III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
1963

О ФУНКЦИЯХ С РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТЬЮ, ОТЛИЧНОЙ ОТ НУЛЯ

Э. КИРЬЯЦКИЙ

В настоящей работе, как и в предыдущих заметках [1] и [2], мы изучаем свойства функций из класса $K_n(D)$ (местами этот класс будем обозначать просто K_n). Напомним определение класса $K_n(D)$: регулярная и однозначная в области D (область D не содержит бесконечно удаленной точки) функция $f(z)$ принадлежит классу $K_n(D)$, если n-я разделенная разность $[z_0 z_1 \ldots z_n]$ этой функции не равна нулю при любых попарно различных $z_0, z_1 \ldots, z_n$, взятых из области D.

Пусть граница области D содержит некоторое множество M изолированных точек. Тогда функция $f(z)$ будет регулярной во всех конечных точках множества M, за исключением, быть может, одной из них, в которой она будет иметь простой полюс. Если к области D присоединить точки множества M, в которых функция регулярная, то эта функция будет принадлежать классу K_n и в расширенной области [1].

Если множество M содержит бесконечно удаленную точку, то в этой точке функция $f(z)$ или регулярна или имеет полюс. Кратность этого полюса ограничена числом n, а при наличии еще простого полюса в какой-нибудь конечной точке, кратность полюса в бесконечно удаленной точке не превышает числа $n-1$, так как функция $f(z)$, $f(z)\in K_n(D)$, не более чем n-листна.

Таким образом, множество M содержит не более двух особых точек, из которых одна лежит в конечной плоскости, а другая в бесконечности.

Нам будет удобно расширить область D, присоединив к ней эти точки, и считать каждую функцию из класса $K_n(D)$, принадлежащей классу K_n и в расширенной области.

Принадлежность классу $K_n(D)$, где область D может быть вышеуказанной расширенной областью, можно установить также следующим образом: регулярная (за исключением, возможно, изолированных особых точек) и однозначная в области D функция $f(z)$ принадлежит классу $K_n(D)$, если выражение $(f(z)+P_{n-1}(z)$ имеет в области D не более чем n нулей, каков бы ни был многочлен $P_{n-1}(z)$ степени $n-1$ [1].

1. Если функция $f(z)$ однолистна в области D, то, как известно, функция $f\left(\frac{a\zeta+b}{a\zeta+d}\right)$ однолистна в области D^*, где D^* является прообразом области D при отображении

$$z=\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}.$$

Другими словами, класс $K_1(D)$ инвариантен относительно дробно-линейного преобразования. В некотором смысле аналогичное утверждение справедливо и в классе $K_n(D)$, $n>1$, а именно, имеет место следующая.

Теорема 1. *Если $f(z)\in K_n(D)$, то и функция*

$$f_*(\zeta)=(c\zeta+d)^{n-1}f\left(\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}\right)\in K_n(D^*), \tag{1}$$

где D^* прообраз области D при отображении

$$z=\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что класс $K_n(D)$ инвариантен относительно преобразования

$$z=a\zeta+b. \tag{2}$$

Действительно, для n-ой разделенной разности функции $f(a\zeta+b)$ имеем:

$$[\zeta_0\zeta_1\ \ldots\ \zeta_n]_{f(a\zeta+b)}=a^{-n}[z_0z_1\ \ldots\ z_n]_{f(z)}\neq 0,$$

где $z_i=a\zeta_i+b$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

Пусть теперь

$$z=\frac{1}{\zeta}. \tag{3}$$

По условию теоремы и согласно второму определению класса $K_n(D)$, данному во введении, выражение

$$f(z)+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$$

при любых комплексных постоянных a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_1, a_0 имеет в области D не более n нулей. Отсюда, в свою очередь, следует, что число нулей выражения

$$\zeta^{n-1}f\left(\frac{1}{\zeta}\right)+a_{n-1}+a_{n-2}\zeta+\ldots+a_1\zeta^{n-2}+a_0\zeta^{n-1}$$

не превышает n в области $D^*(0)$ (здесь $D^*(0)$ означает область D^* с выключенной нулевой точкой). В силу произвольности комплексных постоянных a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_1, a_0, получаем, что функция

$$\zeta^{n-1}f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\in K_n[D^*(0)].$$

Учитывая сказанное во введении об изолированных граничных точках, можно написать,что

$$\zeta^{n-1}f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\in K_n(D^*).$$

Теорема верна и в общем случае, так как дробно-линейное отображение является результатом отображений вида (2) и (3).

Теорема 2. *Пусть F — множество всех нормированных функций*

$$f(z)=z^n+a_2z^{n+1}+\ldots$$

из класса $K_n(E)$, E — единичный круг, и $\alpha_2^{(n)}=\max\limits_{f\in F}|a_2|$.

Тогда справедливо неравенство

$$\frac{(1-r)^{(\alpha_2^{(n)}-1)\frac{n+1}{2}}}{(1+r)^{(\alpha_2^{(n)}+1)\frac{n+1}{2}}} \leqslant \frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leqslant \frac{(1+r)^{(\alpha_2^{(n)}-1)\frac{n+1}{2}}}{(1-r)^{(\alpha_2^{(n)}+1)\frac{n+1}{2}}}, \tag{4}$$

$$|\arg f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n+1}{2}\,\alpha_2^{(n)} \ln\frac{1+z}{1+z}^{*},\quad r=|z|.$$

Заметим, как показано в [2], что $\alpha_2^{(n)} \leqslant 2$.

Доказательство. Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Для регулярной в единичном круге функций $f(z)$ справедливы соотношения:*

$$\frac{\partial^n}{\partial\zeta^n}\left[(1+\bar z\zeta)^{n-1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)\right] = \frac{(1-|z|^2)^n}{(1+\bar z\zeta)^{n+1}} \cdot \frac{d^n f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)}{d\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)^n}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial\zeta^{n+1}}\left((1+\bar z\zeta)^{n-1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)\right] = \frac{(1-|z|^2)^n}{(1+\bar z\zeta)^{n+2}}\left[\frac{(1-|z|^2}{1+\bar z\zeta} \cdot \frac{d^{n+1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)}{d\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)^{n+1}} - \right.$$

$$\left. -(n+1)\bar z\,\frac{d^n f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)}{d\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)^n}\right]. \tag{6}$$

В частности, при $\zeta=0$ получаем:

$$\left[(1+\bar z\zeta)^{n-1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)\right]^{(n)}_{\zeta=0} = (1-|z|^2)^n f^{(n)}(z), \tag{5'}$$

$$\left[(1+\bar z\zeta)^{n-1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)\right]^{(n+1)}_{\zeta=0} = (1-|z|^2)^n\left[(1-|z|^2) f^{(n+1)}(z) - (n+1)\bar z f^{(n)}(z)\right]. \tag{6'}$$

Доказательство равенства (5) проведем по индукции. Для $n=1$ оно очевидно. Пусть наше утверждение верно для некоторого натурального n. Представим выражение

$$(1+\bar z\zeta)^n f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)$$

в виде произведения двух сомножителей

$$(1+\bar z\zeta)\left[(1+\bar z\zeta)^{n-1} f\left[\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)\right]$$

и продифференцируем n раз по ζ, пользуясь формулой Лейбница. Тогда получим:

$$\frac{\partial^n}{\partial\zeta^n}\left\{(1+\bar z\zeta)\left[(1+\bar z\zeta)^{n-1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)\right]\right\} = n\bar z\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial\zeta^{n-1}}\left[(1+\bar z\zeta)^{n-1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)\right] +$$

$$+(1+\bar z\zeta)\,\frac{\partial^n}{\partial\zeta^n}\left[(1+\bar z\zeta)^{n-1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)\right] = n\bar z\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial\zeta^{n-1}}\left[(1+\bar z\zeta)^{n-1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)\right] +$$

$$+\frac{(1-|z|^2)^n}{(1+\bar z\zeta)^n} \cdot \frac{d^n f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)}{d\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)^n}.$$

* Здесь $\arg f^{(n)}(z)$ обозначает ту ветвь многозначной функции в единичном круге, которая обращается в нуль в точке $z=0$. Напомним, что $f^{(n)}(z) \neq 0$, $|z|<1$.

Дифференцируем последнее выражение еще раз:

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial\zeta^{n+1}}\left[(1+\bar z\zeta)^n f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)\right]=n\bar z\,\frac{\partial^n}{\partial\zeta^n}\left[(1+\bar z\zeta)^{n-1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{(1-|z|^2)^n}{(1+\bar z\zeta)^n}\cdot\frac{d^n f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)}{d\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)^n}\right].$$

Для первого слагаемого по предположению имеем:

$$n\bar z\,\frac{\partial^n}{\partial\zeta^n}\left[(1+\bar z\zeta)^{n-1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)\right]=n\bar z\,\frac{(1-|z|^2)^n}{(1+\bar z\zeta)^{n+1}}\cdot\frac{d^n f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)}{d\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)^n}.$$

Для второго слагаемого получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{(1-|z|^2)^n}{(1+\bar z\zeta)^n}\cdot\frac{d^n f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)}{d\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)^n}\right]=\frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{(1+\bar z\zeta)^{n+2}}\cdot\frac{d^{n+1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)}{d\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)^{n+1}}-$$

$$-\frac{n\bar z(1-|z|^2)^n}{(1+z\zeta)^{n+1}}\cdot\frac{d^n f\left(\frac{\zeta+z}{1+z\zeta}\right)}{d\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)^n}.$$

Складывая оба эти равенства, получаем окончательно

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial\zeta^{n+1}}\left[(1+\bar z\zeta)^n f\left(\frac{\zeta+z}{1+z\zeta}\right)\right]=\frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{(1+\bar z\zeta)^{n+2}}\cdot\frac{d^{n+1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)}{d\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)^{n+1}}.$$

Таким образом, равенства (5) и (5′) доказаны. Продифференцировав еще раз (5) по ζ получаем (6), а также (6′).

Перейдём теперь к доказательству теоремы. Пусть функция $f(z)=z^n+$ $+a_2z^{n+1}+\ldots$ принадлежит классу K_n в $|z|<1$. Функция

$$\varphi(\zeta)=(1+\bar z\zeta)^{n-1} f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)$$

по первой теореме будет принадлежать классу K_n в $|\zeta|<1$ при любом z из $|z|<1$. Отсюда следует, что нормированная функция

$$\Phi(\zeta)=\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(0)-\frac{\varphi'(0)}{1!}\zeta-\ldots-\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\zeta^{n-1}}{\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}}=\zeta^n+b_2\zeta^{n+1}+\ldots$$

при любом z из $|z|<1$ будет принадлежать классу K_n в $|\zeta|<1$. Учитывая (5′) и (6′), для коэффициента b_2 получаем

$$b_2=\frac{\varphi^{(n+1)}(0)}{(n+1)\varphi^{(n)}(0)}=\frac{(1-|z|^2)f^{(n+1)}(z)-(n+1)\bar z f^{(n)}(z)}{(n+1)f^{(n)}(z)}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[(1-|z|^2)\frac{f^{(n+1)}(z)}{f^{(n)}(z)}-(n+1)\bar z\right]$$

и, так как $|b_2|\leqslant\alpha_2^{(n)}$, то имеем:

$$\left|z\,\frac{f^{(n+1)}(z)}{f^{(n)}(z)}-\frac{(n+1)r^2}{1-r^2}\right|\leqslant\frac{\alpha_2^{(n)}(n+1)r}{1-r^2},\quad r=|z|.$$

Заменяя в левой части этого неравенства модуль на вещественную и мнимую части и замечая, что

$$Re\left\{z\frac{f^{(n+1)}(z)}{f^{(n)}(z)}\right\}=r\frac{\partial}{\partial r}\ln|f^{(n)}(z)|,$$

$$I_m\left\{z\frac{f^{(n+1)}(z)}{f^{(n)}(z)}\right\}=r\frac{\partial}{\partial r}\arg f^{(n)}(z),$$

получаем два неравенства:

$$\frac{(n+1)(r-\alpha_2^{(n)})}{1-r^2}\leqslant\frac{\partial}{\partial r}\ln|f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{(n+1)(r+\alpha_2^{(n)})}{1-r^2},$$

$$-\frac{(n+1)\,\alpha_2^{(n)}}{1-r^2}\leqslant\frac{\partial}{\partial r}\arg f^{(n)}(z)\leqslant\frac{(n+1)\,\alpha_2^{(n)}}{1-r^2},$$

интегрируя которые по r от нуля до r, получаем неравенства, указанные в теореме.

Заметим, что при $n=1$ мы получаем известную теорему искажения для однолистных и нормированных в единичном круге функций.

Следствие 1. *Если функция $f(z)=z^n+a_2z^{n+1}+\dots$ регулярна в единичном круге E и принадлежит классу $K_n(E)$, то*

$$|f^{(k)}(z)|\leqslant\frac{n!}{(n-k-1)!}\int_0^r(r-t)^{n-k-1}\varphi(t)\,dt,\quad k=0,\ 1,\ \dots,\ n-1,$$

где

$$\varphi(t)=\frac{(1+t)^{(\alpha_2^{(n)}-1)\frac{n+1}{2}}}{(1-t)^{(\alpha_2^{(n)}+1)\frac{n+1}{2}}}.$$

При $n=1$ получаем известную оценку модуля нормированной и однолистной в единичном круге функции.

Указанные неравенства получаются $(n-k)$-кратным интегрированием обеих частей неравенства

$$f^{(n)}(z)\leqslant n!\,\varphi(r)$$

по радиусу, соединяющему точки 0 и z с последующим использованием известной формулы Коши для кратного интеграла ([5] гл. 4 § 2).

До сих пор мы рассматривали функции, принадлежащие классу K_n в единичном круге. Докажем теперь общую теорему искажения для функций из класса K_n, аналогичную общей теореме искажения для однолистных функций (см. также [3] § 4).

Теорема 3. *Если дана область B и замкнутое ограниченное множество $A\subset B$, то существует конечное положительное постоянное M такое, что для всякой функции $f(z)$, регулярной и принадлежащей классу $K_n(B)$, $n\geqslant1$, и для любых z_1, $z_2\in A$ имеем;*

$$\frac{1}{M}\leqslant\left|\frac{f^{(n)}(z_1)}{f^{(n)}(z_2)}\right|\leqslant M. \tag{7}$$

Доказательство. Будем считать, что A есть замкнутая область, лежащая в B, так как каждое замкнутое множество можно заключить в некоторую замкнутую область, лежащую в B, и если неравенство (7) доказано для последней, то оно справедливо и для любого в ней лежащего множества A с тем же M. Пусть A есть ограниченная замкнутая область и d — расстояние её до границы B; $d>0$. Покроем плоскость z сеткой квадратов со сторонами, равными $\frac{d}{4}$. Замкнутые квадраты сетки, содержащие точки из A, составят вместе замкнутую область $\bar{B}'$, причём $A\subset\bar{B}$, $\bar{B}'\subset B$. Пусть z_1 и z_2 — две любые точки множества A. Тогда в области B' найдётся такая цепь точек $\zeta_1=z_1$, ζ_2, $\ldots$, $\zeta_p=z_2$, что каждые две последовательные точки этой цепи лежат в соседних квадратах сетки и число их p не превосходит числа N всех квадратов, составляющих $\bar{B}'$. Расстояние между точками ζ_k и ζ_{k+1}, $k=1, 2, \ldots, p-1$ не превосходит $\frac{d}{\sqrt{2}}<\frac{3}{4}d$. Круги $|z-\zeta_k|\leqslant d$, $k=1, 2, \ldots, p$ целиком лежат в области B. Поэтому функция

$$\frac{n!\,[f(\zeta_k+\zeta d)-P_{n-1}(\zeta)]}{d^n f^{(n)}(\zeta_k)}=\zeta^n+c_2\zeta^{n+1}+\ldots$$

при каждом K будет принадлежать классу K_n в $|\zeta|<1$. Дифференцируя последнюю функцию n раз по ζ и учитывая теорему 2, имеем:

$$\left|\frac{f^{(n)}(\zeta_k+\zeta d)}{f^{(n)}(\zeta_k)}\right|\leqslant m,\quad |\zeta|<\frac{3}{4}.$$

В частности, при $\zeta=\frac{\zeta_{k+1}-\zeta_k}{d}$, $|\zeta|<\frac{3}{4}$ получаем:

$$\left|\frac{f^{(n)}(\zeta_{k+1})}{f^{(n)}(\zeta_k)}\right|\leqslant m.$$

Полагая $k=1, 2, \ldots, p-1$ и перемножая полученные неравенства, находим:

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_2)}{f^{(n)}(z_1)}\right|\leqslant m^{p-1}\leqslant m^{N-1}=M.$$

Число M не зависит от вида функции $f(z)$ и выбора точек z_1 и z_2. Меняя в последнем неравенстве местами z_1 и z_2, получим другое неравенство, входящее в теорему.

В случае $n=1$ получаем хорошо известную общую теорему искажения для однолистных функций.

2. Для получения дальнейших результатов нам понадобится

Теорема 4. *Если функция $F_n(z)=z^{n-1}f(z)=z^n+a_2z^{n+1}+\ldots$ принадлежит классу $K_n(E)$ в единичном круге E, то для любого фиксированного ζ из E функция*

$$\psi_{n-1}(z,\ \zeta)=\frac{\zeta z^{n-1}}{f(\zeta)}\cdot\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\tag{8}$$

принадлежит классу $K_{n-1}(E)$ и нормирована условиями: $\psi_{n-1}(0,\ \zeta)=0$, $\psi^{1}_{n-1}(0,\ \zeta)=0$, $\ldots$, $\psi^{(n-2)}_{n-1}(0,\ \zeta)=0$, $\psi^{(n-1)}_{n-1}(0,\ \zeta)=(n-1)!$. Кроме того, коэффициенты $C_k(\zeta)$ этой функции в разложении её в ряд Маклорена

$$\psi_{n-1}(z,\ \zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k(\zeta)\,z^{n+k-2}$$

имеют вид

$$C_1(\zeta)=1,\quad C_k(\zeta)=\frac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\ldots-a_{k-1}\zeta^{k-1}}{\zeta^{k-1}f(\zeta)},\quad k>1.\tag{9}$$

Доказательство. Так как функция $F_n(z)=z^{n-1}f(z)$ принадлежит классу $K_n(E)$, то первая разделённая разность $[z\zeta]$ функции $F_n(z)$ принадлежит относительно z классу $K_{n-1}(E)$ [2]. Рассматривая первую разделённую разность $[z\zeta]$ функции $F_n(z)$ как функцию от z, разложим её по z в ряд Маклорена

$$[z\zeta]=[0\zeta]+\frac{\partial[0\zeta]}{\partial z}z+\ldots+\frac{\partial^p[0\zeta]}{p!\,\partial z^p}z^p+\ldots.$$

Но, как известно (см., например, [4] § 4 гл. 1), для производных имеет место равенство

$$\frac{\partial^p[z\zeta]}{p!\,\partial z^p}=[\underbrace{zz\,\ldots\,z}_{n+1\text{ раз}}\zeta],$$

поэтому функцию $[z\zeta]$ можно представить в несколько ином виде

$$[z\zeta]=[0\zeta]+[00\zeta]z+\ldots+[\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ раз}}\zeta]z^{n-2}+[\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ раз}}\zeta]z^{n-1}+\ldots. \tag{10}$$

Далее, функция

$$\frac{[z\zeta]-[0\zeta]-[00\zeta]z-\ldots,-[\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ раз}}\zeta]z^{n-2}}{[\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ раз}}\zeta]} \tag{11}$$

также принадлежит классу $K_{n-1}(E)$. Покажем, что эта функция совпадает с функцией (8), указанной в теореме.

Действительно, для разделённых разностей в (11) справедливы следующие очевидные равенства*:

$$[z\zeta]=\frac{z^{n-1}f(z)-\zeta^{n-1}f(\zeta)}{z-\zeta},$$

$$[\underbrace{00\ldots0}_{m\text{ раз}}\zeta]=\zeta^{n-m-1}f(\zeta),\quad 1\leqslant m\leqslant n,$$

на основании которых мы можем написать

$$\frac{\dfrac{z^{n-1}f(z)-\zeta^{n-1}f(\zeta)}{z-\zeta}-\zeta^{n-2}f(\zeta)-\zeta^{n-3}f(\zeta)z-\ldots-f(\zeta)z^{n-2}}{\dfrac{f(\zeta)}{\zeta}}=$$

$$=\frac{z^{n-1}f(z)-\zeta^{n-1}f(\zeta)-\zeta^{n-2}f(\zeta)z-\ldots-f(\zeta)z^{n-1}+\zeta^{n-1}f(\zeta)+\zeta^{n-2}f(\zeta)z+\ldots+\zeta f(\zeta)z^{n-2}}{\dfrac{f(\zeta)}{\zeta}(z-\zeta)}=$$

$$=\frac{\zeta z^{n-1}}{f(\zeta)}\cdot\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}.$$

Перейдем теперь к вычислениям коэффициентов $C_k(\zeta)$, $k=1,2,\ldots$. Из (10) и (11) следует, что $C_k(\zeta)$ можно вычислить по формуле

$$C_k(\zeta)=\frac{[\underbrace{00\ldots0}_{n+k-1\text{ раз}}\zeta]}{[\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ раз}}\zeta]},\quad k\geqslant 1,$$

из которой, в частности, следует, что $C_1(\zeta)=1$.

* Второе из этих равенств легко получить из известного представления разделенной разности контурным интегралом [4] § 4 гл. 1.

Таким образом, для полного доказательства теоремы, нам осталось установить, что

$$[\underbrace{00\ldots0}_{n+k-1\ \text{раз}}\zeta]=\frac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\ldots-a_{k-1}\zeta^{k-1}}{\zeta^k},\quad k>1.$$

Будем действовать по индукции относительно k. Если $k=2$, то

$$[\underbrace{00\ldots0}_{n+1\ \text{раз}}\zeta]=\frac{[\underbrace{00\ldots0}_{n+1\ \text{раз}}]-[\underbrace{00\ldots0}_{n\ \text{раз}}\zeta]}{-\zeta}=\frac{1-\dfrac{f(\zeta)}{\zeta}}{-\zeta}=\frac{f(\zeta)-\zeta}{\zeta^2}$$

и утверждение справедливо. Пусть оно справедливо для некоторого натурального k. В этом случае имеем:

$$[\underbrace{00\ldots0}_{n+k\ \text{раз}}\zeta]=\frac{[\underbrace{00\ldots0}_{n+k\ \text{раз}}]-[\underbrace{00\ldots0}_{n\ \text{раз}}\zeta]}{-\zeta}=\frac{a_k-\dfrac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\ldots-a_{k-1}\zeta^{k-1}}{\zeta^k}}{-\zeta}=$$

$$=\frac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta-\ldots-a_k\zeta^k}{\zeta^{k+1}},$$

и теорема полностью доказана.

Лемма 2. *Пусть дана последовательность функций* $f_n(z)$, $n=1, 2, \ldots,$ *регулярных и однолистных в единичном круге* E *и нормированных условиями:* $f_n(0)=0$, $f_n'(0)=1$. *Пусть также каждая такая функция* $f_n(z)$ *удовлетворяет условию:*

$$z^{n-1}f_n(z)\in K_n(E). \tag{12}$$

Тогда из этой последовательности функций можно выделить подпоследовательность функций $f_{n_k}(z)$, $k=1, 2, \ldots,$ которая равномерно сходится внутри E к однолистной нормированной функции $f(z)$, и

$$z^{n-1}f(z)\in K_n(E) \tag{13}$$

при любом $n\geqslant 1$.

Доказательство. Так как последовательность регулярных функций $f_n(z)$, $n=1, 2, \ldots,$ нормированных и однолистных в единичном круге E, является равномерно ограниченной внутри E, то из неё по принципу сгущения можно выделить подпоследовательность функций $f_{n_k}(z)$, $k=1, 2, \ldots,$ которая по теореме Гурвица равномерно сходится к однолистной и нормированной в единичном круге функции $f(z)$.

Покажем далее, что функция $f(z)$ удовлетворяет (13). Для этого возьмём произвольное натуральное число N и докажем, что

$$z^{N-1}f(z)\in K_N(E). \tag{14}$$

Пусть при этом $n_k\geqslant N$. Согласно (12) имеем:

$$z^{n_k-1}f_{n_k}(z)\in K_{n_k}(E).$$

По теореме 2 из [2] следует, что

$$z^{N-1}f_{n_k}(z)\in K_N(E),\quad n_k\geqslant N.$$

Переходя к пределу по k и воспользовавшись теоремой 2 из [1] получаем 14). В силу произвольного выбора числа N убеждаемся в справедливости (13).

Теорема 5. *Пусть $a_k^{(n)}(\varphi)$ означает k-ый коэффициент в разложении аналитической внутри единичного круга E функции $\varphi(z)$ в ряд Маклорена*

$$\varphi(z)=z^n+a_2^{(n)}(\varphi)z^{n+1}+\ldots+a_k^{(n)}(\varphi)z^{n+k-1}+\ldots.$$

Пусть также функция $\varphi(z)$ принадлежит классу $K_n(E)$ и

$$A_k^{(n)}=\max_{\varphi\in K_n(E)}|a_k^{(n)}(\varphi)|.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}A_k^{(n)}=1.$$

Доказательство. Существование функции $\varphi_n(z)\in K_n(E)$, для которой $|a_k^{(n)}(\varphi_n)|=A_k^{(n)}$, а также, что

$$A_k^{(n)}\geqslant A_k^{(n+1)}\geqslant\ldots \tag{15}$$

доказывались раньше в [2]. Из (15) следует, что последовательность чисел $A_k^{(n)}$, $n=1, 2, \ldots$. имеет предел, который мы обозначим буквой α_k, т. е. положим

$$\lim_{n\to\infty}A_k^{(n)}=\alpha_k. \tag{16}$$

Представим функцию $\varphi_n(z)$ в следующем виде:

$$\varphi_n(z)=z^{n-1}f_n(z)\in K_n(E),$$

где $f_n(z)$ есть аналитическая и однолистная в единичном круге E функция, причём $f_n(0)=0$, $f_n'(0)=1$. Пользуясь леммой 2, выделим из последовательности функций $f_n(z)$ подпоследовательность функций $f_{n_m}(z)$, равномерно сходящуюся к регулярной и нормированной однолистной функции $f(z)$, для которой

$$z^{n-1}f(z)=z^{n-1}(z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots)\in K_n(E) \tag{17}$$

при любом n. Из (16) и (17) следует, что

$$a_k=\alpha_k e^{i\beta},\quad I_m\beta=0.$$

Далее, по теореме 4 получаем, что функция

$$\frac{\zeta z^{n-1}}{f(\zeta)}\cdot\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=z^{n-1}+\ldots+\frac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\ldots-a_{k-1}\zeta^{k-1}}{\zeta^{k-1}f(\zeta)}z^{n+k-2}+\ldots \tag{18}$$

принадлежит классу $K_{n-1}(E)$ при любом $n\geqslant2$ и любом фиксированном из E. Из этого, в свою очередь, следует, что k-ый коэффициент в разложении (18) удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\ldots-a_{k-1}\zeta^{k-1}}{\zeta^{k-1}f(\zeta)}\right|\leqslant A_k^{(n-1)},\quad n\geqslant2,\quad \zeta\in E.$$

Устремляя n в бесконечность, получим неравенство

$$\left|\frac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\ldots-a_{k-1}\zeta^{k-1}}{\zeta^{k-1}f(\zeta)}\right|\leqslant\alpha_k,\quad \zeta\in E. \tag{19}$$

Так как функция $f(\zeta)$ нормирована и однолистна в единичном круге, то она обращается в нуль лишь в точке $\zeta=0$. Кроме того, легко подсчитать, что

$$\lim_{\zeta\to0}\frac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\ldots-a_{k-1}\zeta^{k-1}}{\zeta^{k-1}f(\zeta)}=\lim\frac{\alpha_k e^{i\beta}\zeta^k+a_{k+1}\zeta^{k+1}+\ldots}{\zeta^{k-1}(\zeta+a_2\zeta^2+\ldots)}=\alpha_k e^{i\beta}.$$

Таким образом, функция, стоящая под знаком модуля в левой части неравенства (19), представляет собой функцию, регулярную в единичном круге. Из последнего соотношения видно, что равенство в (19) достигается при $\zeta=0$. Воспользовавшись принципом максимума модуля аналитических функций, получим тождество

$$\frac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\ldots-a_{k-1}\zeta^{k-1}}{\zeta^{k-1}f(\zeta)}\equiv\alpha_k e^{i\beta},$$

из которого следует, что

$$f(\zeta)=\frac{\zeta+a_2\zeta^2+\ldots+a_{k-1}\zeta^{k-1}}{1-\alpha_k e^{i\beta}\zeta^{k-1}}.$$

Покажем, наконец, что $\alpha_k=1$. Если бы было $\alpha_k>1$, то, как нетрудно заметить, функция $f(\zeta)$ имела бы полюс внутри единичного круга. В самом деле, функция $f(\zeta)$ представляет собой отношение двух многочленов. Так как многочлен, стоящий в числителе, обращается в нуль при $\zeta=0$ и степень его не превышает степени многочлена, стоящего в знаменателе, то корни обоих многочленов не могут полностью совпадать. Но $\alpha_k^{-1}<1$, поэтому функция $f(\zeta)$ имеет хотя бы один полюс внутри единичного круга, что невозможно вследствие регулярности этой функции в единичном круге E.

Случай $\alpha_k<1$ также невозможен. Действительно, функция

$$\zeta(1-\zeta)^{-1}=\zeta^n+\zeta^{n+1}+\ldots,$$

все коэффициенты которой равны единице, принадлежит классы $K_n(E)$ при любом $n\geqslant 1$. Поэтому, учитывая (15) и (16), получим

$$A_k^n\geqslant\alpha_k\geqslant 1.$$

Таким образом, остаётся заключить, что $\alpha_k=1$. Теорема доказана.

3. Обозначим через $P(E)$ семейство регулярных в единичном круге функций таких, что каждая функция этого семейства обладает свойством

$$z^{n-1}f(z)\in K_n(E)$$

при любом $n\geqslant 1$ и $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Очевидно, каждая функция семейства $P(E)$ будет нормированной и однолистной в единичном круге E.

Теорема 6. *Пусть функция $f(z)$ принадлежит семейству $P(E)$. Тогда*

$$\frac{|z|}{1+|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{1-|z|},\tag{20}$$

$$\frac{1}{(1+|z|)^2}\leqslant f'(z)\leqslant\frac{1}{(1-|z|)}.\tag{21}$$

Кроме того, для коэффициентов функции $f(z)$ справедливо неравенство

$$|a_k|\leqslant 1,\ k=1,\ 2,\ \ldots\tag{22}$$

Равенство в (20), (21) и (22) достигается для функции $z(1-z)^{-1}$, принадлежащей семейству $P(E)$ [1].

Доказательство. Для коэффициентов a_k функции $f(z)$ справедливо следующее очевидное неравенство (см. теорему)

$$|a_k|<\max_{\varphi\in K_n(E)}|a_k^{(n)}(\varphi)|=A_k^{(n)}$$

при любом $n\geqslant 1$. Устремим n к бесконечности. Тогда, учитывая теорему 5, получим $|a_k|\leqslant 1$, $k=1,\ 2,\ \ldots$.

Так как функция $f(z)$ по условию принадлежит семейству $P(E)$, то, пользуясь теоремой, мы замечаем, что относительно z функция

$$\psi_1(z, \zeta) = \frac{\zeta z}{f(\zeta)} \cdot \frac{f(z)-f(z)}{z-\zeta} \in P(E) \tag{23}$$

при любом фиксированном ζ из единичного круга E. Неравенства для коэффициентов нами уже доказаны, поэтому для второго коэффициента функции $\psi_1(z, \zeta)$, как это следует из (9) теоремы, получаем:

$$|a_2(\psi_1)| = \left| \frac{f(\zeta)-\zeta}{\zeta f(\zeta)} \right| \leqslant 1 \tag{24}$$

или

$$|f(\zeta)| - |\zeta| \leqslant |f(\zeta) - \zeta| \leqslant |\zeta|\,|f(\zeta)|.$$

Решая последнее, относительно модуля $|f(\zeta)|$, получаем правую часть (20):

$$|f(\zeta)| \leqslant \frac{|\zeta|}{1-|\zeta|}.$$

Чтобы получить левую часть (20), запишем неравенство (24) в следующем виде:

$$\left| \frac{1}{f(\zeta)} - \frac{1}{\zeta} \right| \leqslant 1,$$

откуда имеем:

$$\frac{1}{|f(\zeta)|} \leqslant 1 + \frac{1}{|\zeta|}$$

или

$$|f(\zeta)| \geqslant \frac{|\zeta|}{1+|\zeta|},$$

что совпадает с левой частью (20).

Далее, из (23) и (20) следует при $z = \zeta$, что

$$\frac{|\zeta|}{1+|\zeta|} \leqslant \frac{|\zeta|^2 |f'(\zeta)|}{|f(\zeta)|} \leqslant \frac{|\zeta|}{1-|\zeta|},$$

откуда получаем:

$$\frac{1}{(1+|\zeta|)^2} \leqslant |f'(\zeta)| \leqslant \frac{1}{(1-|\zeta|)^2}.$$

Поступила в редакцию
13.XI.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Г. Кирьяцкий. Литовский математический сборник, 1, № 1–2, 1961.
2. Э. Г. Кирьяцкий. Литовский математический сборник, II, № 3, 1962.
3. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат М.–Л., 1952.
4. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей, Гостехиздат, М.–Л., 1952.
5. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М., 1953.

FUNKCIJOS, KURIŲ PADALYTASIS SKIRTUMAS NĖRA LYGUS NULIUI

E. KIRJACKIS

Reziumė

Darbe nagrinėjamos analizinės ir vienareikšmės srityje funkcijos, kurių n-tos eilės padalytasis skirtumas $[z_0 z_1 \ldots z_n]$, $z_0, z_1, \ldots, z_n \in D$ nėra lygus nuliui.

Tokias funkcijas nagrinėjome anksčiau darbuose [1] ir [2].

ÜBER FUNKTIONEN, DIE KEINE NULLGLEICHE DIVIDIERTE DIFFERENZ BESITZEN

E. KIRJATSKY

(Zusammenfassung)

Es werden die im Bereiche D analytischen und eindeutigen Funktionen betrachtet, wobei angenommen wird, dass ihre dividierte Differenz n-ter Ordnung $[z_0 z_1 \dots z_n]$, $z_0, z_1, \dots z_n \in D$, nicht gleich Null ist.

Solche Funktionen haben wir schon früher auch in den Arbeiten [1] und [2] untersucht.