III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2

1963

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ ПРИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЯХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

А. ЯСЮЛЁНИС

С быстрым распространением дискретных электронных вычислительных машин во всех областях науки и техники, вопрос о записи алгорифма в виде, удобном для программирования, становится актуальным. Основные матричные операции легко осуществляются на современных цифровых вычислительных машинах [3]. Применение матричной записи для рядов Фурье, а также для тригонометрических полиномов, не теряет своей простоты, свойственной матричному исчислению как по форме записей алгорифма, так и по его получению. Матричная запись алгорифма умножения рядов Фурье легко дает алгорифм деления тригонометрических полиномов.

1. Матричная запись. Ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

будем считать, как сумму двух скалярных произведений ∞-мерных векторов

$$f(x)=[a]\cdot[\cos nx]+[b]\cdot[\sin nx]. \tag{2}$$

Назовем вектор, координаты которого составляют подряд записанные коэффициенты косинусов, вектором коэффициентов косинусов и обозначим

$$[a]=\left[\frac{a_0}{2},\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n,\ \dots\right]. \tag{3}$$

Аналогично получаем и обозначаем вектор коэффициентов синусов

$$[b]=[b_1,\ b_2,\ \dots\ b_n,\ \dots]. \tag{4}$$

Множество кратных углов: $0x,\ x,\ 2x\ \dots\ nx\ \dots$ косинусов будем считать координатами вектора косинусов и записывать

$$[\cos nx]=[1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \dots\ \cos nx\ \dots]. \tag{5}$$

Аналогично получаем и обозначаем вектор синусов

$$[\sin nx]=[\sin x,\ \sin 2x,\ \dots\ \sin nx\ \dots]. \tag{6}$$

Векторы (5) и (6) назовем тригонометрическими.

Первая координата вектора синусов всегда равна нулю, как $\sin 0x=0$, и поэтому писать ее не будем. Таким образом размерность векторов (3), (4), (5) и (6) одинакова. В практических расчетах размерность n ограниченная, и поэтому в записях векторов (3), (4), (5) и (6), после n-ой координаты, в дальнейшем многоточий ставить не будем. Желая подчеркнуть, что размерность векторов $n=\infty$, будем пользоваться записью вида (3), (4), (5) и (6).

Из записи (2) нетрудно перейти к матричной записи ряда (1)

$$f(x)=[a]\ \{\cos nx\}+[b]\ \{\sin nx\}, \tag{7}$$

где коэффициенты Фурье записаны в матрицах-строках, а косинусы и синусы кратных углов в матрицах-столбцах, обозначаемых в фигурных скобках.

Тождество равенств (1), (2) и (7) непосредственно вытекает из определения скалярного произведения векторов и свойств произведения матриц.

Транспонируя правую часть уравнения (7), получаем другую форму матричной записи

$$f(x)=[\cos nx]\ \{a\}+[\sin nx]\ \{b\}. \tag{8}$$

Следовательно коэффициенты Фурье можно записать в матрицах-строках или в матрицах-столбцах. Тогда косинусы или синусы кратных углов записываются в матрицах-столбцах или матрицах-строках.

Будем пользоваться матричной записью (7).

2. Сложение и вычитание. Ряд (2) и какой-либо другой ряд Фурье, записанный в виде (2)

$$\varphi(x)=[\alpha]\cdot[\cos nx]+[\beta]\cdot[\sin nx], \tag{9}$$

где:

$$[\alpha]=\left[\frac{\alpha_0}{2},\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_n\dots\right] \tag{10}$$

$$[\beta]=[\beta_1,\ \beta_2,\ \dots\ \beta_n\dots] \tag{11}$$

слагаем или вычитаем. В результате этих действий полученный ряд записываем в виде

$$\Psi(x)=[c]\cdot[\cos nx]+[d]\cdot[\sin nx]. \tag{12}$$

Векторы коэффициентов последнего ряда

$$[c]=\left[\frac{c_0}{2},\ c_1,\ c_2,\ \dots\ c_n\ \dots\right] \tag{13}$$

$$[d]=[d_1,\ d_2,\ \dots\ d_n\ \dots] \tag{14}$$

определяем согласно правилам сложения или вычитания векторов:

$$[c]=[a]\pm[\alpha] \tag{15}$$

$$[d]=[b]\pm[\beta]. \tag{16}$$

Умножение рядов Фурье

3. Обоснование. Пусть даны две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ с рядами Фурье (7) и (9). Данные функции в промежутке $[-\pi$ до $\pi]$ интегрируемы с квадратами. Как известно [4, стр. 712–714], применяя обобщенное уравнение замкнутости, получаем такие выражения для коэффициентов ряда $f(x)\cdot\varphi(x)$, которые могут быть получены путем формального перемножения рядов Фурье (7) и (9). Для того, чтобы воспользоваться последним свойством произведения рядов, ряды (7) и (9) разделяем на косинусную и синусную часть:

$$[a]\ \{\cos nx\}=f_c \qquad [b]\ \{\sin nx\}=f_s \tag{17}$$

$$[\alpha]\ \{\cos nx\}=\varphi_c \qquad [\beta]\ \{\sin nx\}=\varphi_s. \tag{18}$$

Тогда искомый ряд произведения разделяется на 4 ряда

$$f(x)\ \varphi(x)=f_c\varphi_c+f_c\varphi_s+f_s\varphi_c+f_s\varphi_s, \tag{19}$$

каждый из которых подлежит определению.

4. Умножение рядов на $\cos mx$ или $\sin mx$

Будем пользоваться формулами тригонометрии:

$$\cos nx \, \cos mx = \frac{1}{2}\,[\cos(m-n)\,x + \cos(m+n)\,x] \tag{20}$$

$$\cos nx \, \sin mx = \frac{1}{2}\,[\sin(m-n)\,x + \sin(m+n)\,x] \tag{21}$$

$$\sin nx \, \sin mx = \frac{1}{2}\,[\cos(m-n)\,x - \cos(m+n)\,x]. \tag{22}$$

Умножаем вектор косинусов (5) на скаляр $\cos mx$, где $m \leqslant n$. Воспользуясь (20), получаем

$$\{\cos nx\}\,\cos mx = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos mx \\ \cos(m-1)\,x + \cos(m+1)\,x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1+\cos 2mx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cos(m-n)\,x + \cos(m+n)\,x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Полученную матрицу-столбец можно выразить через произведение некоторой матрицы, обозначаемой $[\mathrm{cocos}\, m]$, на вектор косинусов, записанное в виде матрицы-столбца

$$\{\cos nx\}\,\cos mx = [\mathrm{cocos}\, m]\,\{\cos nx\} \tag{24}$$

$$[\mathrm{cocos}\, m] = \frac{1}{2}\; m\ \text{нулей}\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right. \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}}^{m\ \text{нулей}}\hphantom{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & & 1 & & 1 & 0 \\ \vdots & & & 1 & & 1 & \ddots \\ \vdots & & 1 & \cdot & & & \ddots \\ \vdots & 1 & & & & & \\ 1 & & & & 0 & & \\ \vdots & 1 & & & & & \\ \vdots & & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & & & \end{bmatrix} \end{array} \tag{25}$$

Аналогично получаем:

$$\{\cos nx\}\,\sin mx = [\mathrm{cosin}\, m]\,\{\sin nx\} \tag{26}$$

$$\{\sin nx\}\,\cos mx = [\mathrm{sicos}\, m]\,\{\sin nx\} \tag{27}$$

$$\{\sin nx\}\,\sin mx = [\mathrm{sisin}\, m]\,\{\cos nx\} \tag{28}$$

$$[\mathrm{cosin}\, m] = \frac{1}{2}\; (m-1)\ \text{нулей}\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right. \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}}^{(m-1)\ \text{нулей}}\hphantom{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & & 1 & & 1 & 0 \\ \vdots & & 1 & & & 1 & \ddots \\ \vdots & 1 & \cdot & & & & \ddots \\ 1 & & & & & & \\ 0 & & & & 0 & & \\ -1 & & & & & & \\ \vdots & -1 & \ddots & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \end{bmatrix} \end{array} \tag{29}$$

$$[\mathrm{sicos}\, m]=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\overbrace{\cdots\cdots\cdots}^{(m-2)\ \text{нулей}}-1\ 0\ 1\cdots\cdots \\ \vdots\ 0 \quad {}_{-1}{}^{-1} \qquad\qquad 1 \quad {}_{1}{}^{0} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\ \vdots\ -1 \end{array}\right\}(m-2)\ \text{нулей} \\ -1 \\ \ 0 \qquad\qquad 0 \\ \ 1 \\ \ \vdots\ 1 \\ \ \vdots \quad \ddots \end{array}\right] \tag{30}$$

$$[\mathrm{sisin}\, m]=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\overbrace{\cdots\cdots\cdots}^{(m-1)\ \text{нулей}}\ 1 \quad 0\ -1\cdots \\ \vdots \quad 0\ .1 \qquad\qquad -1 \\ \vdots \quad 1^{\cdot} \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \vdots\ 1 \end{array}\right\}(m-1)\ \text{нулей} \\ 1 \qquad\qquad 0 \\ \vdots\ 1 \\ \vdots \quad 1 \\ \vdots \quad 0 \ \ddots \end{array}\right] \tag{31}$$

Уравнение (24) умножаем слева на вектор коэффициентов (3), записанный в виде матрицы-строки и, используя (17), получаем:

$$f_c \cos mx=[a]\ [\mathrm{cocos}\, m]\ \{\cos nx\}. \tag{32}$$

Вектор коэффициентов ряда $f_c \cos mx$ обозначаем $[\gamma]$, и тогда согласно (17) или (18)

$$[\gamma]\ \{\cos nx]=[a]\ [\mathrm{cocos}\, m]\ \{\cos nx\}. \tag{33}$$

Ряды равны только тогда, когда равны между собой соответствующие коэффициенты, т. е. равны векторы коэффициентов

$$[\gamma]=[a]\ [\mathrm{cocos}\, m]. \tag{34}$$

Из (34) следует, что матрица [cocos m] преобразует вектор коэффициентов данного ряда f_c на вектор коэффициентов ряда $f_c \cos mx$. Аналогичное преобразование производят матрицы (29), (30) и (31), и поэтому все четыре матрицы будем называть операторами произведения ряда типа (17) или (18) на скаляр $\cos mx$ или $\sin mx$. Первый слог символа оператора – от названия тригонометрического вектора умножаемого ряда, а второй — от названия скаляра, на который умножается ряд. m – обозначает кратность угла скаляра.

Все элементы матриц (25), (29), (30) и (31) равны нулю, кроме единиц, расположенных на прямых, параллельных диагоналям, т. е. на линиях единиц. Если две линии единиц пересекаются на границе матриц, то единицы обеих линий положительны. Если точка пересечения линий единиц лежит вне матрицы, то одна из линий имеет отрицательные единицы. Число линий с отрицательными единицами не больше одной. Матрицы рядов справа и снизу неограничены. В практических расчетах ряды заменяются тригонометрическим многочленами и матрицы превращаются в квадратные.

5. Некоторые свойства операторов произведения ряда на скаляр

Исследование свойств свяжем с исследованием рядов, записанных в левой стороне нижеследующих равенств

$$[a]\,\{\cos nx\}\cos mx \pm [a]\,\{\sin nx\}\sin m_1 x = [a]\,A\,\{\cos nx\} \tag{35}$$

$$[a]\,\{\cos nx\}\sin m_2 x \pm [a]\,\{\sin nx\}\cos m_3 x = [a]\,B\,\{\sin nx\}. \tag{36}$$

Для знака минус матрицу A обозначим A_1 и, используя (24) и (28) и упрощая, получаем

$$[\text{cocos}\, m] - [\text{sisin}\, m_1] = A_1. \tag{37}$$

В общем случае матрица A_1 имеет 6 единичных линий. Найдем такие целые числа m и m_1, чтобы матрица A_1 имела всего две единичные линии.

I свойство. Из (25) вычитаем равенство (31), примененное к случаю $m_1 = m+1$

$$[\text{cocos}\, m] - [\text{sisin}\,(m+1)] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \overbrace{\cdots\cdots\cdots}^{m\ \text{нулей}}1 & 0 & 1 & \cdots & & \\ \vdots & 1 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots \qquad 0 & & & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = A_1. \tag{38}$$

При $m_1 = m+1$ левая часть равенства (35) является рядом без $(m-1)$ гармоник. Коэффициенты этого ряда, начиная с гармоники $(m+2)$, являются суммой двух координат вектора $[a]$.

Для знака плюс в равенстве (35) матрицу A обозначим A_2 и ищем числа m_2 и m_3, при которых матрица A_2 имела бы минимум единичных линий. Ответ указывает следующее свойство.

II свойство. Суммируем равенства (25) и (31) для $m_1 = m-1$

$$[\text{cocos}\, m] + [\text{sisin}\,(m-1)] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} & \overbrace{\cdots\cdots\cdots}^{(m-2)\ \text{нулей}}1 & 0 & 1\cdots & & \\ \left.\begin{matrix}(m-2)\\ \text{нулей}\end{matrix}\right\{ & \vdots\quad 0 & 1 & 0 & 1 & \\ & \vdots\quad 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 \quad 0 & 1 & & & \\ & 0 \quad 2 & & & 0 & \\ & 1 \quad 0 & 1 & & & \\ & \vdots\quad 1 & 0 & 1 & & \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix} = A_2. \tag{39}$$

Из матрицы A_2 следует, что в ряду (35) при любом подборе целых чисел m и m_1 невозможно исключить ни одной гармоники.

Для аналогичного исследования равенства (36) пригодны дальнейшие свойства.

III свойство. Суммируя равенство (29) для $m_2 = m+1$ с равенством (30) для $m_3 = m+2$, получаем: $B_1 = A_1$, т. е.

$$[\text{cosin}\,(m+1)] + [\text{sicos}\,(m+2)] = [\text{cocos}\, m] - [\text{sisin}\,(m+1)]. \tag{40}$$

IV свойство. Из (29) для $m_2=m+1$, вычитая (30), получаем

$$[\text{cosin}\,(m+1)]-[\text{sicos}\,m]=\frac{1}{2}\begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{\cdots\cdots\cdots\cdots}}^{(m-2)\ \text{нулей}} \\ \begin{array}{c} \\ (m-2)\ \text{нулей}\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccc} \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 & & \\ \vdots & 1 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & & & & 0 & & \\ 0 & -1 & & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & & \end{array}\right] \end{array} \tag{41}$$

Любая целая неотрицательная степень некоторых операторов может быть преобразована в их многочлен, аналогичный тригонометрическому

$$2^{n-1}[\text{cocos}\,m]^n=[\text{cocos}\,nm]+\binom{n}{1}[\text{cocos}\,(n-2)\,m]+\binom{n}{2}[\text{cocos}\,(n-4)\,m]+\cdots \tag{42}$$

$$2^{n-1}[\text{sicos}\,m]^n=[\text{sicos}\,nm]+\binom{n}{1}[\text{sicos}\,(n-2)\,m]+\binom{n}{2}[\text{sicos}\,(n-4)\,m]+\cdots \tag{43}$$

Еще одно свойство, связанное с произведением в степень

$$2^n[\text{sisin}\,1]^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\binom{n}{1} & 0 & \binom{n}{2} & 0 & -\binom{n}{3} & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & -\binom{n}{1} & 0 & \binom{n}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\binom{n}{1} & 0 & \binom{n}{2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{44}$$

6. Произведение рядов. Сначала ряд $f_c=[a]\{\cos nx\}$ почленно умножаем на

$$\varphi_c=\frac{\alpha_0}{2}+\alpha_1\cos x+\alpha_2\cos 2x+\cdots$$

Суммируя полученные почленные произведения, воспользуемся (24)

$$f_c\,\varphi_c=[a]\left(\frac{\alpha_0}{2}\,[\text{cocos}\,0]+\alpha_1[\text{cocos}\,1]+\alpha_2[\text{cocos}\,2]+\right.$$
$$\left.+\cdots\alpha_n[\text{cocos}\,n]+\cdots\right)\{\cos nx\}. \tag{45}$$

Любое произведение $\alpha_n[\text{cocos}\,n]$, как следует из (25), составляет матрицу, в которой, вместо единиц, будет число α_n. Таким образом, сумма матриц, стоящая в скобках, будет матрица, элементы которой в общем случае являются суммой двух координат вектора $[\alpha]$. Эту матрицу обозначим $[\text{cocos}\,\alpha]$. Каждая координата вектора $[\alpha]$ располагается на трех линиях, исключая α_0 и α_1. Удвоенная первая координата вектора $[\alpha]$ располагается на диагонали, а вторая координата рядом с диагональю по обе ее стороны

$$[\text{cocos}\,\alpha]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\alpha_0}{2} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_0+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_3 & \alpha_2+\alpha_4 & \cdots \\ \alpha_2 & \alpha_1+\alpha_3 & \alpha_0+\alpha_4 & \alpha_1+\alpha_5 & \cdots \\ \alpha_3 & \alpha_2+\alpha_4 & \alpha_1+\alpha_5 & \alpha_0+\alpha_6 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{46}$$

Эту матрицу назовем оператором произведения рядов. Чтобы получить симметрическую матрицу, элементы первой строки уменьшены на два. Первую координату вектора $[a]$ обозначаем $\frac{a_0}{2}$ и тогда, после ее увеличения на два, будем иметь вектор:

$$[a]_* = [a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n\ \dots]. \tag{47}$$

Векторы с увеличенной первой координатой будем отмечать звездочкой.

В (45) ставим (46) и (47)

$$f_c\,\varphi_c = [a]_*\ [\mathrm{cocos}\ \alpha]\ \{\cos nx\}. \tag{48}$$

Вектор коэффициентов ряда $f_c\,\varphi_c$ обозначим $[\sigma]_{cc}$. В дальнейшем индексы вектора соответствуют индексом рядов, т. е. индексы указывают, какие тригонометрические векторы имеют умножаемые ряды типа (17) или (18).

$$[\sigma]_{cc} = \left[\frac{\sigma_0}{2},\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots\ \sigma_n\ \dots\right]. \tag{49}$$

Применяя свойство, использованное в (33) и (34), получим

$$[\sigma]_{cc} = [a]_*\ [\mathrm{cocos}\ \alpha]. \tag{50}$$

Если $\varphi_c = [\alpha]\ \{\cos nx\}$ почленно умножить на $\frac{a_0}{2}$, $a_1 \cos x$, $a_2 \cos 2x$, ... $a_n \cos nx$ ... и полученные произведения сложить, то аналогично получается

$$[\sigma]_{cc} = [\alpha]_*\ [\mathrm{cocos}\ a]. \tag{51}$$

Для получения вектора произведения рядов действительно единое правило, как в случаях (50) и (51), так и в дальнейших (55), (56) и (57), а именно: матрица-строка коэффициентов произведения рядов типа (17), (18) равна произведению матрицы-строки, составленной из коэффициентов одного умножаемого ряда, на матрицу оператора. Первый слог обозначения оператора совпадает с обозначением тригонометрического вектора ряда, коэффициенты которого записаны в матрицу-строку. Второй слог — от обозначения тригонометрического вектора другого ряда. По данному правилу

$$[\sigma]_{cs} = [a]_*[\mathrm{cosin}\,\beta] = [\beta]\ [\mathrm{sicos}\ a] \tag{52}$$

$$[\sigma]_{sc} = [b]\ [\mathrm{sicos}\ \alpha] = [\alpha]_*[\mathrm{cosin}\,b] \tag{53}$$

$$[\sigma]_{ss} = [b]\ [\mathrm{sisin}\ \beta] = [\beta]\ [\mathrm{sisin}\ b]. \tag{54}$$

Другие операторы произведения рядов получаются аналогично, как (46). Они записаны ниже для первого выражения (52), (53) и (54)

$$[\mathrm{cosin}\,\beta] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \dots \\ \beta_2 & \beta_1+\beta_3 & \beta_2+\beta_4 & \beta_3+\beta_5 & \dots \\ \beta_3-\beta_1 & \beta_4 & \beta_1+\beta_5 & \beta_2+\beta_6 & \dots \\ \beta_4-\beta_2 & \beta_5-\beta_1 & \beta_6 & \beta_1+\beta_7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{55}$$

$$[\mathrm{sicos}\,\alpha]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha_0-\alpha_2 & \alpha_1-\alpha_3 & \alpha_2-\alpha_4 & \ldots\\ \alpha_1-\alpha_3 & \alpha_0-\alpha_4 & \alpha_1-\alpha_5 & \ldots\\ \alpha_2-\alpha_4 & \alpha_1-\alpha_5 & \alpha_0-\alpha_6 & \ldots\\ \alpha_3-\alpha_5 & \alpha_2-\alpha_6 & \alpha_1-\alpha_7 & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{bmatrix} \qquad (56)$$

$$[\mathrm{sisin}\,\beta]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3-\beta_1 & \beta_4-\beta_2 & \ldots\\ \beta_2 & \beta_1+\beta_3 & \beta_4 & \beta_5-\beta_1 & \ldots\\ \beta_3 & \beta_2+\beta_4 & \beta_1+\beta_5 & \beta_6 & \ldots\\ \beta_4 & \beta_3+\beta_5 & \beta_2+\beta_6 & \beta_1+\beta_7 & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{bmatrix} \qquad (57)$$

Векторы коэффициентов искомого ряда обозначим: $[c]$ – для косинусов и $[s]$ – для синусов. Применяя (15) и (16), получаем:

$$[c]=[\sigma]_{cc}+[\sigma]_{ss}, \qquad (58)$$

$$[s]=[\sigma]_{cs}+[\sigma]_{sc}. \qquad (59)$$

Матричная запись окончательного результата

$$f(x)\,\varphi(x)=[c]\{\cos nx\}+[s]\{\sin nx\}. \qquad (60)$$

Заметим, что, используя свойства операторов (46), (55), (56) и (57), нетрудно определить зависимость координат векторов $[b]$ и $[\alpha]$, при которой векторы коэффициентов суммы и разности ниже следующих рядов

$$F(x)=[a]\{\cos nx\}\,[b]\{\cos nx\}\pm[a]\{\sin nx\}\,[\alpha]\{\sin nx\} \qquad (61)$$

$$G(x)=[a]\{\cos nx\}\,[b_1]\{\sin nx\}\pm[a]\{\sin nx\}\,[\alpha_1]\{\cos nx\} \qquad (62)$$

имели бы наиболее простой вид и по возможности равнялись бы нулю. Решение такой задачи аналогично решению задачи, связанной с исследованием свойств операторов (25), (29), (30) и (31).

7. Разложение тригонометрических полиномов в ряды по косинусам или синусам.

С матричной записью разложение тригонометрических полиномов получается как произведение данного полинома на разложение единиц (65). При этих действиях матричная запись не теряет своей простоты.

Тригонометрические полиномы

$$P_1(x)=[a]\{\cos nx\} \qquad (63)$$

$$P_2(x)=[b]\{\sin nx\} \qquad (64)$$

разложим, исследуя известное разложение, напр. [4, стр. 541]

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},$$

которое записываем в матричной форме

$$1=\frac{4}{\pi}[v]\{\sin nx\}, \qquad (65)$$

где:

$$[v]=\left[1,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ \frac{1}{7},\dots\ \frac{1}{n}\dots\right]. \tag{66}$$

Равенство (63) умножаем на (65). Ряды, полученные в правой стороне равенства перемножаем, согласно раньше указанным правилам умножения рядов и записываем в двух выражениях

$$P_1(x)=\frac{4}{\pi}\ [a]\ [\operatorname{cosin} v]\ \{\sin nx\}=\frac{4}{\pi}\ [v]\ [\operatorname{sicos} a]\ \{\sin nx\}. \tag{67}$$

При использовании первого выражения вычисляем матрицу $[\operatorname{cosin} v]$, согласно (55)

$$[\operatorname{cosin} v]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{9}\dots \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{8}{15} & 0 & \frac{12}{35} & 0 & \frac{16}{63} & 0\dots \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{10}{21} & 0 & \frac{14}{45} & 0 & \frac{18}{77}\dots \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{8}{7} & 0 & \frac{12}{27} & 0 & \frac{16}{55} & 0\dots \\ -\frac{2}{15} & 0 & -\frac{6}{7} & 0 & \frac{10}{9} & 0 & \frac{14}{33} & 0 & \frac{18}{65}\dots \\ 0 & -\frac{4}{21} & 0 & -\frac{8}{9} & 0 & \frac{12}{11} & 0 & \frac{16}{39} & 0\dots \\ -\frac{2}{35} & 0 & -\frac{6}{27} & 0 & -\frac{10}{11} & 0 & \frac{14}{13} & 0 & \frac{18}{45}\dots \\ 0 & -\frac{4}{45} & 0 & -\frac{8}{33} & 0 & -\frac{12}{13} & 0 & \frac{16}{15} & 0\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{68}$$

Как видно из (67), матрица (68) составлена из коэффициентов разложения $\cos mx$ по синусам для $m=0,\ 1,\ 2,\ 3\dots$ Первая строка этой матрицы составлена из коэффициентов разложения $\cos o\, x=1$ по синусам. Коэффициенты чередуются с нулями. Вторая строка — из коэффициентов разложения $\cos x$, третья — из $\cos 2x$ и т. д. Например,

$$\cos 3x=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{4}{5}\sin 2x+\frac{8}{7}\sin 4x+\frac{12}{27}\sin 6x+\cdots\right). \tag{69}$$

Для данного полинома расчет коэффициентов разложения заметно упрощается, особенно при незначительном числе координат $[a]$, если воспользоваться вторыми выражениями равенства (67). Напр., для $P_1(x)=\cos 3x$; $[a]=[0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\ \ 0\dots]$ и $[\operatorname{sicos} a]$ находим по (56) или (30) при $m=3$.

$$\cos 3x=\frac{2}{\pi}\left[1,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ \frac{1}{7}\cdots\right]\times$$

$$\times\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\{\sin nx\}. \tag{70}$$

Для получения разложения по косинусам полинома $P_2(x)$, равенство (64) умножаем на (65) и аналогично находим

$$P_2(x) = \frac{4}{\pi}\,[b]\,[\text{sisin}\,v]\,\{\cos nx\} = \frac{4}{\pi}\,[v]\,[\text{sisin}\,b]\,\{\cos nx\}. \qquad (71)$$

Как видно, матрицы $[\text{sisin}\,v]$ строки дают коэффициенты разложения $\sin mx$ по косинусам. Заметив, что транспонируя (55), получаем (57) и в этом случае можем пользоваться матрицей (68). Первый столбец матрицы (68) составлен из коэффициентов разложения $\sin x$ по косинусам. Коэффициенты записаны подряд и чередуются с нулями. Во втором столбце записаны коэффициенты разложения $\sin 2x$, в третьем – $\sin 3x$ и т. д.

Элементы матрицы (68) легко написать, если воспользоваться закономерностью их составления, которая непосредственно видна.

Расчет коэффициентов упрощается, если пользоваться вторыми выражениями равенства (71). Например,

$$\sin 3x = \frac{2}{\pi}\left[1,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ \frac{1}{7},\ \ldots\right]\times$$

$$\times\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}\{\cos nx\}. \qquad (72)$$

Попытаемся найти разложение единиц по косинусам. Равенство (65) возводим в квадрат

$$1 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 [v]\,\{\sin nx\}\,[v]\,\{\sin nx\} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 [v]\,[\text{sisin}\,v]\,\{\cos nx\}. \qquad (73)$$

Используя транспонированную матрицу (68), получаем

$$1 = [1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots]\,\{\cos nx\}, \qquad (74)$$

что и является матричной записью единицы. Если пользоваться ее для разложения полинома (63) по косинусам или (64) по синусам, то получается тождество.

8. Степень. Возведем в степень q ряды (17) или (18) с одним тригонометрическим вектором, где q – целое положительное число. Вектор коэффициентов полученного ряда будем обозначать индексом q. Применяя $(q-1)$ раз формулы умножения (50) и (54), получаем

$$[a]_q = [a]_*\,[\text{cocos}\,a]^{q-1} \qquad (75)$$

$$[b]_q = [b]\,[\text{sisin}\,b]^{q-1}. \qquad (76)$$

9. Умножение рядов в комплексной форме.

Ряды (7) и (9) данны в комплексной форме

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n e^{nxi}, \qquad \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{nxi}. \qquad (77)$$

Аналогично записываем их в матричном виде

$$f(x) = [z]\,\{n^{nxi}\} \qquad (78)$$

$$\varphi(x) = [u]\,\{e^{nxi}\}, \qquad (79)$$

где векторы коэффициентов обозначены

$$[z]=[\ldots z_{-n},\ \ldots z_{-2},\ z_{-1},\ z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_n,\ \ldots] \tag{80}$$

$$[u]=[\ldots u_{-n},\ \ldots u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n,\ \ldots]. \tag{81}$$

Нижеследующий вектор назовем показательным:

$$\{e^{nxi}\}=\begin{bmatrix} \vdots \\ e^{-nxi} \\ \vdots \\ e^{-xi} \\ 1 \\ e^{xi} \\ \vdots \\ e^{nxi} \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{82}$$

Ход получения алгорифма умножения рядов вида (78) и (79) аналогичен пересмотренному нами умножению рядов Фурье. Сначала находим произведение показательного вектора на скаляр e^{mxi}

$$\{e^{nxi}\}\ e^{mxi}=[e(m)]\ \{e^{nxi}\} \tag{83}$$

$$[e(m)]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & 0 \\ & & m\ \text{нулей}\left\{\right. & 1 & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ \hline & & & \underbrace{\quad\quad}_{m\ \text{нулей}} & & 1 \\ & 0 & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \end{array}\right]. \tag{84}$$

Матрица (84) составлена из нулей и одной линии единиц. Она не ограничена со всех сторон. Для отсчета строк и столбцов проводим две оси, подобно осям симметрии. Для получения любого элемента столбца результата (83) перемножаем строки матрицы $[e(m)]$ на столбец $\{e^{nxi}\}$ так, чтобы единицу столбца пришлось умножать на тот элемент матрицы, который находится на вертикальной оси матрицы.

Для $m=0$ линия единиц проходит через точку пересечения осей, а для $m<0$ лежит ниже этой точки.

При умножении рядов любому m соответствуют коэффициент z_n или u_n. Поэтому в матрице оператора умножения рядов, которую обозначим $[e(u_n)]$, эти коэффициенты располагаются на соответствующих линиях единиц:

$$[e(u_n)]=\begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \ldots & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \ldots \\ \ldots & u_{-1} & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & \ldots \\ \ldots & u_{-2} & u_{-1} & u_0 & u_1 & u_2 & \ldots \\ \ldots & u_{-3} & u_{-2} & u_{-1} & u_0 & u_1 & \ldots \\ \ldots & u_{-4} & u_{-3} & u_{-2} & u_{-1} & u_0 & \ldots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{85}$$

Произведение рядов также запишем в двух выражениях

$$f(x)\,\varphi(x)=[z]\;[e(u_n)]\;\{e^{nxi}\}=[u]\;[e(z_n)]\;\{e^{nxi}\}. \tag{86}$$

Вектор коэффициентов произведения рядов обозначим $[t]$. Тогда

$$[t]=[z]\;[e(u_n)]=[u]\;[e(z_n)]. \tag{87}$$

В практических расчетах число n ограничено, и матрица (85) становится крадратной $(2n+1)$ порядка.

10. Переход из комплексной формы рядов в тригонометрическую форму и обратно.

Возьмем ряд (85)

$$f(x)\,\varphi(x)=[t]\;\{e^{nxi}\}, \tag{88}$$

тригонометрическая форма которого определена и записана в (60).

Связь между координатами векторов $[t]$, $[c]$ и $[s]$ известна [4, стр. 575]

$$t_0=\frac{1}{2}\,c_0;\quad t_n=\frac{1}{2}\,(c_n-s_n i);\quad t_{-n}=\frac{1}{2}\,(c_n+s_n i)\ ^*. \tag{89}$$

Очевидно тождество следующей матричной записи с (89)

$$[t]^*=[cs]\;[p], \tag{90}$$

где:

$$[t]^*=\left[\ \ldots\ t_{-n},\ \ldots\ t_{-3},\ t_{-2},\ t_{-1},\ \frac{t_0}{2},\ t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_n\ \ldots\right]$$

$$[cs]=\left[\ \ldots\ c_n,\ \ldots\ c_3,\ c_2,\ c_1,\ \frac{c_0}{2},\ s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_n\ \ldots\right]$$

$$[p]=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{ccccccccc}
\ddots & & & & \vdots & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}}\\
 & 1 & & & 0 & & & 1 & \\
 & & 1 & & \vdots & & 1 & & \\
 & & & 1 & \vdots & 1 & & & \\
-0- & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & -0-\\
 & & & i & \vdots & -i & & & \\
 & & i & & 0 & & -i & & \\
 & i & & & \vdots & & & -i & \\
\cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \vdots & & & & \ddots
\end{array}\right]. \tag{91}$$

Из (88) следует: $c_n=t_n+t_{-n}$, $s_n=i\,(t_n-t_{-n})$. Для всех значений n последние зависимости можно записать в матричном виде

$$[cs]=[t]\;[p]_1 \tag{92}$$

$$[p]_1=\left[\begin{array}{ccccccccc}
\ddots & & & & \vdots & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}}\\
 & 1 & & & 0 & & & -i & \\
 & & 1 & & \vdots & & -i & & \\
 & & & 1 & \vdots & -i & & & \\
-0- & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & -0-\\
 & & & 1 & \vdots & i & & & \\
 & & 1 & & 0 & & i & & \\
 & 1 & & & \vdots & & & i & \\
\cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \vdots & & & & \ddots
\end{array}\right]. \tag{93}$$

---

* Формулы переписаны в наших обозначениях, где $i=\sqrt{-1}$.

Повернув матрицу $[p]_1$ на прямой угол по часовой стрелке, получаем матрицу $[p]$ и, кроме того,

$$[p]\,[p]_1 = [p]_1\,[p] = 2\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} \ddots & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ \hline & & & \frac{1}{2} & & & \\ \hline & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \end{array}\right]. \qquad (94)$$

11. Деление. Пусть даны ряды (78) и (79). В промежутке $[-\pi$ до $\pi]$ $\varphi(x) \neq 0$. Будем искать частное этих рядов, т. е. вектор его коэффициентов $[w]$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{[z]\,\{e^{nxi}\}}{[u]\,\{e^{nxi}\}} = [w]\,\{e^{nxi}\}. \qquad (95)$$

Применяя (87), получаем:

$$[z] = [w]\,[e(u_n)]. \qquad (96)$$

Матрица $[e(u_n)]$ составлена из координат вектора $[u]$ и поэтому она определена. Принимаем, что она невырожденная и имеет обратную матрицу, на которую умножаем обе стороны уравнения (96):

$$[w] = [z]\,[e(u_n)]^{-1}. \qquad (97)$$

Очевидно, что нами полученный алгорифм деления рядов действителен в практических числовых расчетах, когда число гармоников — n ограниченное. Мы не доказываем действительности алгорифма в случае $n = \infty$ и поэтому в дальнейшем будем говорить о делении тригонометрических полиномов, зная, что полученные алгорифмы можно применить в практических расчетах коэффициентов частного рядов.

Будем искать частное, когда даны тригонометрические полиномы, аналогичные ряда типа (17), (18). Пусть делимое и делитель сначала имеют только один тригонометрический вектор—косинусный. Обозначим искомый вектор коэффициентов частного

$$[y]_c = \left[\frac{y_0}{2},\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n\right]. \qquad (98)$$

Тогда задача записывается в следующем виде:

$$\frac{f_c}{\varphi_c} = \frac{[a]\,\{\cos nx\}}{[\alpha]\,\{\cos nx\}} = [y]_c\,\{\cos nx\}. \qquad (99)$$

Необходимо, чтобы в промежутке $[-\pi$ до $\pi]$ $\varphi_c(x) \neq 0$. Применяя (51), получаем:

$$[y]_{c*}\,[\mathrm{cocos}\,\alpha] = [a]. \qquad (100)$$

Принимая, что матрица $[\mathrm{cocos}\,\alpha]$ невырожденная

$$[y]_{c*} = [a]\,[\mathrm{cocos}\,\alpha]^{-1}. \qquad (101)$$

Получили искомый вектор коэффициентов частного, первая координата которого является удвоенной.

Если вместо функции делимого возьмем (74), тогда получим вектор коэффициентов функции φ_c^{-1}

$$[y]_* = [1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots]\ [\mathrm{cocos}\,\alpha]^{-1}. \tag{102}$$

С помощью последнего получаем второе выражение частного:

$$[y]_{c\,*} = [1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots]\ [\mathrm{cocos}\,\alpha]^{-1}\ [\mathrm{cocos}\,a]. \tag{103}$$

Если функция делимого имеет синусный вектор, то аналогично получается

$$[y]_s = [b]\ [\mathrm{sicos}\,\alpha]^{-1} \tag{104}$$

или

$$[y]_{s\,*} = [1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots]\ [\mathrm{cocos}\,\alpha]^{-1}\ [\mathrm{cosin}\,b]. \tag{105}$$

Когда функция делимого имеет вид (7), тогда векторы коэффициентов частного уже получены (101) или (103) и (104) или (105).

Если функция делителя имеет вид $\varphi(x) = \beta_0 + [\beta]\ \{\sin nx\}$ и в промежутке $[-\pi$ до $\pi]$ не равна нулю, то настоящий способ получения, алгорифма деления непосредственно не применим.

Точность результата деления тригонометрических полиномов зависит от порядка обратной матрицы. Данные ниже приведенных примеров иллюстрируют увеличение точности результата в зависимости от порядка обратной матрицы.

Пример 1. Найти вектор коэффициентов частного (101) при $[a] = [1,\ 0,\ 0,\ \ldots\ 0]$ и $[\alpha] = \left[1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\right]$.

Оперируя с обратной матрицей четвертого порядка, находим:

$$[y]_{c\,*} = [1{,}155,\ -0{,}410,\ -0{,}1872,\ -0{,}1740].$$

Максимальная погрешность результата составляет 20%. Оперируя с обратной матрицей пятого порядка, находим:

$$[y]_{c\,*} = [1{,}165,\ -0{,}419,\ -0{,}202,\ -0{,}204,\ 0{,}1372].$$

Максимальная погрешность не превышает 5%.

Пример 2. Условие, как в примере 1, за исключением $[\alpha] = \left[1,\ \frac{1}{2}\right]$.

Оперируя с обратной матрицей пятого порядка, находим:

$$[y]_{c\,*} = [1{,}156,\ -0{,}618,\ 0{,}1661,\ -0{,}0443,\ 0{,}01106].$$

Максимальная погрешность результата $-0{,}6\%$.

Литовская сельскохозяйственная академия

Поступила в редакцию 25.II.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Госиздат. физ.-мат. литературы, 1961.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. ГОНТИ, 1939.
3. Беккенбаха Э. Ф., под ред. Современная математика для инженеров. Издат. иностр. литературы, 1959.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III. Гостехиздат, 1949.

MATRICŲ TAIKYMAS TRIGONOMETRINIŲ EILUČIŲ ALGEBRINIAMS VEIKSMAMS ATLIKTI

A. JASIULIONIS

(*Reziumė*)

Autoriaus siūlomas Fourier eilučių matricinis užrašymas (7), panaudojant jį (17) ir (18) pavidalo eilučių daugybai, duoda tų eilučių daugybos algoritmą, kaip tiesinę transformaciją afininėje erdvėje. Visais daugybos (19) atvejais yra duotos eilučių daugybos operatorių matricos: (46), (55), (56) ir (57). Nurodytos pastarųjų matricų ir joms analogiškų: (25), (29), (30) ir (31) kai kurios savybės surištos su uždavinių sprendimu. Duoti kai kurių trigonometrinių polinomų išdėstymo kosinusais ar sinusais algoritmai matricinėje formoje.

Rodiklinio pavidalo eilučių daugybos algoritmas (87) yra paprastesnis negu (58) ir (59)— trigonometrinio pavidalo eilučių.

Duotas trigonometrinių polinomų dalybos algoritmas, kurį, praktinių skaičiavimų atveju, galima skaityti trigonometrinių eilučių dalybos algoritmu.

Visi darbe duoti algoritmai yra matricomis išreikšti ir juos nesunku programuoti, norint skaičiuoti elektroninėmis skaičiavimo mašinomis.

ANWENDUNG VON MATRIZEN FÜR ALGEBRAISCHE OPERATIONEN MIT TRIGONOMETRISCHEN REIHEN

A. JASIULIONIS

(*Zusammenfassung*)

Die vom Verfasser vorgeschlagene Darstellung der Reihen in Matrizenform (7) durch Anwendung von Reihen (17) und (18) für die Multiplikation ergibt einen Algorithmus der Multiplikation dieser Reihen als Linear-Transformation in Affinraum. In sämtlichen Multiplikationsfällen sind Operatorenmatrizen der Reihenmultiplikation gegeben: (46), (55), (56) und (57). Einige Eigenschaften der obenerwähnten bzw. ähnlichen Matrizen (25), (29), (30) und (31) die für die Lösung von Aufgaben benutzt werden, sind aufgeführt. Ebenfalls sind Algorithme einiger in Kosinusse bzw. Sinusse zerlegter trigonometrischer Polynome in Matrizenform angegeben.

Der Algorithmus der Multiplikation von Laurent-Reihen (87) ist einfacher als dieser der Fourier-Reihen (58) und (59).

Der Algorithmus der Division trigonometrischer Polynome, der bei praktischen Berechnungen gleichzeitig als Algorithmus der Reihendivision betrachtet werden kann, ist ausgeführt.

Die im Aufsatz angegebenen Algorithme sind in Matrizenform dargestellt. Somit sind sie für das bei Berechnungen mit Hilfe von elektronischen Rechenmaschinen benutzte Programmieren ohne weiteres anwendbar.