III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1

1963

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ КЛАССОВ H_p В СЛУЧАЕ $p<1$

В. КАБАЙЛА

В различных работах, напр. [1] и [2], решается следующая задача интерполяции. Пусть $\{z_k\}$ — последовательность точек внутри единичного круга. Требуется найти необходимые и достаточные условия, налагаемые на $\{z_k\}$, чтобы для любой ограниченной последовательности комплексных чисел $\{c_k\}$ существовала ограниченная и аналитическая в единичном круге функция, интерполирующая в точках z_k значения $c_k (k=1,\ 2,\ \ldots)$. Если последовательность $\{z_k\}$ обладает такими свойствами, то ее называют *интерполяционной последовательностью для класса B* ограниченных и аналитических в единичном круге функций. В [1] и [2] доказано такое утверждение: *для того, чтобы $\{z_k\}$ была интерполяционной последовательностью для B, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись неравенства:*

$$|b_k(z_k)|\geqslant\delta>0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \delta \text{ не зависит от } k), \tag{1}$$

где $b_k(z)$ — произведение Бляшке с нулями в $z_1,\ \ldots,\ z_{k-1},\ z_{k+1},\ \ldots$

В статье [1] задача обобщается и для классов H_p в случае $p\geqslant 1$, причем, как выясняется, для класса H_p имеется смысл искать необходимые и достаточные условия, налагаемые на $\{z_k\}$, при выполнении которых для любой комплексной последовательности $\{c_k\}$, удовлетворяющей условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^p(1-|z_k|^2)<\infty,$$

существует функция класса H_p, интерполирующая в точках z_k значения c_k. Последовательность $\{z_k\}$, обладающая указанными свойствами, может быть названа *интерполяционной последовательностью для класса H_p*. Искомые условия, налагаемые на $\{z_k\}$, оказываются теми же, как и для класса B, именно, условиями (1).

В настоящей статье аналогичная задача решается для H_p в случае $0<p<1$, причем результат, как и следовало ожидать, остается таким же, как и в случае $p\geqslant 1$, именно, искомые необходимые и достаточные условия определяются неравенствами (1).

Вспомогательные предложения и определения изложены в п. п. 1 и 2. В п. 1 изложены тривиальные сведения о некоторых линейных пространствах. В дальнейшем из п. 1 используется только определение псевдонормированного пространства и лемма об ограниченности линейного оператора. Обзор работ, связанных с рассматриваемой задачей, см. в [1].

1. Рассмотрим некоторые комплексные или действительные линейные множества.

Определение. Комплексное (действительное) линейное множество X будем называть *псевдонормированным пространством*, если каждому элементу $x \in X$ сопоставлено вещественное число $\|x\|$ (называемое *псевдонормой* элемента x) так, чтобы соблюдались следующие условия:

1) $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0$ эквивалентно $x = \Theta$ (Θ – нулевой элемент),

2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ для любого комплексного (действительного) a,

3) существует такое число C, $C \geqslant 1$, что $\|x+y\| \leqslant C(\|x\| + \|y\|)$ для любых x и y из X.

Таким образом, нормированные пространства есть частный случай ($C = 1$) псевдонормированных пространств. Многие определения и свойства нормированных пространств (напр. теоремы об обратных операциях и др.) обобщаются для псевдонормированных пространств*.

Ниже приводимые определения вполне аналогичны и согласованы с соответствующими определениями в нормированных пространствах.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов псевдонормированного пространства X назовем *сходящейся к пределу* x^*, $x^* \in X$ (обозн. $x_n \to x^*$), если $\|x_n - x^*\| \to 0$; скажем, что последовательность *сходится в себе*, если $\|x_n - x_m\| \to 0$ (при n, $m \to \infty$). Если в X каждая сходящаяся в себе последовательность сходится к пределу, то псевдонормированное пространство называется *полным*.

Очевидными являются следующие свойства:

1) если $x_n \to x^*$ и $x_n \to x^{**}$, то $x^* = x^{**}$;

2) каждая сходящаяся к пределу последовательность сходится в себе;

3) псевдонорма, вообще, не является непрерывным функционалом в X, т. е. из $x_n \to x^*$, вообще, не следует $\|x_n\| \to \|x^*\|$, но если $x_n \to \Theta$ (Θ – нулевой элемент линейного множества X), то $\|x_n\| \to 0$ и наоборот: из $\|x_n\| \to 0$ следует $x_n \to \Theta$.

Пусть X и Y – два псевдонормированных пространства. Оператор A, отображающий X в Y называется *непрерывным*, если из $x_n \to x^*$ (x_n, $x^* \in X$) следует $Ax_n \to Ax^*$ (Ax_n, $Ax^* \in Y$). Оператор A назовем *ограниченным*, если существует такая константа M, что $\|Ax\| \leqslant M \cdot \|x\|$ для всех $x \in X$.

Лемма. *Пусть X и Y – псевдонормированные пространства. Для того, чтобы аддитивный и однородный оператор, отображающий X в Y, был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.*

Доказательство. Допустим, что непрерывный и однородный оператор A, отображающий X в Y, неограничен. Тогда для любой последовательности чисел $\{M_n\}$, $M_n \to +\infty$ можно указать такие $x_n (x_n \in X)$, что $\|Ax_n\| > M_n \|x_n\|$, $n = 1, 2, \ldots$. Образуем $\bar{x}_n = M_n^{-1} \|x_n\|^{-1} x_n$. Ясно, что

* Из таких теорем, которые непосредственно не обобщаются на псевдонормированные пространства, можно указать теоремы о продолжении функционала и некоторые связанные с продолжением функционалов теоремы [3]. Объясняется это тем, что псевдонормированное пространство, вообще, не является локально-выпуклым топологическим пространством и не имеет, вообще говоря, выпуклых окрестностей нуля, отличных от всего пространства.

$\tilde{x}_n \to \Theta_X$. Тогда, с одной стороны, $A\tilde{x}_n \to A\Theta_X = \Theta_Y$ (где Θ_X и Θ_Y — нулевые элементы соответственно в X и Y), и потому $\| A\tilde{x}_n \| \to 0$. С другой стороны,

$$\| A\tilde{x}_n \| = \frac{1}{M_n \| x_n \|} \| Ax_n \| > 1.$$

Следовательно, непрерывный и однородный оператор должен быть ограниченным.

Достаточность условия следует из неравенств:

$$\| Ax_n - Ax^* \| = \| A(x_n - x^*) \| \leqslant M \| x_n - x^* \|^*. \qquad \times$$

Примерами псевдонормированных пространств могут быть классы функций L^p, H_p (см. [5]) при $0 < p < 1$, и класс последовательностей l^p $(0 < p < 1)$, если псевдонормы определить соответственно:

$$\| f \|_{L^p} = \left\{ \int_a^b | f(t) |^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\| f \|_{H_p} = \left\{ \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(re^{i\vartheta}) |^p \, d\vartheta \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\| w \|_{l^p} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} | a_k |^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \text{где} \quad w = (a_1, a_2, \ldots).$$

Замечание. Нетрудно убедиться, что H_p и l^p $(p < 1)$ являются полными пространствами.

2. Рассмотрим класс H_p $(0 < p < 1)$ аналитических в единичном круге функций, удовлетворяющих условию $\| f \|_{H_p} < \infty$, и класс l^p $(0 < p < 1)$ комплексных последовательностей, удовлетворяющих условию $\| w \|_{l^p} < \infty$. Если в пространствах H_p и l^p ввести метрику с помощью формул соответственно $\rho(f, g) = \| f - g \|_{H_p}^p$ и $\rho(v, w) = \| v - w \|_{l^p}^p$, то H_p и l^p обращаются в полные метрические пространства. Для них, в частности, справедлива *теорема о замкнутом графике оператора* (см., напр. [6]): *пусть M и M' — полные метрические линейные пространства; если однородный и аддитивный оператор T со значениями в M', определенный на всем M, имеет замкнутый график, то оператор T непрерывен.*

Следует заметить, что из сходимости последовательности $\{f_n\}$ к пределу f^* в пространстве H_p (т. е. из $\| f_n - f^* \| \to 0$) следует равномерная сходимость функций $\{f_n(z)\}$ внутри единичного круга к функции $f^*(z) \in H_p$.

3. Пусть $\{z_k\}$ — данная последовательность точек внутри единичного круга, $b_n(z)$ — функция Бляшке с нулями в точках z_k, $k \neq n$ (и только в этих точках). Определим оператор T_p, отображающий класс H_p $(p > 0)$ в множество числовых последовательностей:

$$T_p f = \left(f(z_1)(1 - | z_1 |^2)^{\frac{1}{p}}, \ \ldots, \ f(z_k)(1 - | z_k |^2)^{\frac{1}{p}}, \ \ldots \right). \qquad (2)$$

---

* Проведенное здесь доказательство повторяет доказательство аналогичной теоремы о функционалах [4].

Сформулированную в начале настоящей статьи интерполяционную задачу для классов H_p можно теперь описать так: установить необходимые и достаточные условия для $\{z_k\}$, при которых $l_p \subset T_p H_p$ ($T_p H_p$ — множество последовательностей $T_p f$ для всех $f \in H_p$), т. е. для любой последовательности $w = \{a_k\}$, $w \in l^p$, будет существовать такая функция $f(z) \in H_p$, что $f(z_k)(1-|z_k|^2)^{\frac{1}{p}} = a_k$ ($k = 1, 2, \ldots$). В [1] доказана теорема: *для того, чтобы было $T_p H_p = l^p$ ($p \geqslant 1$), необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись неравенства* (1). Из доказательства этой теоремы видно, что необходимость условия (1) следует из $l^p \subset T_p H_p$, тем самым из $l^p \subset T_p H_p$ следует $l^p = T_p H_p$ (из $l^p \subset T_p H_p$ следует (1), а из (1) следует $l^p = T_p H_p$).

Используя (частично) метод, предложенный в [1], и результаты статьи [7], можно доказать аналогичную теорему и в случае $p < 1$.

Теорема 1. *Пусть $\{z_k\}$ — последовательность точек единичного круга. Чтобы для любой последовательности $\{c_k\}$ комплексных чисел, удовлетворяющих условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p (1-|z_k|^2) < \infty, \quad 0 < p < 1, \tag{3}$$

существовала функция класса H_p, интерполирующая в точках z_k значения c_k (т. е. для того, чтобы $\{z_k\}$ была интерполирующей последовательностью), *необходимо и достаточно выполнение условия* (1).

Иными словами: *для того, чтобы $l^p \subset T_p H_p$, необходимо и достаточно выполнение условия* (1).

Доказательство достаточности. В теореме 1 статьи [7] доказано, что условия

$$a) \ \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|) < \infty,$$

$$б) \ \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{b_k(z_k)} \right|^p (1-|z_k|^2) < \infty, \quad p < 1$$

достаточны для существования функции $f(z) \in H_p$, интерполирующей в точках z_k значения c_k. Если выполнено условие (1) и, тем самым, произведение Бляшке $b(z)$ сходится, то условие *а*) удовлетворено [5], а условие *б*) можно записать так:

$$б') \ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p (1-|z_k|^2) < \infty.$$

Следовательно, если условие (1) выполнено, то для каждой последовательности $\{c_k\}$, удовлетворяющей условию (3), существует функция класса H_p, интерполирующая в точках z_k значения c_k.

Доказательство необходимости. Пусть для всех $\{c_k\}$, удовлетворяющих (3), существует $f(z) \in H_p$ такая, что $f(z_k) = c_k$ ($k = 1, 2, \ldots$). Обозначим $a_k = c_k (1-|z_k|^2)^{\frac{1}{p}}$. Тогда $f(z_k)(1-|z_k|^2)^{\frac{1}{p}} = a_k$ и, кроме того, из (3) следует, что $w = \{a_k\} \in l^p$. Рассмотрим оператор T_p, определенный равенствами (2). Так как для любых $w \in l^p$ существует $f \in H_p$ такая, что $T_p f = w$, то $l^p \subset T_p H_p$. Обозначим буквой N подпространство класса H_p, составленное из функций, обращающихся в нуль в точках z_k ($k=1, 2, \ldots$). Очевидно, $T_p f = \Theta_{l^p}$, если $f \in N$. Элементы фактор-пространства H_p/N будем обозначать $\bar f$ (очевидно, $\bar f$ — множество функций класса H_p, принимающих одинаковые значения в точках z_k, $k=1, 2, \ldots$). Отображение $\bar T_p^{-1}$ метрического пространства l^p на полное метрическое пространство H_p/N, определяемое оператором T_p ($\bar T_p \bar f = T_p f$ для всех $f \in \bar f$) имеет замкнутый график. Убедимся в этом. Согласно п. 2 настоящей статьи

$$\rho(w,\ v) = \| w - v \|_{l^p}^p,\quad w \in l^p,\quad v \in l^p;$$

$$\rho(f,\ g) = \| f - g \|_{H^p}^p,\quad f \in H_p,\quad g \in H_p.$$

Обозначим

$$\| \bar f \| = \inf_{f \in \bar f} \| f \|_{H_p}.$$

Для доказательства замкнутости графика оператора $\bar T_p^{-1}$ допустим, что $w_n \in l^p$, $\| w_n \|_{l^p} \to 0$ и $\| \bar T_p^{-1} w_n - \bar f^* \| \to 0$, и покажем, что $\| \bar f^* \| = 0$, т. е. что $f(z_k) = 0$ ($k=1, 2, \ldots$) для всех $f \in \bar f^*$. Действительно, если $w_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots)$, то из $\| w_n \|_{l^p} \to 0$ следует

$$\lim_{n \to \infty} a_k^{(n)} = 0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Обозначим $f(z_k)(1 - |z_k|^2)^{\frac{1}{p}} = a_k$ для $f \in \bar f^*$.

Из $\| \bar T_p^{-1} w_n - \bar f^* \| \to 0$ следует, что каждому $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$\| \bar T_p^{-1} w_n - \bar f^* \| = \inf \| f \|_{H_p} < \varepsilon,\ \text{ для } n > N; \tag{5}$$

здесь inf берется для всех $f \in H_p$ и удовлетворяющих равенствам

$$f(z_k)(1 - |z_k|^2)^{\frac{1}{p}} = a_k^{(n)} - a_k. \tag{6}$$

Из (5) и из оценки модуля функций класса H_p [8]

$$|f(z)|(1 - |z|^2)^{\frac{1}{p}} \leqslant \| f \|_{H_p},\quad f \in H_p,\quad p > 0$$

следует

$$|f(z_k)|(1 - |z_k|^2)^{\frac{1}{p}} = |a_k^{(n)} - a_k| < \varepsilon \tag{7}$$

для $n > N$ и $k=1, 2, \ldots$. Из (4) и (7) получаем $a_k = 0$ ($k=1, 2, \ldots$). Следовательно, график оператора $\bar T_p^{-1}$ замкнут. Из теоремы о замкнутом графике (см. п. 2) следует, что $\bar T_p^{-1}$ — непрерывный, а из леммы (см. п. 1), что $\bar T_p^{-1}$ — ограниченный:

$$\| \bar T_p^{-1} w \| \leqslant M \| w \|_{l^p}$$

для всех $w \in l^p$. Отсюда следует, что для любых последовательностей $w \in l^p$ с нормой $\| w \|_{l^p} = 1$ существуют интерполирующие функции $f(z) \in H_p$,

$\{f(z_k)(1-|z_k|^2)^{\frac{1}{p}}\}=w$, с равномерно ограниченными нормами, т. е. $T_p f=w$ и $\|f\|_{H_p}\leqslant M'$ (M' не зависит от выбора w на единичной сфере $\|w\|_{l^p}=1$). В частности, существуют такие $f_n(z)\in H_p$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, что

$$f_n(z_k)(1-|z_k|^2)^{\frac{1}{p}}=\delta_{n,k}, \quad (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

и

$$\|f_n\|_{H_p}\leqslant M'.$$

Функции $F_n(z)=f_n(z)/b_n(z)$, очевидно, принадлежат классу H_p и $\|F_n\|_{H_p}=\|f_n\|_{H_p}$ [5]. Используя оценки модуля для функций класса H_p, получаем:

$$|F_n(z_n)|\leqslant\frac{\|F_n\|_{H_p}}{(1-|z_n|^2)^{\frac{1}{p}}}\leqslant\frac{M'}{(1-|z_n|^2)^{\frac{1}{p}}}.$$

С другой стороны,

$$|F_n(z_n)|=\left|\frac{f_n(z_n)}{b_n(z_n)}\right|=\frac{1}{|b_n(z_n)|(1-|z_n|^2)^{\frac{1}{p}}}.$$

Из последних двух неравенств следует (1). Теорема доказана.

Теорема 2. *Если условие* (1) *выполнено, то* $T_p H_p=l^p$ $(0<p<1)$.

Пусть (1) выполнено. Покажем, что $T_p H_p\subset l^p$. Пусть $f(z)$ — произвольная (не равна тождественно нулю) функция класса H_p и $B(z)$ — произведение Бляшке, нули которой совпадают с нулями $f(z)$. Функция $F(z)=f(z)/B(z)$ принадлежит классу H_p и $\|F\|_{H_p}=\|f\|_{H_p}$. Очевидно, $|F(z)|>|f(z)|$ в единичном круге. Пусть $p'\geqslant 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(z_k)|^p(1-|z_k|^2)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left|[F(z_k)]^{\frac{p}{p'}}\right|^{p'}(1-|z_k|^2). \tag{8}$$

Но $\Phi(z)=[F(z)]^{\frac{p}{p'}}$ принадлежит классу $H_{p'}$ и $p'\geqslant 1$. Так как из (1) следует $T_{p'}H_{p'}=l^{p'}$ в случае $p'\geqslant 1$ [1], то и ряды (8) сходятся. Следовательно, $T_p H_p\subset l^p$. Из теоремы 1 в случае выполнения (1), имеем $l^p\subset T_p H_p$, следовательно $T_p H_p=l^p$.

Из теорем 1 и 2 следует.

Теорема 3. *Для того, чтобы было* $T_p H_p=l^p$ *необходимо и достаточно выполнение условия* (1).

Вильнюсский гос. университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
1.VI.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. H. S. Shapiro, A. L. Shields. Amer. J. Math., 83 (1961), 513—532.
2. L. Carleson. Amer. J. Math., 80 (1958), 921—930.
3. M. M. Day. Bull. Amer. Math. Soc., 46 (1940), 816—823.
4. S. Banach. Teorja operacyj, 1, Warszawa, 1931.
5. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
6. М. М. Дэй. Нормированные линейные пространства, М., Изд. ин. лит., 1961.
7. V. Kabaila. Vilniaus univ. darbai, XXXIII, mat. fiz., 9 (1960), 15—19.
8. A. J. Macintyre, W. W. Rogosinski. Acta Math., 82 (1950), 275—325.

H_p KLASĖS INTERPOLIACINĖS SEKOS $p<1$ ATVEJU

V. KABAILA

(Reziumė)

Tegul $\{z_k\}$—vienetinio skritulio taškų seka, $b_n(z)$—Bliaškės funkcija su nuliais taškuose z_k, $k\neq n$ (ir tik šiuose taškuose). Operatorius T_p:

$$T_p f=(f(z_1)(1-|z_1|^2)^{\frac{1}{p}}, \ldots, f(z_k)(1-|z_k|^2)^{\frac{1}{p}}, \ldots), \quad f\in H_p,$$

atvaizduoja H_p klasės funkcijas į skaičių sekas [1]. Tegul l^p—sekų $w=(a_1, a_2, \ldots)$, kurioms $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p<\infty$, aibė, $T_p H_p$—visų H_p klasės funkcijų vaizdų aibė.

1 teorema. *Tam, kad galiotų pareinamybė $l^p\subset T_p H_p$ $(p<1)$, būtina ir pakankama, kad galiotų nelygybės:*

$$|b_k(z_k)|\geqslant\delta>0 \quad (k=1, 2, \ldots, \delta \text{ nepriklauso nuo } k). \tag{1}$$

2 teorema. *Jei yra patenkintos nelygybės* (1), *tai $l^p=T_p H_p$ $(p<1)$.*

3 teorema. (Išvada iš 1 ir 2 teoremos.) *Tam, kad galiotų pareinamybė $l_p=T_p H_p$ $(p<1)$, būtina ir pakankama, kad būtų patenkintos nelygybės* (1).

INTERPOLATING SEQUENCES FOR H_p WITH $p<1$

V. KABAILA

(Summary)

Let $\{z_n\}$ be a sequence of points in the unit circle ($z_n\neq z_k$ if $n\neq k$).

Operator T_p:

$$T_p f=(f(z_1)(1-|z_1|^2)^{\frac{1}{p}}, \ldots, f(z_n)(1-|z_n|^2)^{\frac{1}{p}}, \ldots), \quad f\in H_p,$$

defines a mapping from the H_p into a set of sequences [1]. Let l^p be a set of sequences $w=(a_1, a_2, \ldots)$ with $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p<\infty$.

Theorem 1. *The necessary and sufficient condition on $\{z_k\}$ in order that $l^p\subset T_p H_p$ with $0<p<1$ is that*

$$\prod_{n\neq k}\left|\frac{z_k-z_n}{1-\bar{z}_n z_k}\right|\geqslant\delta>0 \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Theorem 2. *If $\{z_k\}$ satisfy condition* (1), *then $l^p=T_p H_p$ with $0<p<1$.*

Theorem 3 (*the corollary of theorem* 1 *and* 2). *The necessary and sufficient condition for $\{z_k\}$ in order that $l^p=T_p H_p$ with $0<p<1$ is that $\{z_k\}$ satisfy condition* (1).