1(\omega)} p(d\omega) - 1 = f(t) - 1; \qquad C_1(t) = 0,$$

то из соотношений (13)–(15) следует

$$\ln \lambda(t) = \ln\left[g(t) + \omega(t) + \sum_{k=2}^{\infty} B_k(t)\right] - \ln\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} C_k(t)\right], \tag{19}$$

где $\omega(t) = f(t) - g(t)$.

При $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, имеем

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\Omega(x) = \sum_{u=0}^{r-\varkappa} \frac{(it)^{\varkappa+u}}{(\varkappa+u)!}\, \mu_{\varkappa+u} + o(|t|^{r_1}), \tag{20}$$

$$g(t) = e^{-\lambda c |t|^\alpha} = \sum_{s \geq 0;\ s\alpha \leq r_1} \frac{(-1)^s \lambda^s c^s}{s!} |t|^{s\alpha} + o(|t|^{r_1}), \tag{21}$$

где

$$c = \exp\left[-i\frac{\pi}{2}\left(1 - |1-\alpha|\, \beta\, \mathrm{sgn}\, t\right)\right]. \tag{22}$$

Так как из соотношения

$$R(z) = \frac{1}{z-1} P_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (P^k - P_1)\, z^{-k-1} \tag{23}$$

следует $R(z)\psi = \frac{P_1}{z-1}$ (см. [1]), то

$$B_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{z}{(z-1)^2} P_1 \left[\left(P(t) - P\right) R(z)\right]^{j-1} \left(P(t) - P\right) dz\, \psi. \tag{24}$$

Если преобразуем выражение (24) для $B_j(t)$, подставляя вместо оператора $R(z)$ его выражение (23), то получим „знакопеременный" ряд, слагаемые которого будут иметь вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{z}{(z-1)^2}\, r(z)\, dz\, P_1 P(t)\, \overline{P}^{(k_1)}(t) \ldots \overline{P}^{(k_{m-1})}(t) \left[P^{(k_m)}(t) - P_1 P(t)\right] \psi, \tag{25}$$

где через $\overline{P}^{(k_i)}(t)$ обозначен или оператор $P^{(k_i)}(t)$, или оператор $P_1P^{(k_i)}(t)$, $r(z)$ — функция, имеющая вид

$$\frac{z^{-l}}{(z-1)^s}, \quad 0 \leqslant l = l(k_1, \ldots, k_m) \leqslant \infty, \quad 0 \leqslant s < j-3; \quad 0 \leqslant k_i \leqslant \infty;$$
$$1 \leqslant i \leqslant m \quad \text{и} \quad 1 \leqslant m \leqslant k-1.$$

Нетрудно видеть, что выражение

$$P_1P(t)\overline{P}^{(k_1)}(t) \ldots \overline{P}^{(k_m)}(t)\psi \tag{26}$$

является характеристической функцией суммы

$$X_1 + \hat{X}_{k_1} + \ldots + \hat{X}_{k_m}. \tag{27}$$

Здесь $\overline{X}_{k_i}$ равно случайной величине X_{k_i}, если в выражении (26) оператор $\overline{P}^{(k_i)}(t) = P^{(k_i)}(t)$, и $X_{k_i} = Y_i$, если $\overline{P}^{(k_i)}(t) = P_1P^{(k_i)}(t)$.

Пусть

$$F_{m+1}^{(\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_m)}(x)$$

функция распределения суммы (27), и

$$C(k_1, \ldots, k_m) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1} \frac{z}{(z-1)^2} r(z)\,dz,$$

где $\hat{k}_i$ равно k_i, если в сумме (27) $\hat{X}_{k_i} = X_{k_i}$, и $\hat{k}_i = 0$, если $\hat{X}_{k_i} = Y_i$; $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда выражение (25) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1} \frac{z}{(z-1)^2} r(z)\,dz\,P_1P(t)\overline{P}^{(k_1)}(t) \ldots \overline{P}^{(k_{m-1})}(t)\left[P^{(k_m)}(t) - P_1P^{(k_m)}(t)\right]\psi =$$
$$= C(k_1, \ldots, k_m)\int e^{itx}\,d\Omega_{m+1}^{(\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_{m-1}, \bar{k}_m)}(x).$$

Если в выражении для $B_j(t)$ сгруппируем с одинаковыми коэффициентами все члены вида (25), то получим

$$B_j(t) = b_{j1}(t) + b_{j2}(t) + \ldots + b_{jj-1}(t), \tag{28}$$

где

$$b_{j1}(t) = -\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_{j-1}=1}^{\infty}(k_1+k_2+\ldots+k_{j-1})\Big\{\int e^{itX}\,d\Omega_j^{(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_{j-1})}(x) -$$
$$-\sum_{i=1}^{j-2}\int e^{itx}\,d\Omega_{j-1}^{(\bar{k}_1, \ldots, \overline{k_i+k}_{i+1}, \ldots, \bar{k}_{j-1})}(x) +$$
$$+\sum_{i=2}^{j-2}\int e^{itx}\,d\Omega_{j-2}^{(\bar{k}_1, \ldots, \overline{k_{i-1}+k_i+k}_{i+1}, \ldots, \bar{k}_{j-1})}(x) - \ldots +$$
$$+(-1)^j\int e^{itx}\,d\Omega_2^{(\overline{k_1+k_2+\cdots+k}_{j-1})}(x)\Big\}; \tag{29}$$

$$b_{j2}(t) = \sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_{j-2}=1}^{\infty}(k_1+\ldots+k_{j-2})(k_1+\ldots+k_{j-2}+1)\times$$
$$\times\Big\{\big(f(t)-1\big)\int e^{itx}\,d\Omega_{j-1}^{(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_{j-2})}(x) - \big(f(t)-1\big)\times$$
$$\times\sum_{l=2}^{j-1}\int e^{itx}\,d\Omega_{j-2}^{(k_1, \ldots, \overline{k_{l-1}+k}_l, \ldots, \bar{k}_{j-1})}(x) + \ldots +$$

$$+(-1)^{j-1}\Big(f(t)-1\Big)\int e^{itx}\,d\Omega_2^{(\overline{k_1+k_2+\dots+k_{j-1}})}(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{j-3}\int e^{itx}\,d\Omega_{i-1}^{(\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_i)}(x)\cdot\int e^{itx}\,d\Omega_{j-i-1}^{(\overline{k}_{i+1},\dots,\overline{k}_{j-2})}(x)+\dots\Big\},\quad\dots,\tag{30}$$

$$b_{jj-1}(t)=(-1)^{j-1}\sum_{k_1=1}^{\infty}(j-1)\,k_1(k_1+1)\dots(k_1+j-2)\Big(f(t)-1\Big)^{j-2}\times$$

$$\times\int e^{itx}\,d\Omega_2^{(\overline{k}_1)}(x).\tag{31}$$

Из соотношений (28—31) видно, что $B_j(t)$ представляет сумму, слагаемые которой могут быть следующих трёх видов (коэффициенты пропускаем): либо

$$\int e^{itx}\,d\Omega_s^{(\overline{k_{i_1}+\dots+k_{i_1+l_1}},\dots,\overline{k_{i_q}+\dots+k_{i_q+l_q}})}(x),\quad\Big(i_m=1,\dots,j-l_m-2;$$

$$l_m=0,\dots,j-1;\quad q=1,\dots,\left[\frac{j-1}{2}\right];\quad 1\leqslant m\leqslant q;\quad 2\leqslant s\leqslant j\Big);\tag{32}$$

либо

$$\Big(f(t)-1\Big)^p\int e^{itx}\,d\Omega_s^{(\overline{k_{i_1}+\dots+k_{i_1+l_1}},\dots,\overline{k_{i_q}+\dots+k_{i_q+l_q}})}(x),\tag{33}$$

$$\Big(i_m=1,\dots,j-p-l_m-2;\quad l_m=0,\dots,j-p-1;\quad q=1,\dots,\left[\frac{j-p-1}{2}\right];$$

$$1\leqslant m\leqslant q;\quad 2\leqslant s\leqslant j-p;\quad 1\leqslant p\leqslant j-2\Big);$$

либо

$$\int e^{itx}\,d\Omega_{s_1}^{(\overline{k_{i_1}+\dots+k_{i_1+l_1}},\dots,\overline{k_{i_{q_1}}+\dots+k_{i_{q_1}+l_{q_1}}})}(x)\times\dots\times$$

$$\times\int e^{itx}\,d\Omega_{s_v}^{(\overline{k_{i_{q_{v-1}}}+\dots+k_{i_{q_{v-1}}+l_{q_{v-1}}}},\dots,\overline{k_{i_{q_v}}+\dots+k_{i_{q_v}+l_{q_v}}})}(x),\tag{34}$$

$$\Big(v=2,\dots,\left[\frac{j-1}{2}\right];\quad q_m=0,\dots,j-3;\quad l_{q_m}=0,\dots,j-3;$$

$$s_m=2,\dots,\left[\frac{j}{2}\right],\quad m=1,\dots,v\Big);$$

где $[x]$ означает целую часть x. Но

$$\int e^{itx}\,d\Omega_s^{(\overline{k_{i_1}+\dots+k_{i_1+l_1}},\dots,\overline{k_{i_q}+\dots+k_{i_q+l_q}})}(x)=$$

$$=\sum_{u=2}^{r}\frac{(it)^u}{u!}\,\bar{\mu}_u(k_{i_1}+\dots+k_{i_1+l_1},\dots,k_{i_q}+\dots+k_{i_q+l_q})+$$

$$+o\Big(|t|^{r_1}\,\bar{\nu}_{r_1}(k_{i_1}+\dots+k_{i_1+l_1},\dots,k_{i_q}+\dots+k_{i_q+l_q})\Big)\tag{35}$$

и

$$\Big(f(t)-1\Big)^p\int e^{itx}\,d\Omega_s^{(\overline{k_{i_1}+\dots+k_{i_1+l_1}},\dots,\overline{k_{i_q}+\dots+k_{i_q+l_q}})}(x)=$$

$$=\Big[\int e^{itx}\,d\Omega(x)+\Big(g(t)-1\Big)\Big]^p\int e^{itx}\,d\Omega_s^{(\overline{k_{i_1}+\dots+k_{i_1+l_1}},\dots,\overline{k_{i_q}+\dots+k_{i_q+l_q}})}(x)=$$

$$=\sum_{\substack{u\geqslant 2;\ s\geqslant 0;\ u+s\geqslant p+2\\ u+s\alpha\leqslant r_1}}\Big(C_{us}(k_1,\dots,k_{j-p-1})(it)^u|t|^{s\alpha}+$$

$$+o\Big(|t|^{r_1}\,\bar{\nu}_{r_1}(k_{i_1}+\dots+k_{i_1+l_1},\dots,k_{i_q}+\dots+k_{i_q+l_q})\Big),\tag{36}$$

где $C_{us}(k_1, \ldots, k_{j-p-1})$ — комбинации из λc, $\mu_{\varkappa+m}$ и $\bar{\mu}_v(k_{i_1}+\ldots+k_{i_1+l_1}, \ldots, k_{i_q}+\ldots+k_{i_q+l_q})$; здесь $0 \leqslant m \leqslant u-\varkappa$; $2 \leqslant v \leqslant u$.

Аналогично получаем, что выражение (34) представляется в виде

$$\sum_{u \geqslant 2s;\ su\alpha \leqslant r_1} C'_u(k_1, \ldots, k_{j-1})(it)^u + o\Big(|t|^{r_1}\bar{\nu}_{r_1}(k_{i_1}+\ldots+k_{i_1+l_1}, \ldots, k_{i_q}+\ldots+$$

$$+k_{i_q+l_{q_1}}) \ldots \bar{\nu}_{r_1}(k_{i_{q_{v-1}}}+\ldots+k_{i_{q_{v-1}}+l_{q_{v-1}}}, \ldots, k_{i_{q_v}}+\ldots+k_{i_{q_v}+l_{q_v}})\Big), \tag{37}$$

где $C'_u(k_1, \ldots, k_{j-1})$ — комбинации из $\bar{\mu}_p(k_{i_1}+\ldots+k_{i_1+l_1}, \ldots, k_{i_{q_1}}+\ldots+k_{i_{q_1}+l_{q_1}}), \ldots, \bar{\mu}_p(k_{i_{q_{v-1}}}+\ldots+k_{i_{q_{v-1}}+l_{q_{v-1}}}, \ldots, k_{i_{q_1}}+\ldots+k_{i_{q_v}+l_{q_v}})$, $2 \leqslant p \leqslant u$.

Из соотношений (28)—(37) окончательно получаем, что

$$B_j(t) = \sum_{\substack{u \geqslant 2,\ s \geqslant 0 \\ u+s\alpha \leqslant r_1}} C_j(u, s)(it)^u |t|^{s\alpha} + o(|t|^{r_1}), \tag{38}$$

где $C_j(u, s)$ — комбинации из $(\lambda c)^m$, $\mu_\varkappa, \ldots, \mu_{\varkappa+u}$,

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_{j-1}=1}^{\infty} (k_1+\ldots+k_{j-1})\bar{\mu}_v(k_1, \ldots, k_{j-1}), \ldots,$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1(k_1+1)\ldots(k_1+j-2)\bar{\mu}_v(k_1), \quad 1 \leqslant m \leqslant s, \quad 2 \leqslant v \leqslant u;$$

согласно условию (7) последние ряды сходятся.

Так как

$$C_j(t) = \bar{b}_{j1}(t) + \ldots + \bar{b}_{jj-1}(t),$$

где $\bar{b}_{ji}(t)$ отличаются от $b_{ji}(t)$ $(i=1, \ldots, j-1)$ только коэффициентами (например, чтобы получить $\bar{b}_{j1}(t)$ из $b_{j1}(t)$, нужно только коэффициент $k_1+k_2+\ldots+k_{j-1}$ заменить коэффициентом $k_1+k_2+\ldots+k_{j-1}+1$), то

$$C_j(t) = \sum_{\substack{u \geqslant 2,\ s \geqslant 0 \\ u+s\alpha \leqslant r_1}} C'_j(u, s)(it)^u |t|^{s\alpha} + o(|t|^{r_1}), \tag{39}$$

где $C'_j(u, s)$ — комбинации из $(\lambda c)^m$, $\mu_\varkappa, \ldots, \mu_{\varkappa+u}$,

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_{j-1}=1}^{\infty} (k_1+\ldots+k_{j-1}+1)\bar{\mu}_v(k_1, \ldots, k_{j-1}), \ldots,$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} (k_1+1)\ldots(k_1+j-1)\bar{\mu}_v(k_1); \quad 2 \leqslant v \leqslant u.$$

С другой стороны, имея ввиду (15) и (18), получаем (см. [1], лемма 1.3)

$$\|B_j(t)\| \leqslant Q_1^j |t|^{\gamma(j-1)+\gamma_1} m_\gamma^{j-1} \int_\Omega |X_1(\omega)|^{\gamma_1} p(d\omega),$$

и (40)

$$\|C_j(t)\| \leqslant Q_2^j |t|^{\gamma(j-1)+\gamma_1} m_\gamma^{j-1} \int_\Omega |X_1(\omega)|^{\gamma_1} p(d\omega),$$

где Q_1 и Q_2 — постоянные, не зависящие от r, γ, γ_1 и X_1, $\gamma_1 = \min(1, \alpha-\varepsilon_1)$, и ε_1 — сколь угодно малое фиксированное положительное число $\big($см. (5)$\big)$.

Из соотношений (19)–(21), (38)–(40) следует

$$\ln\lambda(t)=\ln\Big[1+\sum_{j=1}^{r_1}B_j(t)+o(|t|^{r_1})\Big]-\ln\Big[1+\sum_{j=2}^{r_1}C_j(t)+o(|t|^{r_1})\Big]=$$

$$=\ln\Big[1+\sum_{s\geqslant 1;\ s\alpha\leqslant r_1}\frac{(-1)^s\lambda^s c^s}{s!}|t|^{s\alpha}+\sum_{\substack{u\geqslant 0,\ s\geqslant 0\\ \varkappa+u+s\alpha\leqslant r_1}}A_1(u,s)\,(it)^{\varkappa+u}|t|^{s\alpha}+o(|t|^{r_1})\Big]-$$

$$-\ln\Big[1+\sum_{\substack{u\geqslant 2,\ s\geqslant 0\\ u+s\alpha\leqslant r_1}}A_1'(u,s)(it)^u|t|^{s\alpha}+o(|t|^{r_1}),\tag{41}$$

где $A_1(u,s)$ – линейная форма от $\mu_{\varkappa+u}$ и $C_j(u,s)$, $2\leqslant j\leqslant r$; а $A_1'(u,s)$ – линейная форма от $C_j'(u,s)$, $2\leqslant j\leqslant r$. Следовательно, существует такое положительное постоянное Δ, что для $|t|<\Delta n^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\ln\lambda^n\Big(\frac{t}{B_n}\Big)=n\sum_{s\geqslant 1,\ s\alpha\leqslant r_1}\frac{(-1)^s\lambda^s c^s}{s!}\Big|\frac{t}{B_n}\Big|^{s\alpha}+$$

$$+n\sum_{\substack{u\geqslant 0;\ s\geqslant 0\\ \varkappa+u+s\alpha\leqslant r_1}}A_2(u,s)\Big(\frac{it}{B_n}\Big)^{\varkappa+u}\Big|\frac{t}{B_n}\Big|^{s\alpha}+o\Big(n\Big|\frac{t}{B_n}\Big|^{r_1}\Big),\tag{42}$$

где $A_2(u,s)$ – комбинации из $(\lambda c)^m$, $[A_1(u,s)]^l$, $[A_2(u,s)]^v$, $1\leqslant m\leqslant\frac{r}{\alpha}$, $1\leqslant$ $\leqslant l\leqslant r-\varkappa$, $1\leqslant v\leqslant\frac{r}{2}$. Отсюда для $|t|\leqslant\Delta n^{\frac{1}{\alpha}}$ получаем

$$\lambda^n\Big(\frac{t}{B_n}\Big)=g^n\Big(\frac{t}{B_n}\Big)\Big[1+\sum A_3(s,u,v,w)\,n^{v+w}\Big|\frac{t}{B_n}\Big|^{(2+s)\alpha v+s\alpha w}\times$$

$$\times\Big(\frac{it}{B_n}\Big)^{\varkappa w+u}+o\Big(\frac{|t|^{r_1}+|t|^{\varkappa\frac{r_1-\alpha}{\varkappa-\alpha}}}{B_n^{r_1-\alpha}}\Big)\Big]+O(|t|\rho_2^n).\tag{43}$$

Здесь суммируется по всем $s\geqslant 0$, $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, $w\geqslant 0$ таким образом, что $v+w\geqslant 1$ и $(2+s)\alpha v+s\alpha w+\varkappa w+u-(v+w)\alpha\leqslant r_1$. Коэффициенты $A_3(u,s,v,w)$ получаются из λc, $A_2(u,s)$ и их степеней, не превосходящих r.

Далее рассмотрим выражение $\Big(P_1\Big(\frac{t}{B_n}\Big)\psi,\ p\Big(\frac{t}{B_n}\Big)\Big)$. Аналогично (17) и (18) получаем, что

$$\Big(P_1\Big(\frac{t}{B_n}\Big)\psi,\ p\Big(\frac{t}{B_n}\Big)\Big)=f\Big(\frac{t}{B_n}\Big)+\sum_{j=1}^{\infty}\overline{C}_j\Big(\frac{t}{B_n}\Big),\tag{44}$$

где

$$\overline{C}_j(t)=\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{l_1}R(z)A^k(z,t)\,dz\,\psi,\ p(t)\Big),\tag{45}$$

Такими же самыми рассуждениями, которыми пользовались при выводе соотношений (38)–(40), получаем, что

$$\overline{C}_j(t)=\sum_{\substack{u\geqslant 2,\ s\geqslant 0\\ u+s\alpha\leqslant r_1-\alpha}}C_j''(u,s)(it)^u|t|^{s\alpha}+o(|t|^{r_1})\tag{46}$$

и

$$\|\overline{C}_j(t)\|\leqslant Q_3^j|t|^{j\gamma+\gamma_1}m_\gamma^j\int_\Omega|X_1(\omega)|^{\gamma_1}p(d\omega),\tag{47}$$

где $C_j''(u, s)$ — комбинации из $(\lambda c)^m$, $\mu_\varkappa, \ldots, \mu_{\varkappa+u}$,

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_j=1}^{\infty} (k_1+\ldots+k_j+1)\bar{\mu}_v(k_1, \ldots, k_j), \ldots,$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} (k_1+1)\ldots(k_1+j)\bar{\mu}_v(k_1);$$

$2 \leqslant v \leqslant u$; $1 \leqslant k_i \leqslant \infty$; $1 \leqslant i \leqslant j$; Q_3 — постоянное, не зависящее от j, γ и X_l, $1 \leqslant l \leqslant \infty$.

Тогда согласно (44)—(47) имеем

$$\left(P_1\left(\frac{t}{B_n}\right)\psi,\ p\left(\frac{t}{B_n}\right)\right) = 1 + \sum_{s \geqslant 1;\ s\alpha \leqslant r_1} \frac{(-1)^s \lambda^s c^s}{s!}\left|\frac{t}{B_n}\right|^{s\alpha} +$$
$$+ \sum_{\substack{u \geqslant 0,\ s \geqslant 0 \\ u+s\alpha \leqslant r_1-\alpha}} A_4(u, s)\left(\frac{it}{B_n}\right)^{\varkappa+u}\left|\frac{t}{B_n}\right|^{s\alpha} + o\left(\left|\frac{t}{B_n}\right|^{r_1-\alpha}\right), \qquad (48)$$

где $A_4(u, s)$ — линейная форма от $\mu_{\varkappa+u}$ и $C_j''(u, s)$; $2 \leqslant j \leqslant r$.

Так как

$$\left(P^n\left(\frac{t}{B_n}\right)P_2\left(\frac{t}{B_n}\right)\psi,\ p\left(\frac{t}{B_n}\right)\right) = O(t\rho_2^n) \qquad (49)$$

(см. [1]), то из (16), (43), (48) и (49) получаем

$$f_n(t) = g(t)\Bigg[1 + \sum A(s, u, v, w)\, n^{v+w-1}\left|\frac{t}{B_n}\right|^{(1+s)\alpha v + s\alpha w}\left(\frac{it}{B_n}\right)^{\varkappa w+u} +$$
$$+ o\left(\frac{|t|^{r_1-\alpha} + |t|^{\varkappa\frac{r_1-\alpha}{\varkappa-\alpha}}}{B_n^{r_1-\alpha}}\right)\Bigg] + O(|t|\rho_2^n), \qquad (50)$$

где суммируется по всем $s \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$ таким образом, что $v + w \geqslant 1$ и $(1+s)\alpha v + s\alpha w + \varkappa w + u - (v+w)\alpha \leqslant r_1$; коэффициенты $A(s, u, v, w)$ получаются из $(\lambda c)^s$, $A_4(s, u)$ и $A_3(s, u, v, w)$ линейных комбинаций. Тогда из (50) окончательно имеем

$$f_n(t) = g(t)\Bigg[1 + \sum{}' A(s, u, v, w)\,|t|^{(1+s)\alpha v + s\alpha w}(it)^{\varkappa w+u} \times$$
$$\times n^{w - s(v+w) - 1 - \frac{\varkappa w+u}{\alpha}} + o\left(\frac{|t|^{r_1-\alpha} + |t|^{\varkappa\frac{r_1-\alpha}{\varkappa-\alpha}}}{n^{\frac{r_1}{\alpha}-1}}\right)\Bigg] + O(|t|\rho_2^n),$$

где Σ' означает суммирование по всем $s \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$ таким, что $v + w \geqslant 1$ и $(1+s)\alpha v + s\alpha w + \varkappa w + u - (v+w)\alpha \leqslant r_1$; коэффициенты $A(s, u, v, w)$ ограниченны.

Этим завершается доказательство теоремы 1.

Теорема 2 доказывается с помощью теоремы 1 совершенно также, как соответствующее предложение для однородных цепей Маркова в случае нормального предельного закона (см. [2], теорема 5 и лемма 1.5).

В заключение выражаю глубокую благодарность В. А. Статулявичюсу за постановку задачи и ценные указания при её решении.

Институт физики и математики
Академии Наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
30.XII.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теория вероятн. и её применения, 2, 4, 1957.
2. С. В. Нагаев, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, Теория вероятн. и её применения, 6, 1, 1961.
3. В. М. Золотарев, Аналог асимптотического разложения Эджворта—Крамера для случая сближения с устойчивыми законами распределения, Труды VI Всесоюзн. совещания по теории вероятн. и мат. статистике, Вильнюс, 1962.
4. В. М. Золотарев, Об одной новой точке зрения на предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, Труды VI Всесоюзн. сов. по теории вероятн. и мат. статистике, Вильнюс, 1962.
5. В. А. Статулявичюс, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для неоднородных цепей Маркова, Лит. матем. сбор. 1, 1—2, 1961.
6. С. Х. Сиражединов. Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Ташкент, 1955.
7. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949.
8. В. М. Золотарев, О выборе нормирующих констант в нарастающих суммах независимых случайных величин, Труды Московского физико-технич. ин-та, 7 (1961) 158—161.

RIBINIŲ TEOREMŲ HOMOGENINĖMS MARKOVO GRANDINĖMS PATIKSLINIMO KLAUSIMU

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Reziumė)

Šiame darbe įrodomos teoremos, patikslinančios atsitiktinių dydžių, surištų homogenine Markovo grandine su bet kokia būsenų aibe, normuotų sumų konvergavimą į stabilius dėsnius su rodikliu $0<\alpha<2$, $\alpha\neq 1$.

ÜBER EINE VERSCHÄRFUNG DER GRENZWERTSÄTZE FÜR DIE HOMOGENEN MARKOFFSCHEN KETTEN

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit werden die Sätze bewiesen, die die Konvergenz normierter Summen auf stabile Gesetze mit dem Exponent $0<\alpha<2$, $\alpha\neq 1$, die in der homogenen Markoffschen Kette mit beliebiger Menge von Zustanden verknüpften Zufallsgrößen, verschärfen.