IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

ЛОКАЛЬНЫЕ ЦЕНТРО-ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СВЯЗНОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ МНОГООБРАЗИИ

В. Г. ЛЕМЛЕЙН

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ
И ОБЩИЙ ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ СТАТЬИ

Общая теория дифференциально-геометрических пространств Веблена — Уайтхеда, то-есть дифференцируемых многообразий, с заданными на них полями геометрических объектов, является основным предметом изучения современной дифференциальной геометрии, но укладывающейся в рамки старой эрлангенской программы, на смену которой пришла новая, основные идеи которой были высказаны впервые О. Вебленом в 1928 году на международном математическом съезде в Болонье [42].

Если однородные пространства Клейна были связаны с понятием группы преобразований, дифференциально-геометрические пространства Веблена — Уайтхеда связаны с понятием псевдогруппы преобразований, фундаментальное значение которой в современных геометрических исследованиях бесспорно, хотя систематически разработанная теория псевдогрупп преобразований все еще отсутствует [36].

Ведущееся в настоящее время усиленное изучение обширного класса пространств, охватываемых указанной выше общей теорией, имеет большое значение как для физических (Общая теория относительности), так и для чисто математических целей.

Основным, определяющим принципом в обобщенных геометриях является идея смещения локальных пространств, ассоциированных с точками базисного многообразия, вдоль кривых, лежащих на этом многообразии.

Восходя к инфинитезимальному параллелизму Леви — Чивита и общему понятию симметричной аффинной связности Вейля, эта идея была затем развита Э. Картаном [32], [33], [34] и И. А. Схоутеном [39], [40].

Разработка указанных выше концепций продолжается и в настоящее время в самых различных аспектах, основными из которых продолжают оставаться теории аффинных, проективных и конформных перенесений.

Непосредственным обобщением центро-аффинных перенесений касательных пространств, определяемых системой

$$d\xi^i + \xi^j \Gamma^i_{jk}\, dx^k = 0, \tag{0.1}$$

являются центро-проективные перенесения этих пространств, построенные Э. Картаном [34] и И. А. Схоутеном [39].

Эти перенесения определяются системой

$$d\xi^i + \xi^j \Gamma^i_{jk}\, dx^k + \xi^i \xi^j C_{jk}\, dx^k = 0, \tag{0.2}$$

где Γ^i_{jk} — аффинная связность, а C_{jk} — дважды ковариантный тензор.

Заметим, однако, что путь, предложенный Э. Картаном и И. А. Схоутеном, обладает существенным недостатком, заключающимся в том, что центро-проективным преобразованиям подвергаются касательные пространства $\{A^n\}$, точки которых определяются векторами (ξ^i), допускающими (по самой своей природе) только линейные однородные преобразования.

В настоящей статье центро-проективные перенесения строятся не для касательных пространств векторов $\{A^n\}$, а для локальных центро-проективных пространств пункторов $\{P^n\}$, компоненты которых (u^i) преобразуются при преобразовании

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i) \tag{0.3}$$

локальных координатных систем дифференцируемого многообразия $\{V^n\}$ по закону

$$u^{i'} = \frac{\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} u^i}{-\dfrac{1}{(n+1)} \dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^j} u^j + 1}. \tag{0.4}$$

Таким образом, строящаяся теория оказывается избавленной от указанного выше недостатка.

Более того, среди всех локальных пространств, с действующей в них конечной группой преобразований, локальные центро-проективные пространства пункторов $\{P^n\}$ оказываются наиболее близко примыкающими к исходному дифференцируемому многообразию $\{V^n\}$, что дает возможность построить естественную теорию центро-проективных перенесений, наиболее глубоко связанную с геометрией дифференцируемого многообразия.

Заметим, что объект (0.4) был введен еще в 1925 году Вебленом и Томасом [35], а Вейль в работе [50] рассматривал даже общую проблему нахождения пространств дифференциально геометрических объектов, которые могли бы рассматриваться как локальные пространства Клейна, ассоциированные с точками общего дифференцируемого многообразия. В частном случае, когда эти пространства Клейна являются центро-проективными пространствами, соответствующие дифференциально геометрические объекты представляют собой пункторы.

Однако, многочисленные работы Принстонской школы в дальнейшем стали группироваться вокруг проективных параметров Томаса Π^i_{jk} [41] и посвящались вопросам геодезических отображений [47], [45], а исследование пространств пункторов и построение общей теории их центро-проективных перенесений (такая теория не может быть построена, исходя из одних лишь проективных параметров Томаса Π^i_{jk}) так и не было проведено*.

В настоящей статье дается систематическое построение указанной выше теории.

---

* Следует отметить, что Вебленом в 1930 году, в связи с рассмотрением единой теории поля, была введена проективная метрика в пространство пункторов [48], [49]; а Схоутеном [43], ван-Данцигом [46] и Хантьесом [44] в 1932—1936 годах исследовались проективные перенесения, которые получаются путем введения в n-мерное многообразие $(n+1)$ однородных координат ван-Данцига и которые не имеют ничего общего с теорией центро-проективных перенесений, строящейся в настоящей статье.

Первая глава написана несколько формально и носит предварительный характер. Здесь выводится приведенная система дифференциальных уравнений дробно-линейных преобразований

$$\frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^k} + \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^k} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^j}$$

и, с помощью объекта

$$\gamma^i_{jk} = \frac{1}{(n+1)} \delta^i_j \frac{\partial \ln a}{\partial x^k} + \frac{1}{(n+1)} \delta^i_k \frac{\partial \ln a}{\partial x^j}, \tag{0.5}$$

где (a) – относительный скаляр веса $N=1$, определяется инвариантное дифференцирование относительно этих преобразований.

Затем вводится общее понятие симметричного связующего объекта, компоненты которого ($G^i_{jk} = G^i_{kj}$) удовлетворяют формуле расщепления аффинной связности

$$\Gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk} + G^i_{jk}$$

и дают возможность вычислить как проектывные параметры Томаса [41]

$$\Pi^i_{jk} = G^i_{jk} - \frac{1}{(n+1)} \left(\delta^i_j G^l_{lk} + \delta^i_k G^l_{lj} \right),$$

так и тензор эквиаффинности

$$V_{ij} = \frac{\partial G^l_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial G^l_{lj}}{\partial x^i}.$$

Далее, наряду с хорошо известным тензором проективной кривизны ($P^l_{k,ji}$), вводятся тензоры эквиаффинной кривизны

$$Q^l_{k,ji} = \frac{3}{2(n+1)} \left(\delta^l_{(j} V_{ik)} - V_{ji} \delta^l_k \right) \tag{0.6}$$

и эквипроективной кривизны

$$T^l_{k,ji} = P^l_{k,ji} - Q^l_{k,ji} \tag{0.7}$$

и дается явное выражение этих тензоров через компоненты связующего объекта.

В конце главы дается инвариантное определение проективного и эквипроективного пространства Веблена – Уайтхеда.

Заметим, что определения, данные в первой главе, и выведенные в ней формулы довольно громоздки, что и побудило меня выделить их в специальную главу, с тем чтобы не заслонять длинными выкладками геометрического содержания остальных глав. Возможно (а может быть и целесообразно) начать чтение непосредственно со второй главы, обращаясь к материалу первой главы только по мере надобности, в тех местах, где сделаны соответствующие ссылки.

Во второй главе рассматриваются локальные центро-проективные пространства пункторов $\{P^n\}$. Выясняется геометрический смысл пунктора и вводится понятие проективного дифференциала.

Затем, рассматриваются пространства копункторов $\{Q^n\}$, двойственные к пространству пункторов $\{P^n\}$ и приводится общая схема гомоморфизмов, выясняющая взаимоотношения между преобразованиями, действующими во всех рассматриваемых пространствах.

Далее, путем задания поля копунктора (a_i) на дифференцируемом многообразии $\{V^n\}$, устанавливается связь между векторами (ξ_i) касательных пространств $\{A^n\}$ и пункторами (u^i) локальных центро-проективных пространств $\{P^n\}$, а также между ковекторами (ξ_i) пространств $\{B^n\}$, дуальных к $\{A^n\}$, и копункторами (u_i) пространств $\{Q^n\}$, двойственных к $\{P^n\}$. Эта связь позволяет определить для пункторов и копункторов операции сложения, вычитания и умножения на число.

Особое место занимает § 4 второй главы, в котором рассматривается вопрос введения проективной метрики в пространство пункторов $\{P^n\}$.

В конце главы выясняется геометрический смысл объекта (0.5), определяющего инвариантное дифференцирование относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований.

В третьей главе устанавливается сначала соответствие между центро-проективными перенесениями $\{A^n\}$ и $\{P^n\}$ и линейными перенесениями $\{B^n\}$ и $\{Q^n\}$, которое позволяет потом ввести общее определение объекта центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка. Компоненты этого объекта $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{lm})$ преобразуются при преобразовании (0.3) по закону

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma^{i'}_{j'k'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\,\partial x^{k'}} \\ \Gamma_{l'm'} &= \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\,\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\left[\Gamma_{lm} - \left(\frac{\partial^2 \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^l\,\partial x^m} - \frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^k}\,\Gamma^k_{lm}\right)\right]\end{aligned}\right.$$

и дают возможность построить общую теорию центро-проективных перенесений $\{P^n\}$ и линейных перенесений $\{Q^n\}$.

Далее, вводится в рассмотрение тензор

$$\tilde{C}_{ij} = \Gamma_{ij} + \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial \Gamma^k_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma^k_{kl}\,\Gamma^l_{ij}\right), \tag{0.8}$$

обращение которого в нуль приводит к центро-проективным перенесениям $\{P^n\}$, инвариантно присоединенным к пространству аффинной связности.

В § 4 определяются все центро-проективные связности $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{lm})$, дающие проективно-метрические перенесения $\{P^n\}$.

В конце третьей главы вводится в рассмотрение полный объект кручения (R^k_{ji}, R_{ji}) и полный объект кривизны $(R^l_{k,ji}, R_{k,ji})$ и особо выделяются среди центро-проективных связностей $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{lm})$ аффинно-плоские и проективно-плоские связности.

В четвертой главе в локальные центро-проективные пространства пункторов $\{P^n\}$ вносится, с помощью свернутого объекта аффинной связности (Γ^k_{ki}) и симметрической части тензора Риччи $\sigma_{ij} = \dfrac{R_{ij} + R_{ji}}{2}$, проективная метрика, вообще говоря, вырожденная, которая превращает $\{P^n\}$ в симметрические проективно-евклидовы пространства. Таким образом, пространства $\{P^n\}$, в свою очередь, начинают рассматриваться, как пространства со связностью $\Gamma^i_{jk}(x^r, u^r)$.

Далее, устанавливается соотношение

$$\Pi^i_{jk}(x^r_0)=\Gamma^i_{jk}(x^r_0)-\Gamma^i_{jk}(x^r_0,\ 0),$$

выясняющее геометрический смысл проективных параметров Томаса и выводится формула расщепления тензора эквипроективной кривизны

$$T^l_{k,ji}(x^r_0)=R^l_{k,ji}(x^r_0)-R^l_{k,ji}(x^r_0,\ 0), \tag{0.9}$$

которая является одним из основных результатов, полученных автором.

В конце четвертой главы рассматриваются пространства эквиаффинной проективно-евклидовой связности с невырожденным тензором Риччи. Для этих пространств $T^l_{k,ji}=0$ и, следовательно,

$$R^l_{k,ji}(x^r_0)=R^l_{k,ji}(x^r_0,\ 0). \tag{0.10}$$

Локальные центро-проективные пространства пункторов $\{P^n\}$ превращаются теперь в пространства постоянной кривизны, которая определяется формулой

$$K(x^r_0)=\frac{\varepsilon}{(1-n)}\sqrt[n]{\frac{\det\|R_{pq}(x^r_0)\|}{a^2(x^r_0)}}, \tag{0.11}$$

где ε — корень n-ой степени из единицы, а $a(x^r)$ — относительный скаляр веса $N=1$, определяемый с точностью до постоянного множителя из условия

$$\Gamma^k_{ki}(x^r)=\frac{\partial\ln a(x^r)}{\partial x^i}.$$

Таким образом, по своей природе, рассматриваемые пространства оказываются очень близкими к пространствам постоянной кривизны.

В пятой главе рассматриваются локально-проективные многообразия и некоторые типы пространств аффинной связности.

§ 1 посвящен изучению эквиаффинных проективно-евклидовых пространств в локально-проективных координатах. При таком рассмотрении ковариантное дифференцирование совпадает с инвариантным дифференцированием относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований, а пункторы и копункторы оказываются лежащими в самом многообразии.

Здесь показывается, что в каждом эквиаффинном проективно-евклидовом пространстве естественно возникает поле инвариантных гиперквадрик, которое, в случае симметрического проективно-евклидова пространства, вырождается в одну гиперквадрику, являющуюся его абсолютом.

Далее вводится понятие связности симметрического проективно-евклидова пространства $\Gamma^i_{jk}(x^r_0,\ x^r-x^r_0)$, соприкасающейся в точке $M_0(x^r_0)$ с исходной связностью. Таким образом, изучаемое пространство, с локальной точки зрения, оказывается устроенным, также как и симметрическое проективно-евклидово пространство.

В § 2 выделяются и изучаются пространства переменной (положительной и отрицательной) кривизны, которые с локальной точки зрения, устроены также, как классические пространства Римана и Лобачевского. Эти пространства не обладают ковариантно постоянным метрическим тензором g_{ij}, однако, в них оказывается возможным, в каждой точке $M_0(x^r_0)$, определить кривизну в друмерном направлении, не зависящую от выбора этого направления, но зависящую, вообще говоря, от точки $M_0(x_0^r)$.

В § 3 рассматриваются симметрические проективно-евклидовы пространства. Здесь, исходя из теории проективно-метрических перенесений пункторов (u^i), оказывается возможным ввести понятие поступательного движения пространства вдоль кривой.

§ 4 посвящен геодезическим линиям и выводу уравнений инфинитезимальных аффинных коллинеаций и движений эквиаффинных проективно-евклидовых пространств. В частности, здесь рассматриваются инфинитезимальные аффинные коллинеации и движения симметрических проективно-евклидовых пространств.

§ 5 занимает особое место. Здесь рассматриваются локально-проективные многообразия с симметричной почти симплектической связностью Γ^l_{jk}, определяемой из условия

$$\nabla_k a_{ij} = \partial_{(k} a_{ij)},$$

где a_{ij} — невырожденный кососимметрический тензор.

Такая связность, при дополнительном требовании

$$a_{l(i} \Gamma^l_{jk)} = 0,$$

которое, в силу дробно-линейного характера преобразований локальных координатных систем, имеет инвариантный смысл, определяется однозначно по формуле

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{3} a^{li} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} \right).$$

Далее, приводится формула для компонент тензора кривизны и специально рассматриваются плоские пространства почти симплектической и симплектической связности.

В шестой главе дается построение пространства с центро-проективной связностью $(\Gamma^l_{jk}, \Gamma_{lm})$ из дифференциальной окрестности третьего порядка инвариантным алгебраическим методом, разработанным Г. Ф. Лаптевым [6] и А. М. Васильевым [3] и основанным на теории последовательных продолжений и охватов одних геометрических объектов другими.

При таком изложении изучаемое пространство выступает как многообразие, погруженное в пространство представления продолженной псевдогруппы аналитических преобразований.

Здесь выводятся уравнения структуры рассматриваемого пространства и уравнения структуры локальных центро-проективных пространств пункторов, в которых естественным образом индуцируется связность симметрического проективно-евклидова пространства. В этой главе получены дифференциальные уравнения, определяющие все рассмотренные ранее геометрические объекты.

Первые пять глав написаны тензорным методом (хотя в действительности приходится иметь дело с геометрическими объектами той или иной природы). Последняя глава написана методом внешних дифференциальных форм.

Номера теорем и определений даны в натуральном порядке, промежуточные соотношения отмечены двумя числами в круглых скобках, причем первое из них указывает на номер главы. Сноски всюду отмечены звездочками, а ссылки на литературу числами в квадратных скобках. Список литературы помещен в самом конце работы и содержит только те статьи и монографии, на которые, так или иначе, делаются ссылки в тексте статьи.

Результаты, полученные в настоящей работе, неоднократно докладывались в МГУ им. М. В. Ломоносова: на семинарах проф. С. П. Финикова, а также на заседаниях Моск. Мат. О-ва и на научной конференции „Ломоносовские чтения".

Кроме того в 1960–1961 учебном году мною читался в университете специальный курс для аспирантов-геометров. В этом курсе было подробно изложено все содержание настоящей работы, а также возможные пути дальнейших исследований. Тот же курс в 1962–1963 г. читался и в Вильнюсе.

Все основные результаты статьи вместе с краткими доказательствами содержатся в моих статьях [10]–[19], опубликованных в журналах ДАН СССР и УМН.

Глава 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПСЕВДОГРУППЫ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОЕКТИВНЫМ И ЭКВИПРОЕКТИВНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ ВЕБЛЕНА–УАЙТХЕДА

§ 1. Приведенная система дифференциальных уравнений псевдогруппы дробно-линейных преобразований

Если $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'})$ — две системы неоднородных локально-проективных координат, то в окрестности точки $O(x^i=0)$ всякое достаточно близкое к тождественному дробно-линейное преобразование может быть представлено в виде

$$x^{p'}=\frac{a_p^{p'}x^p}{b_qx^q+1}+C^{p'}, \tag{1.1}$$

где $a_p^{p'}$, b_q, $C^{p'}$ — const и $\det\|a_p^{p'}\|\neq 0$.

Совокупность этих преобразований образует псевдогруппу в смысле Веблена—Уайтхеда [5].

Из (1.1), путем дифференцирования, получаем

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^i}=\frac{(a_i^{p'}b_p-a_p^{p'}b_i)\,x^p+a_i^{p'}}{(b_qx^q+1)^2}, \tag{1.2}$$

и

$$\frac{\partial^2 x^{q'}}{\partial x^j\partial x^k}=-\frac{b_j\left[(a_k^{q'}b_q-a_q^{q'}b_k)\,x^q+a_k^{q'}\right]+b_k\left[(a_j^{q'}b_q-a_q^{q'}b_j)\,x^q+a_j^{q'}\right]}{(b_qx^q+1)^3}. \tag{1.3}$$

Перемножая почленно равенства (1.2) и (1.3) и циклируя по индексам i, и k, будем иметь в левой части

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{(i}}\,\frac{\partial^2 x^{q'}}{\partial x^j\partial x^{k)}},$$

в то время как в правой окажется выражение, симметричное не только по i, j и k, но и по p' и q', что дает возможность исключить все параметры и получить, таким образом, систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{(i}}\,\frac{\partial^2 x^{q'}}{\partial x^j\partial x^{k)}}-\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^{(i}}\,\frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^j\partial x^{k)}}=0. \tag{1.4}$$

Теорема 1. *Система уравнений* (1.4), *при условии*

$$\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|\neq 0 \quad \text{и} \quad n\geqslant 2, \tag{1.5}$$

определяет псевдогруппу дробно-линейных преобразований.

Доказательство. Пусть ξ^r — вектор общего инфинитезимального преобразования, тогда, заменяя в уравнениях (1.4) $x^{r'}$ на $x^r+\xi^r\delta t$ и приравнивая нулю коэффициенты при δt, получаем систему

$$\delta^p_{(i}\,\frac{\partial^2\xi^q}{\partial x^j\partial x^{k)}}-\delta^q_{(i}\,\frac{\partial^2\xi^p}{\partial x^j\partial x^{k)}}=0 \tag{1.6}$$

для определения ξ^r [27].

Если в (1.6) положить $i=p$, а $p, j, k\neq q$, то будем иметь

$$\frac{\partial^2 \xi^q}{\partial x^j \partial x^k}=0 \qquad (j,\ k\neq q). \tag{1.7}$$

Аналогично, при $i=j=p\neq q=k$, получаем

$$2\frac{\partial^2 \xi^q}{\partial x^p \partial x^q}-\frac{\partial^2 \xi^p}{(\partial x^p)^2}=0 \qquad (p\neq q). \tag{1.8}$$

Из (1.7) и (1.8) следует

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^3 \xi^r}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}=0 \\ &\frac{\partial^2 \xi^r}{\partial x^l \partial x^m}=0 \end{aligned}\right. \qquad (l,\ m\neq r). \tag{1.9}$$

Всякое решение системы (1.6) должно быть решением (1.9), а так как общее решение (1.9), имеющее вид

$$\xi^r=\alpha^r+\alpha^r_s x^s+\alpha_s x^s x^r, \tag{1.10}$$

где α^r, α^r_s, α_s — const, удовлетворяет (1.6), что можно проверить непосредственной подстановкой, то (1.10) есть общее решение (1.6).

Из (1.10) видно, что ξ^r — является вектором общего инфинитезимального преобразования псевдогруппы дробно-линейных преобразований [27] и, следовательно, (1.1) является общим решением (1.4).

Теорема 2. *Система* (1.4) *при условии* (1.5) *эквивалентна системе*

$$\frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^j \partial x^k}=\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j}\frac{\partial \ln \det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k}+\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^k}\frac{\partial \ln \det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^j}. \tag{1.11}$$

Доказательство. Покажем сначала, что (1.11) следует из (1.4). Действительно, свертывая (1.4) с $\frac{\partial x^i}{\partial x^{q'}}$ и приводя подобные члены, будем иметь

$$-(n+1)\frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^j \partial x^k}+\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial x^{q'}}\frac{\partial^2 x^{q'}}{\partial x^i \partial x^k}+\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x^{q'}}\frac{\partial^2 x^{q'}}{\partial x^i \partial x^j}=0. \tag{1.12}$$

(1.11) получается теперь из (1.12), если воспользоваться тождеством [4]

$$\frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}}\frac{\partial^2 x^{q'}}{\partial x^q \partial x^p}=\frac{\partial \ln \det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^p}.$$

Обратно, (1.4) получается из (1.11) путем умножения на $\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^i}$ и циклирования по i, j, k с последующей альтернацией по p' и q'.

Определение 1. Система (1.11), при условии (1.5), называется приведенной системой дифференциальных уравнений псевдогруппы дробно-линейных преобразований.

При $n=1$ система (1.4), также как и (1.11), удовлетворяется произвольной функцией.

Непосредственное интегрирование системы (1.11) при $n\geqslant 2$ можно найти в [35].

§. 2. Объект γ и инвариантное дифференцирование относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований

Определение 2. Назовем объектом γ геометрический объект, компоненты которого $(\gamma^i_{jk}=\gamma^i_{kj})$ преобразуются при всяком невырожденном и достаточное число раз дифференцируемом преобразовании по закону

$$\gamma^{i'}_{j'k'}=\frac{1}{(n+1)}\delta^{i'}_{j'}\frac{\partial \ln \det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{k'}}+\frac{1}{(n+1)}\delta^{i'}_{k'}\frac{\partial \ln \det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\gamma^i_{jk}. \quad (1.13)$$

Транзитивность (1.13) легко проверяется непосредственной подстановкой.

Теорема 3. *Объект γ по отношению к псевдогруппе дробно-линейных преобразований* (1.1) *обладает теми же свойствами, что и объект симметричной аффинной связности.*

Доказательство. В силу приведенной системы дифференциальных уравнений псевдогруппы дробно-линейных преобразований (1.11), имеем

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j\partial x^{k'}}=\frac{1}{(n+1)}\delta^{i'}_{j'}\frac{\partial \ln \det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{k'}}+\frac{1}{(n+1)}\delta^{i'}_{k'}\frac{\partial \ln \det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{j'}}. \quad (1.14)$$

Внося (1.14) в (1.13), получаем обычный закон преобразования аффинной связности

$$\gamma^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\gamma^i_{jk}.$$

Теорема 4. *Пусть* (a) — *относительный скаляр веса* $N=1$, *тогда величины*

$$\gamma^i_{jk}=\frac{1}{(n+1)}\delta^i_j\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}+\frac{1}{(n+1)}\delta^i_k\frac{\partial \ln a}{\partial x^j} \quad (1.15)$$

могут быть приняты за компоненты объекта γ и сохраняют свою структуру при преобразовании координат.

Доказательство. Так как $a'=\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|\cdot a$, то

$$\frac{\partial \operatorname{nl} a'}{\partial x^{k'}}=\frac{\partial \ln \det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{k'}}+\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}. \quad (1.16)$$

Умножая обе части (1.16) на $\frac{1}{(n+1)}\delta^{i'}_{j'}$ и циклируя по индексам j' и k', получаем окончательно

$$\frac{1}{(n+1)}\delta^{i'}_{j'}\frac{\partial \ln a'}{\partial x^{k'}}+\frac{1}{(n+1)}\delta^{i'}_{k'}\frac{\partial \ln a'}{\partial x^{j'}}=\frac{1}{(n+1)}\delta^{i'}_{j'}\frac{\partial \ln \det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{k'}}+$$

$$+\frac{1}{(n+1)}\delta^{i'}_{k'}\frac{\partial \ln \det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{J'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\left(\frac{1}{(n+1)}\delta^i_j\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}+\frac{1}{(n+1)}\delta^i_k\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\right).$$

Определение 3. Геометрический объект с компонентами (1.15) построенными по относительному скаляру (a) веса $N=1$, называется объектом, определяющим инвариантное дифференцирование в псевдогруппе дробно-линейных преобразований (1.1) [12].

Если величины $\eta^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}$ при дробно-линейных преобразованиях (1.1) изменяются по закону относительного тензора веса N, k-раз контравариантного и l-раз ковариантного

$$\eta^{i'_1 \ldots i'_k}_{j'_1 \ldots j'_l} = \left(\det \left\| \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\| \right)^N \cdot \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_k}}{\partial x^{i_k}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \ldots \frac{\partial x^{j_l}}{\partial x^{j'_l}} \eta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}, \qquad (1.17)$$

то их инвариантное дифференцирование относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований (1.1) производится по обычным правилам построения ковариантного дифференциала

$$\delta \eta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} = d\eta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} - N \eta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \gamma^\alpha_{\alpha\beta} dx^\beta + \eta^{\alpha \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \gamma^{i_1}_{\alpha\beta} dx^\beta + \ldots - \eta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots \alpha} \gamma^\alpha_{j_l \beta} dx^\beta \quad (1.18)$$

с той лишь разницей, что вместо объекта аффинной связности (Γ^i_{jk}) теперь используется объект (1.15). Внося в (1.18) значение (γ^i_{jk}) из (1.15), получаем

$$\delta \eta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} = d\eta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} + \left(\frac{k-l}{(n+1)} - N \right) d \ln a +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)} \eta^{\alpha \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \frac{\partial \ln a}{\partial x^\alpha} dx^{i_1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)} \eta^{i_1 \ldots \alpha}_{j_1 \ldots j_l} \frac{\partial \ln a}{\partial x^\alpha} dx^{i_k} -$$
$$- \frac{1}{(n+1)} \eta^{i_1 \ldots i_k}_{\alpha \ldots j_l} \frac{\partial \ln a}{\partial x_{j_1}} dx^\alpha - \ldots - \frac{1}{(n+1)} \eta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots \alpha} \frac{\partial \ln a}{\partial x^{j_l}} dx^\alpha. \qquad (1.19)$$

В силу теоремы 3, величины (1.19) при дробно-линейных преобразованиях изменяются по тому же закону, что и (1.17).

Из (1.19), в частности, получаем:

$$\delta \eta^i = d\eta^i + \eta^i \frac{1}{(n+1)} d \ln a + \eta^\alpha \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^\alpha} dx^i \qquad (N=0),$$

$$\delta \eta_j = d\eta_j - \eta_j \frac{1}{(n+1)} d \ln a - \eta_\alpha \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^j} dx^\alpha \qquad (N=0)$$

и

$$\delta F = dF - N \cdot F d \ln a, \qquad (1.20)$$

где F — относительный скаляр веса N.

Заметим, что для исходного относительного скаляра (a) веса $N=1$, в силу (1.20), имеем

$$\delta a = da - a d \ln a \equiv 0.$$

Инвариантное дифференцирование (1.19) в псевдогруппе дробно-линейных преобразований (1.1) обладает всеми обычными свойствами ковариантного дифференциала: сохраняет обычное правило дифференцирования суммы, разности и произведения, а также обладает переместительностью с операцией свертывания.

§ 3. Симметричный связующий объект и расщепление аффинной связности

Определение 4. Симметричным связующим объектом [13] называется геометрический объект, компоненты которого $(G^i_{jk} = G^i_{kj})$ преобразуются при всяком, невырожденном и достаточное число раз дифференцируемом, преобразовании по закону

$$G^{i'}_{j'k'} = \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} - \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{k'}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{j'}} \right) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} G^i_{jk}. \qquad (1.21)$$

Транзитивность (1.21) легко проверяется непосредственной подстановкой.

Теорема 5. *Сложение соответствующих компонент объекта γ и симметричного связующего объекта приводит к компонентам объекта симметричной аффинной связности.*

Доказательство. Складывая почленно (1.13) и (1.21), получаем

$$\gamma^{i'}_{j'k'}+G^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}(\gamma^{i}_{jk}+G^{i}_{jk})$$

и, следовательно,

$$\Gamma^{i}_{jk}=\gamma^{i}_{jk}+G^{i}_{jk}. \qquad (1.22)$$

Определение 5. Соотношение (1.22) называется общей формулой расщепления объекта симметричной аффинной связности.

Если в (1.22) вместо γ^{i}_{jk} внести их значение из (1.15), то получим расщепление симметричной аффинной связности

$$\Gamma^{i}_{jk}=\left(\frac{1}{(n+1)}\delta^{i}_{j}\frac{\partial\ln a}{\partial x^{k}}+\frac{1}{(n+1)}\delta^{i}_{k}\frac{\partial\ln a}{\partial x^{j}}\right)+G^{i}_{jk}, \qquad (1.23)$$

определяемое заданием относительного скаляра (a) веса $N=1$ [13].

Теорема 6. *Компоненты симметричного связующего объекта тогда и только тогда преобразуются по тензорному закону, когда преобразование локальных координатных систем принадлежит псевдогруппе дробно-линейных преобразований* (1.1).

Доказательство. Закон преобразования (1.21) превращается в тензорный, в силу приведенной системы дифференциальных уравнений псевдогруппы дробно-линейных преобразований (1.11), если только в этой системе поменять местами преобразуемые и преобразованные переменные.

Из (1.23) следует, что ковариантный дифференциал $D\eta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}$, определенный в аффинной связности $(\Gamma^{i}_{jk}=\Gamma^{i}_{kj})$, может быть представлен в виде:

$$D\eta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}=\delta\eta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}-N\eta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}G^{\alpha}_{\alpha\beta}dx^{\beta}+\eta^{\alpha\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}G^{i_1}_{\alpha\beta}dx^{\beta}+\ldots-\eta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots\alpha}G^{\alpha}_{j_l\beta}dx^{\beta}, \qquad (1.24)$$

где $\delta\eta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}$ определяются формулами (1.19).

Таким образом, если в некоторой данной системе координат $\{x^{i}\}$ все компоненты связующего объекта $G^{i}_{jk}\equiv 0$, то, всилу теоремы 6, и в любой другой системе координат $\{x^{i'}\}$, полученной из исходной путем преобразований (1.1), $G^{i'}_{j'k'}\equiv 0$, а следовательно, ковариантное дифференцирование (1.24) в этих системах координат будет совпадать с инвариантным дифференцированием относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований (1.19).

Свертывание симметричного связующего объекта по верхнему и нижнему индексам приводит, как непосредственно видно из (1.21), к ковариантному тензору

$$G_{k}=G^{\alpha}_{\alpha k}. \qquad (1.25)$$

Определение 6. Ковариантный тензор (1.25) называется связующим ковектором.

Обращение связующего ковектора в нуль является, очевидно, необходимым и достаточным условием совпадения ковариантного дифференцирования относительных скаляров

$$DF=\delta F-NG^{\alpha}_{\alpha k}dx^{k}$$

с их инвариантным дифференцированием относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований (1.20).

Через компоненты связующего объекта легко выразить проективные параметры Томаса [24]

$$\Pi^i_{jk}=G^i_{jk}-\frac{1}{(n+1)}\,(\delta^i_j\,G_k+\delta^i_k\,G_j), \tag{1.26}$$

которые, очевидно, тогда и только тогда будут совпадать со связующим объектом, когда связующий ковектор $G_k\equiv 0$.

В силу (1.23)

$$\Gamma^i_{jk}=\Pi^i_{jk}+\frac{1}{(n+1)}\left[\delta^i_j\left(\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}+G_k\right)+\delta^i_k\left(\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}+G_j\right)\right] \tag{1.27}$$

и, следовательно,

$$\Gamma^\alpha_{\alpha k}=\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}+G_k. \tag{1.28}$$

Внося (1.28) в (1.27), получаем известную формулу расщепления Томаса [41]

$$\Gamma^i_{jk}=\Pi^i_{jk}+\frac{1}{(n+1)}\,(\delta^i_j\,\Gamma^\alpha_{\alpha k}+\delta^i_k\,\Gamma^\alpha_{\alpha j}). \tag{1.29}$$

Теорема 7. *Два связующих объекта $\hat{G}^i_{jk}$ и $\check{G}^i_{jk}$ тогда и только тогда имеют общий тензор эквиаффинности, когда разность их связующих ковекторов $\hat{G}_i$ и $\check{G}_i$ градиентна.*

Доказательство. Из (1.28) видно, что тензор эквиаффинности

$$V_{ij}=\frac{\partial G_i}{\partial x^j}-\frac{\partial G_j}{\partial x^i} \tag{1.30}$$

и, следовательно, условия $\hat{V}_{ij}=\check{V}_{ij}$ и $(\hat{G}_i-\check{G}_i)=\operatorname{grad}\varphi$ эквивалентны.

Проективные параметры Томаса Π^i_{jk} остаются инвариантными при геодезических преобразованиях связности [24] и определяют, таким образом, множество геодезически эквивалентных (т. е., допускающих соответствие с сохранением геодезических) пространств.

Если это множество разбить на классы, содержащие пространства, обладающие одним и тем же тензором эквиаффинности, то каждому симметричному связующему объекту G^i_{jl} будет соответствовать тот класс, в котором тензор эквиаффинности имеет вид (1.30).

Обратно, каждому классу, в силу теоремы 7, будет соответствовать целое множество симметричных связующих объектов

$$\left\{G^i_{jl}+\frac{1}{(n+1)}\left(\delta^i_j\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}+\delta^i_l\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)\right\}. \tag{1.31}$$

§ 4. Тензоры проективной, эквипроективной и эквиаффинной кривизны

Определение 7. Тензором проективной кривизны в пространстве симметричной аффинной связности (Γ^i_{jk}) называется тензор с компонентами

$$P^l_{k,\,ji}=R^l_{k,\,ji}-2P_{[ij]}\delta^l_k+2\delta^h_{[i}P_{j]\,k}, \tag{1.32}$$

где $R^l_{k,\,ji}$ — тензор кривизны пространства аффинной связности, а P_{ij} — тензор, выражающийся через тензор Риччи R_{ij} и тензор эквиаффинности V_{ij} по формуле

$$P_{ij}=\frac{1}{1-n^2}\,[(n+1)\,R_{ji}+V_{ji}]. \tag{1.33}$$

Обращение тензора (1.32) в нуль при $n>2$ дает необходимое и достаточ ное условие того, что пространство является проективно-евклидовым [24 (т. е., геодезически эквивалентным обычному аффинному пространству).

Подставляя в (1.33) выражение тензора Риччи через его симметрическую часть σ_{ij} и тензор эквиаффинности

$$R_{ij}=\sigma_{ij}+\frac{V_{ji}}{2},$$

будем иметь

$$P_{ij}=-\frac{1}{2(n+1)}V_{ij}+\frac{1}{(1-n)}\sigma_{ij}. \qquad (1.34$$

Внося теперь (1.34) в (1.32), получаем

$$P^l_{k,ji}=R^l_{k,ji}-\frac{1}{(1-n)}(\delta^l_j\sigma_{ik}-\delta^l_i\sigma_{jk})+\frac{3}{2(n+1)}(\delta^l_{(j}V_{ik)}-V_{ji}\delta^l_k). \qquad (1.35$$

Определение 8. Тензором эквиаффинной кривизны $Q^l_{k,ji}$ называется тен зор, компоненты которого выражаются через компоненты тензора эквиаффин ности по формуле

$$Q^l_{k,ji}=\frac{3}{2(n+1)}(\delta^l_{(j}V_{ik)}-V_{ji}\delta^l_k). \qquad (1.36$$

Теорема 8. *Для того, чтобы тензор эквиаффинной кривизны* (1.36) *обра щался в нуль, необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль тензо эквиаффинности.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства не обходимости положим $i\neq j=k=l$, (1.36) примет вид

$$Q^l_{l,ji}=\frac{3}{2(n+1)}V_{ij} \quad (\text{по } l \text{ не суммировать})$$

и, следовательно, $Q^l_{k,ji}=0$ повлечет са собой $V_{ij}=0$.

Заметим здесь же, что компоненты тензора эквиаффинной кривизнь (1.36), в силу (1.30), выражаются через первые производные компонент свя зующего ковектора (1.25) в виде

$$Q^l_{k,ji}=\frac{1}{(n+1)}\left[\frac{1}{2}\delta^l_j\left(\frac{\partial G_i}{\partial x^k}-\frac{\partial G_k}{\partial x^i}\right)+\frac{1}{2}\delta^l_i\left(\frac{\partial G_k}{\partial x^j}-\frac{\partial G_j}{\partial x^k}\right)-\delta^l_k\left(\frac{\partial G_j}{\partial x^i}-\frac{\partial G_i}{\partial x^j}\right)\right]. \qquad (1.37$$

Определение 9. Разность

$$T^l_{k,ji}=P^l_{k,ji}-Q^l_{k,ji} \qquad (1.38$$

тензора проективной кривизны (1.35) и тензора эквиаффинной кривизны (1.36) называется тензором эквипроективной кривизны.

Теорема 9. *Для того, чтобы тензор эквипроективной кривизны* (1.38) *обращался в нуль, необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль как тензор проективной кривизны* (1.35), *так и тензор эквиаффинной кривизны* 1.36).

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости заметим, что свертывание (1.35) и (1.36) по индексам k и l приводит к

$$P^l_{l,ji}=0 \quad \text{и} \quad Q^l_{l,ji}=V_{ij},$$

а следовательно, при условии $T^l_{k,ji}=0$, свертывание (1.38) по тем же индексам приводит к $V_{ij}=0$, что, в силу (1.36), дает $Q^l_{k,ji}=0$.

Итак, при $T^l_{k,ji}=0$ необходимо $Q^l_{k,ji}=0$, а, следовательно, в силу (1.38), и $P^l_{k,ji}=0$.

Теорема 10. *Компоненты тензора эквипроективной кривизны* (1.38) *выражаются через компоненты связующего объекта и их первые производные по формуле:*

$$T^l_{k,ji} = \frac{\partial G^l_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial G^l_{kj}}{\partial x^i} + G^\alpha_{ik} G^l_{\alpha j} - G^\alpha_{jk} G^l_{\alpha i} -$$

$$- \frac{1}{(1-n)} \left[\delta^l_j \left(\frac{1}{2} \frac{\partial G_k}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial G_i}{\partial x^k} - \frac{\partial G^\alpha_{ik}}{\partial x^\alpha} + G^\alpha_{\beta i} G^\beta_{\alpha k} - G^\alpha_{ki} G_\alpha \right) - \right.$$

$$\left. - \delta^l_i \left(\frac{1}{2} \frac{\partial G_k}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial G_j}{\partial x^k} - \frac{\partial G^\alpha_{jk}}{\partial x^\alpha} + G^\alpha_{\beta j} G^\beta_{\alpha k} - G^\alpha_{kj} G_\alpha \right) \right]. \qquad (1.39)$$

Доказательство. Внося (1.35) и (1.36) в (1.38), имеем

$$T^l_{k,ji} = R^l_{k,ji} - \frac{1}{(1-n)} (\delta^l_j \sigma_{ik} - \delta^l_i \sigma_{jk}). \qquad (1.40)$$

Компоненты тензора кривизны, в силу общей формулы расщепления симметричной аффинной связности (1.22), принимают вид

$$R^l_{k,ji} = \frac{\partial G^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial G^l_{jk}}{\partial x^i} + G^\alpha_{ik} G^l_{j\alpha} - G^\alpha_{jk} G^l_{i\alpha} +$$

$$+ \frac{\partial \gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma^l_{jk}}{\partial x^i} + \gamma^\alpha_{ik} \gamma^l_{j\alpha} - \gamma^\alpha_{jk} \gamma^l_{i\alpha} + \gamma^\alpha_{ik} G^l_{j\alpha} + G^\alpha_{ik} \gamma^l_{j\alpha} - \gamma^\alpha_{jk} G^l_{\alpha i} - G^\alpha_{jk} \gamma^l_{\alpha i}. \qquad (1.41)$$

Но, в силу (1.15),

$$\frac{\partial \gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma^l_{jk}}{\partial x^i} + \gamma^\alpha_{ik} \gamma^l_{j\alpha} - \gamma^\alpha_{jk} \gamma^l_{i\alpha} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \left[\delta^l_j \left(\frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^i} \frac{\partial \ln a}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^i \partial x^k} \right) - \delta^l_i \left(\frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^j} \frac{\partial \ln a}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^j \partial x^k} \right) \right] =$$

$$= a^{\frac{1}{(n+1)}} \left(\delta^l_j \frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i \partial x^k} - \delta^l_i \frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^j \partial x^k} \right)$$

и

$$\gamma^\alpha_{ik} G^l_{j\alpha} + G^\alpha_{ik} \gamma^l_{j\alpha} - \gamma^\alpha_{jk} G^l_{\alpha i} - G^\alpha_{jk} \gamma^l_{\alpha i} = \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^\alpha} (\delta^l_j G^\alpha_{ik} - \delta^l_i G^\alpha_{jk}). \qquad (1.43)$$

Таким образом, внося (1.42) и (1.43) в (1.41), получаем

$$R^l_{k,ji} = \frac{\partial G^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial G^l_{jk}}{\partial x^i} + G^\alpha_{ik} G^l_{j\alpha} - G^\alpha_{jk} G^l_{i\alpha} +$$

$$+ a^{\frac{1}{(n+1)}} \left(\delta^l_j \frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i \partial x^k} - \delta^l_i \frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^j \partial x^k} \right) + \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^\alpha} (\delta^l_j G^\alpha_{ik} - \delta^l_i G^\alpha_{jk}). \qquad (1.44)$$

Из (1.44) будем иметь для тензора Риччи

$$R_{k,j} = \frac{\partial G_k}{\partial x^j} - \frac{\partial G^l_{jk}}{\partial x^l} + G^\alpha_{lk} G^l_{j\alpha} - G^\alpha_{jk} G_\alpha +$$

$$+ (1+n) a^{\frac{1}{(n+1)}} \frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{1-n}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^\alpha} G^\alpha_{jk}, \qquad (1.45)$$

а для его симметрической части

$$\sigma_{k,j} = \frac{1}{2} \frac{\partial G_k}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial G_j}{\partial x^k} - \frac{\partial G^l_{jk}}{\partial x^l} + G^\alpha_{lk} G^l_{j\alpha} - G^\alpha_{jk} G_\alpha +$$

$$+ (1-n) a^{\frac{1}{(n+1)}} \frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{1-n}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^\alpha} G^\alpha_{jk}. \qquad (1.46)$$

Если теперь внести (1.44) и (1.46) в (1.40), то члены вида

$$a^{\frac{1}{(n+1)}}\delta^l_i\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^j\partial x^k} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(n+1)}\frac{\partial\ln a}{\partial x^\alpha}\delta^l_i G^\alpha_{jk}$$

уничтожатся, а оставшееся выражение в точности совпадет с (1.39).

Подставляя (1.39) и (1.37) в (1.38), получаем выражение для компонент тензора проективной кривизны (1.32)

$$P^l_{k,\,ji}=\frac{\partial G^l_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial G^l_{kj}}{\partial x^i}+G^\alpha_{ik}G^l_{\alpha j}-G^\alpha_{jk}G^l_{\alpha i}-$$

$$-\frac{1}{(1-n)}\left[\delta^l_j\left(\frac{1}{2}\frac{\partial G_k}{\partial x^i}+\frac{1}{2}\frac{\partial G_i}{\partial x^k}-\frac{\partial G^\alpha_{ik}}{\partial x^\alpha}+G^\alpha_{\beta i}G^\beta_{\alpha k}-G^\alpha_{ki}G_\alpha\right)-\right.$$

$$\left.-\delta^l_i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial G_k}{\partial x^j}+\frac{1}{2}\frac{\partial G_j}{\partial x^k}-\frac{\partial G^\alpha_{jk}}{\partial x^\alpha}+G^\alpha_{\beta j}G^\beta_{\alpha k}-G^\alpha_{kj}G_\alpha\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{(n+1)}\left[\frac{1}{2}\delta^l_j\left(\frac{\partial G_i}{\partial x^k}-\frac{\partial G_k}{\partial x^i}\right)+\frac{1}{2}\delta^l_i\left(\frac{\partial G_k}{\partial x^j}-\frac{\partial G_j}{\partial x^k}\right)-\delta^l_k\left(\frac{\partial G_j}{\partial x^i}-\frac{\partial G_i}{\partial x^j}\right)\right]. \qquad (1.47)$$

Важно заметить, что хотя компоненты тензора проективной кривизны (1.32) выражаются через проективные параметры Томаса по формуле

$$P^l_{k,\,ji}=\frac{\partial \Pi^l_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial \Pi^l_{kj}}{\partial x^i}+\Pi^\alpha_{ik}\Pi^l_{\alpha j}-\Pi^\alpha_{jk}\Pi^l_{\alpha i}-$$

$$-\frac{1}{(1-n)}\left[\delta^l_j\left(\Pi^\alpha_{\beta i}\Pi^\beta_{\alpha k}-\frac{\partial\Pi^\alpha_{ik}}{\partial x^\alpha}\right)-\delta^l_i\left(\Pi^\alpha_{\beta j}\Pi^\beta_{\alpha k}-\frac{\partial\Pi^\alpha_{jk}}{\partial x^\alpha}\right)\right], \qquad (1.48)$$

которая может быть получена внесением в (1.47) вместо компонент симметричного связующего объекта их значений из (1.26), тем не менее тензоры эквиаффинной кривизны (1.36) и эквипроективной кривизны (1.38) через эти параметры выражены быть не могут.

§ 5. Проективное и эквипроективное пространство Веблена – Уайтхеда

Определение 10. Пусть $n>2$, тогда n-мерное дифференцируемое многообразие, с заданными на нем проективными параметрами Томаса Π^i_{jk}, называется проективным пространством Веблена – Уайтхеда [2], если построенный по этим параметрам тензор проективной кривизны (1.48) тождественно обращается в нуль.

Проективные параметры Томаса определяются здесь независимо от связующего объекта, как самостоятельный геометрический объект, с компонентами Π^i_{jk}, удовлетворяющими условию $\Pi^\alpha_{\alpha k}=0$ и преобразующимися, при преобразовании локальных координатных систем $\{x^i\}\to\{x^{i'}\}$, по закону

$$\Pi^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Pi^i_{jk}+\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\frac{\partial\ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{k'}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial\ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{j'}}\right)\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \qquad (1.49)$$

Теорема 11. *В проективном пространстве Веблена – Уайтхеда всегда можно перейти к таким системам координат, определенным с точностью до* *произвольных невырожденных дробно-линейных преобразований, в которых проективные параметры Томаса тождественно обращаются в нуль.*

Доказательство. Положив в (1.49) $\Pi^{i'}_{j'k'} \equiv 0$, получаем систему уравнений

$$\frac{1}{(n+1)}\,\delta^{i'}_{j'}\,\frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{k'}} + \frac{1}{(n+1)}\,\delta^{i'}_{k'}\,\frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{j'}} =$$

$$= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\Pi^i_{jk}. \tag{1.50}$$

Внося в (1.50) значение Π^i_{jk} из (1.29), имеем

$$\frac{1}{(n+1)}\,\delta^{i'}_{j'}\Gamma^{\alpha'}_{\alpha' k'} + \frac{1}{(n+1)}\,\delta^{i'}_{k'}\Gamma^{\alpha'}_{\alpha' j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\Gamma^i_{jk}. \tag{1.51}$$

Обращение тензора проективной кривизны (1.32) в нуль является при $n > 2$ условием интегрируемости системы (1.51) и определяет проективно-евклидовы пространства аффинной связности (т. е. такие пространства аффинной связности, которые геодезически эквивалентны аффинному пространству) [24].

Так как система (1.51) эквивалентна системе (1.50), а тензор проективной кривизны (1.32) может быть представлен в виде (1.48), то обращение тензора (1.48) в нуль является условием интегрируемости системы (150), т. е. условием возможности перехода к такой системе координат $\{x^{i'}\}$, в которой проективные параметры Томаса $\Pi^{i'}_{j'k'} = 0$.

Эта система координат определена с точностью до произвольных невырожденных дробно-линейных преобразований, ибо при $\Pi^i_{jk} = 0$ и $\Pi^{i'}_{j'k'} = 0$ система (1.49) удовлетворяется только этими преобразованиями.

Очевидно, проективное пространство Веблена — Уайтхеда обладает свойствами, общими всем проективно-евклидовым пространствам аффинной связности и может рассматриваться просто как совокупность таких пространств. Если эту совокупность разбить на классы, содержащие пространства с одним и тем же тензором эквиаффинности, то каждый класс определится заданием такого симметричного связующего объекта, для которого обращается в нуль тензор проективной кривизны (1.32). Сам же тензор эквиаффинности определяется по формуле (1.30).

Обратно, каждому классу будет соответствовать множество (1.31) симметричных связующих объектов, обращающих в нуль тензор (1.32).

Определение 11. Пусть $n > 2$, тогда n-мерное дифференцируемое многообразие, с заданным на нем множеством симметричных связующих объектов (1.31), называется эквипроективным пространством Веблена — Уайтхеда, если каждый из этих объектов обращает в нуль тензор эквипроективной кривизны (1.39).

Теорема 12. *Связующий ковектор* (1.25) *каждого симметричного связующего объекта из множества* (1.31), *определяющего эквипроективное пространство Веблена — Уайтхеда, градиентен.*

Доказательство. Так как для рассматриваемых симметричных связующих объектов тензор эквипроективной кривизны $T^l_{k,ji} = 0$, то, в силу теоремы 9, тензор эквиаффинной кривизны $Q^l_{k,ji} = 0$, а тогда, в силу теоремы 8, тензор эквиаффинности $V_{ij} = 0$ и, следовательно, из (1.30) имеем $(G_i) = \operatorname{grad} \varphi$.

Очевидно, эквипроективное пространство Веблена-Уайтхеда может рассматриваться как совокупность проективно-евклидовых пространств эквиаффинной связности.

При $n=2$ тензор проективной кривизны (1.32) обращается в нуль тождественно, а условие интегрируемости системы (1.51), определяющее двумерные проективно-евклидовы пространства аффинной связности, записывается в виде

$$\nabla_i P_{jk}-\nabla_j P_{ik}=0, \tag{1.52}$$

где P_{ij} — тензор, определенный формулой (1.34) [24].

Внося в (1.52) значение P_{ij}, имеем

$$\frac{1}{(1-n)}(\nabla_i\sigma_{jk}-\nabla_j\sigma_{ik})-\frac{1}{2\,(n+1)}(\nabla_i V_{jk}-\nabla_j V_{ik})=0. \tag{1.53}$$

Система (1.51) эквивалентна системе (1.50) и, следовательно, равенство (1.53) должно быть условием интегрируемости (1.50), а так как система (1.50) определяется проективными параметрами Томаса, то тензор $P_{k,ji}$, стоящий в левой части равенства (1.53), должен выражаться только через эти параметры и их производные.

Таким образом, при внесении в левую часть равенства (1.53) вместо σ_{ij} и V_{ij} их выражений через проективные параметры Томаса и свернутый объект аффинной связности, целесообразно с самого начала не учитывать членов, содержащих, так или иначе, компоненты свернутого объекта аффинной связности, так как эти члены все равно должны уничтожиться.

Учитывая выше сказанное, можно написать

$$P_{k,ij}=\frac{1}{(1-n)}(\nabla_i\sigma_{jk}-\nabla_j\sigma_{ik})-\frac{1}{2\,(n+1)}\nabla_i V_{jk}-\nabla_j V_{ik})=$$

$$=\frac{1}{(1-n)}\left(\frac{\partial\check\sigma_{jk}}{\partial x^i}-\check\sigma_{j\alpha}\Pi^\alpha_{ki}-\frac{\partial\check\sigma_{ik}}{\partial x^j}+\sigma_{i\alpha}\Pi^\alpha_{kj}\right), \tag{1.54}$$

где

$$\check\sigma_{ij}=\Pi^\alpha_{\beta i}\Pi^\beta_{\alpha j}-\frac{\partial\Pi^\alpha_{ij}}{\partial x^\alpha} \tag{1.55}$$

представляет собой сумму только тех членов симметрической части тензора Риччи, которые не содержат свернутого объекта аффинной связности.

Внося (1.55) в (1.54), получаем окончательно:

$$P_{k,ji}=\frac{1}{(1-n)}\left[\frac{\partial^2\Pi^\alpha_{ik}}{\partial x^j\partial x^\alpha}-\frac{\partial^2\Pi^\alpha_{jk}}{\partial x^i\partial x^\alpha}+\frac{\partial\Pi^\alpha_{j\beta}}{\partial x^\alpha}\Pi^\beta_{ik}-\frac{\partial\Pi^\alpha_{i\beta}}{\partial x^\alpha}\Pi^\beta_{jk}+\frac{\partial\Pi^\beta_{\alpha j}}{\partial x^i}\Pi^\beta_{\alpha k}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\Pi^\alpha_{\beta i}}{\partial x^j}\Pi^\beta_{\alpha k}+\frac{\partial\Pi^\beta_{\alpha k}}{\partial x^i}\Pi^\alpha_{\beta j}-\frac{\partial\Pi^\beta_{\alpha k}}{\partial x^j}\Pi^\alpha_{\beta i}+\Pi^\alpha_{\beta i}\Pi^\beta_{\alpha\gamma}\Pi^\gamma_{kj}-\Pi^\alpha_{\beta j}\Pi^\beta_{\alpha\gamma}\Pi^\gamma_{ki}\right].$$

$$(i,\ j,\ k,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2). \tag{1.56}$$

Определение 12. Двумерное дифференцируемое многообразие, с заданными на нем проективными параметрами Томаса, называется проективным пространством Веблена – Уайтхеда, если тензор (1.56), построенный по этим параметрам, тождественно обращается в нуль.

В заключение остается заметить, что двумерные пространства проективно-евклидовой эквиаффинной связности выделяются инвариантными условиями

$$T_{k,ji} \equiv \frac{1}{(1-n)} (\nabla_i \sigma_{jk} - \nabla_j \sigma_{ik}) = 0 \tag{1.57}$$

и

$$V_{ij} = 0, \tag{1.58}$$

которые, будучи выражены через компоненты связующих объектов (1.31), принимают вид

$$\begin{aligned} T_{k,ji} \equiv \frac{1}{(1-n)} \Big[& \frac{\partial^2 G^\alpha_{ik}}{\partial x^j \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 G^\alpha_{jk}}{\partial x^i \partial x^\alpha} + \frac{\partial G^\alpha_{j\beta}}{\partial x^\alpha} G^\beta_{ik} - \frac{\partial G^\alpha_{i\beta}}{\partial x^\alpha} G^\beta_{jk} + \\ & + \frac{\partial G^\alpha_{\beta j}}{\partial x^i} G^\beta_{\alpha k} - \frac{\partial G^\alpha_{\beta i}}{\partial x^j} G^\beta_{\alpha k} + \frac{\partial G^\beta_{\alpha k}}{\partial x^i} G^\alpha_{\beta j} - \frac{\partial G^\beta_{\alpha k}}{\partial x^j} G^\alpha_{\beta i} + \\ & + \frac{\partial G^\alpha_{ki}}{\partial x^j} G_\alpha - \frac{\partial G^\alpha_{kj}}{\partial x^i} G_\alpha + \frac{\partial G_\alpha}{\partial x^j} G^\alpha_{ki} - \frac{\partial G_\alpha}{\partial x^i} G^\alpha_{kj} + \\ & + G^\alpha_{\beta i} G^\beta_{\alpha\gamma} G^\gamma_{kj} - G^\alpha_{\beta j} G^\beta_{\alpha\gamma} G^\gamma_{ki} + G^\alpha_{li} G_\alpha G^l_{kj} - G^\alpha_{lj} G_\alpha G^l_{ki} \Big] = 0 \end{aligned} \tag{1.59}$$

и

$$V_{ij} \equiv \frac{\partial G_i}{\partial x^j} - \frac{\partial G_j}{\partial x^i} = 0. \tag{1.60}$$

и определяют, аналогично предыдущему, эквипроективное пространство Веблена – Уайтхеда при $n = 2$.

ГЛАВА 2

ЛОКАЛЬНЫЕ ЦЕНТРО-ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПУНКТОРОВ НА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ МНОГООБРАЗИИ И ДВОЙСТВЕННЫЕ К НИМ ОБЩИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА КОПУНКТОРОВ

§ 1. Понятие пунктора, его геометрический смысл и основные свойства. Проективный дифференциал

Свяжем с каждой точкой $M_0(x_0^i)$ n-мерного дифференцируемого многообразия $\{V^n\}$ центро-проективное пространство $\{P^n\}$ того же числа измерений [14] и потребуем, чтобы преобразование локальных координатных систем

$$x^{i'}=x^{i'}(x^{i'}) \tag{2.1}$$

в дифференцируемом многообразии $\{V^n\}$ влекло за собой центро-проективное преобразование

$$u^{i'}=\frac{\left.\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|_{M_0} u^i}{-\left.\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln\det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^j}\right|_{M_0} u^j+1} \tag{2.2}$$

координат (u^i) в пространстве $\{P^n\}$.

Теорема 13. *В каждой точке M_0 дифференцируемого многообразия $\{V^n\}$ формула (2.2) определяет гомоморфное отображение псевдогруппы $\Gamma(V^n)$ преобразований (2.1), действующих на $\{V^n\}$, в псевдогруппу $\Gamma_{M_0}(P^n)$ дробно-линейных преобразований (2.2), действующих в локальном центро-проективном пространстве $\{P^n\}$, связанном с точкой M_0.*

Доказательство. Рассмотрим на $\{V^n\}$, наряду с (2.1), преобразование

$$x^{i''}=x^{i''}(x^{i'}) \tag{2.3}$$

и соответствующее ему в точке M_0 преобразование

$$u^{i''}=\frac{\left.\dfrac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\right|_{M_0} u^{i'}}{-\left.\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln\det\left\|\dfrac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{j'}}\right|_{M_0} u^{j'}+1}\,. \tag{2.4}$$

Внося (2.2) в (2.4), получаем

$$u^{i''}=\frac{\left.\dfrac{\partial x^{i''}}{\partial x^i}\right|_{M_0} u^i}{-\left.\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln\det\left\|\dfrac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{j'}}\right|_{M_0}\left.\dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\right|_{M_0}u^j-\left.\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln\det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^j}\right|_{M_0}u^j+1}=$$

$$=\frac{\left.\dfrac{\partial x^{i''}}{\partial x^i}\right|_{M_0} u^i}{-\left.\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln\det\left\|\dfrac{\partial x^{r''}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^j}\right|_{M_0} u^j+1}$$

— преобразование, соответствующее в точке M_0 суперпозиции преобразований (2.1) и (2.3).

Ядро гомоморфизма $g_{M_0}(V^n)$, очевидно, выделяется из псевдогруппы $\Gamma(V^n)$ требованиями

$$\left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right|_{M_0} = \delta^i_k \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^i}\right|_{M_0} = 0. \tag{2.5}$$

Определение 13. Геометрический объект с компонентами (u^i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$, заданный на дифференцируемом многообразии $\{ V^n \}$, называется n-мерным пунктором, если при преобразовании локальных координатных систем (2.1) его компоненты преобразуются по транзитивному закону (2.2).

Вычисляя производную (2.2) при $u^k = 0$, имеем

$$\left.\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\right|_{u^k=0} = \left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|_{M_0}. \tag{2.6}$$

Однако, как показывает следующая ниже теорема, при $u^k = 0$, наряду с (2.6), имеет место и более глубокое соотношение.

Теорема 14. *Производные якобиана центро-проективного преобразования* (2.2), *индуцируемого в* $\{ P^n \}$, *совпадают при* $u^k = 0$ *с производными якобиана исходного преобразования локальных координатных систем* (2.1) *дифференцируемого многообразия* $\{ V^n \}$ [14].

Доказательство. Вначале целесообразно вычислить якобиан общего дробно-линейного преобразования (11). Для этого воспользуемся системой

$$\frac{\partial^2 x^{p'}}{(\partial x^k)^2} = \frac{2}{(n+1)} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^k} \frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^k},$$

которая получается из приведенной системы дифференциальных уравнений псевдогруппы дробно-линейных преобразований (1.11) при $j = k$, и которая дает:

$$\frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^k} = \frac{n+1}{2} \frac{\dfrac{\partial^2 x^{p'}}{(\partial x^k)^2}}{\dfrac{\partial x^{p'}}{\partial x^k}} = \frac{n+1}{2} \frac{\dfrac{-2b_k\left[(a^{p'}_k b_p - a^{p'}_p b_k) x^p + a^{p'}_k\right]}{(b_q x^q + 1)^3}}{\dfrac{(a^{p'}_k b_p - a^{p'}_p b_k) x^p + a^{p'}_k}{(b_q x^q + 1)^2}} =$$

$$= -(n+1) \frac{b_k}{b_q x^q + 1}. \tag{2.7}$$

Отсюда

$$\ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\| = \ln \frac{c}{(b_q x^q + 1)^{n+1}},$$

$$(c \neq 0 - \text{const})$$

но

$$\det \left\| \left(\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right)_{u^j=0} \right\| = \det \left\| a^{r'}_r \right\|$$

и, следовательно,

$$\det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\| = \frac{\det \left\| a^{r'}_r \right\|}{(b_q x^q + 1)^{n+1}}. \tag{2.8}$$

Если теперь вместо преобразования (1.1) рассмотреть (2.2), то равенство (2.8) примет вид

$$\det\left\|\frac{\partial u^{r'}}{\partial u^r}\right\| = \frac{\det\left\|\left(\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right)_{M_0}\right\|}{\left(-\frac{1}{(n+1)}\left.\frac{\partial \ln \det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^q}\right|_{M_0} u^q + 1\right)^{n+1}} \tag{2.9}$$

и, следовательно,

$$\left.\frac{\partial \det\left\|\frac{\partial u^{r'}}{\partial u^r}\right\|}{\partial u^k}\right|_{u^i=0} = \left.\frac{\partial \det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k}\right|_{M_0}. \tag{2.10}$$

Доказанная теорема показывает, что локальные центро-проективные пространства $\{P^n\}$ пункторов (u^i) несколько ближе примыкают к дифференцируемому многообразию $\{V^n\}$, чем касательные центро-аффинные пространства $\{A^n\}$ векторов (ξ^i), ибо для последних имеет место только

$\left.\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^i}\right|_{\xi^k=0} = \left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|_{M_0}$ и, следовательно, $\det\left\|\left(\frac{\partial \xi^{r'}}{\partial \xi^r}\right)_{\xi^k=0}\right\| = \det\left\|\left(\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right)_{M_0}\right\|$,

тогда как для первых, кроме (2.6) и, следовательно,

$$\det\left\|\left(\frac{\partial u^{r'}}{\partial u^r}\right)_{u^k=0}\right\| = \det\left\|\left(\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right)_{M_0}\right\|,$$

имеет место еще и (2.10).

Более того, локальные центро-проективные пространства пункторов $\{P^n\}$ примыкают к дифференцируемому многообразию $\{V^n\}$ наиболее близко, то-есть ближе любых других локальных пространств, с индуцированными в них преобразованиями, зависящими от конечного числа параметров, ибо именно центро-проективные преобразования содержат максимальное число параметров $n(n+1)$ и каждый из этих параметров существенно используется при получении (2.6) и (2.10).

Теорема 15. *При дробно-линейных преобразованиях* (1.1), *разности* $(x^i - x^i_0$ *преобразуются по закону преобразования пунктора* (2.2).

Доказательство. В силу (1.2) и (2.7) имеем для (2.2)

$$u^{i'} = \frac{\dfrac{(a^{i'}_i b_l - a^{i'}_l b_i) x^l_0 + a^{i'}_i}{(b_q x^q_0 + 1)^2}}{\dfrac{b_k}{(b_q x^q_0 + 1)} u^k + 1} = \frac{[(a^{i'}_i b_l - a^{i'}_l b_i) x^l_0 + a^{i'}_i]\, u^i}{(b_k u^k + b_k u^k_0 + 1)\,(b_q x^q_0 + 1)}. \tag{2.11}$$

Внося теперь в (2.11) вместо (u^i) разность $(x^i - x^i_0)$, получаем

$$u^{i'} = \frac{a^{i'}_i b_l x^l_0 x^i - a^{i'}_l b_i x^l_0 x^i + a^{i'}_i x^i - a^{i'}_l x^l_0}{(b_k x^k + 1)\,(b_q x^q_0 + 1)} = \frac{a^{i'}_i x^i}{b_q x^q + 1} - \frac{a^{i'}_i x^i_0}{b_q x^q_0 + 1} = x^{i'} - x^{i'}_0.$$

Таким образом, при дробно-линейных преобразованиях,

$$x^{i'} - x^{i'}_0 = \frac{\left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|_{M_0} (x^i - x^i_0)}{-\frac{1}{(n+1)}\left.\frac{\partial \ln \det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^j}\right|_{M_0} (x^j - x^j_0) + 1}. \tag{2.12}$$

Доказанная теорема устанавливает для пункторов, по отношению к дробно-линейным преобразованиям (1.1), свойство, аналогичное свойству векторов, по отношению к линейным преобразованиям

$$x^{i'} = a_i^{i'} x^i + b^{i'}. \tag{2.13}$$

(При преобразовании (2.13) разности $(x^i - x_0^i)$ преобразуются по векторному закону.)

Рассмотрим отдельно случай $n = 1$. Закон преобразования пунктора (2.2) примет тогда вид

$$v = \frac{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{M_0} u}{-\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{M_0} \left.\frac{dx}{dy}\right|_{M_0} u + 1}, \tag{2.14}$$

а (2.6) и (2.10) дадут

$$\left.\frac{dv}{du}\right|_{u=0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{M_0} \quad \text{и} \quad \left.\frac{d^2 v}{du^2}\right|_{u=0} = \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{M_0}. \tag{2.15}$$

Таким образом, локальные центро-проективные пространства пункторов $\{P^1\}$ становятся соприкасающимися.

При рассмотрении дробно-линейных преобразований координатных систем

$$y = \frac{ax}{bx+1} + C, \tag{2.16}$$

согласно (2.12) и (2.14), имеем

$$y - y_0 = \frac{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{M_0} (x - x_0)}{-\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{M_0} \left.\frac{dx}{dy}\right|_{M_0} (x - x_0) + 1}. \tag{2.17}$$

Если изобразить на чертеже график функции $y = f(x)$, то график функции

$$y = \frac{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0)}{-\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} \left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=x_0} (x - x_0) + 1} + f(x_0) \tag{2.18}$$

будет представлять собой, при

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=x_0} \neq 0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=x_0} \neq 0,$$

такую равнобочную гиперболу с асимптотами

$$x = \frac{1}{\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=x_0} \left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=x_0}} + x_0$$

и

$$y = \frac{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}}{-\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=x_0} \left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=x_0}} + f(x_0),$$

которая проходит через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ и, в силу (2.15), соприкасается в этой точке с кривой $y=f(x)$.

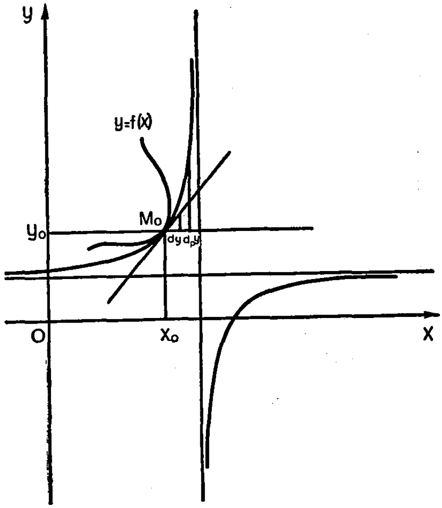

Рис. 1

На формулу (2.18) можно смотреть как на обобщение хорошо известной формулы

$$y=\frac{df}{dx}(x-x_0)+f(x_0)$$

для касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Определение 14. Проективным дифференциалом $d_p y$ функции $y=f(x)$ называется такая часть приращения этой функции, которая дробно-линейно выражается через приращение независимого переменного и отличается от приращения функции на бесконечно малую второго (или еще более высокого) порядка.

Проективный дифференциал независимого переменного $d_p x$ отождествляется с приращением этого переменного Δx.

В силу (2.18), для проективного дифференциала $d_p y$ имеем

$$d_p y=\frac{\frac{dy}{dx}\, d_p x}{-\frac{1}{2}\,\frac{d^2 y}{dx^2}\,\frac{dx}{dy}\, d_p x+1}. \tag{2.19}$$

Из теоремы 13 при $n=1$ следует, что проективный дифференциал обладает свойством инвариантности, аналогичным соответствующему свойству обычного дифференциала.

Геометрически проективный дифференциал функции $y=f(x)$ в точке (x_0) представляет собой приращение ординаты гиперболы, соприкасающейся с кривой $y=f(x)$ в этой точке.

§ 2. Понятие копунктора, его геометрический смысл и основные свойства. Схема гомоморфизмов

Свяжем с каждой точкой $M_0(x_0^i)$ n-мерного дифференцируемого многообразия $\{V^n\}$ общее линейное пространство $\{Q^n\}$ того же числа измерений [16] и потребуем, чтобы преобразование локальных координатных систем (2.1) в дифференцируемом многообразии $\{V^n\}$ влекло за собой общее линейное преобразование

$$u_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\Bigg|_{M_0} u_i - \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{i'}}\Bigg|_{M_0} \tag{2.20}$$

координат (u_i) в пространстве $\{Q^n\}$.

Теорема 16. *В каждой точке M_0 дифференцируемого многообразия $\{V^n\}$ формула (2.20) определяет гомоморфное отображение псевдогруппы $\Gamma(V^n)$ преобразований (2.1), действующих на $\{V^n\}$, в псевдогруппу $\Gamma_{M_0}(Q^n)$ общих линейных преобразований (2.20), действующих в локальном общем линейном пространстве $\{Q^n\}$, связанном с точкой M_0.*

Доказательство. Рассмотрим на $\{V^n\}$, наряду с (2.1), преобразование (2.3) и соответствующее ему в точке M_0 преобразование

$$u_{i''} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}\Bigg|_{M_0} u_{i'} - \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r''}} \right\|}{\partial x^{i''}}\Bigg|_{M_0}. \tag{2.21}$$

Внося (2.20) в (2.21), получаем преобразование

$$u_{i''} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i''}}\Bigg|_{M_0} u_{i} - \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r}}{\partial x^{r''}} \right\|}{\partial x^{i''}}\Bigg|_{M_0},$$

соответствующее в точке M_0 суперпозиции преобразований (2.1) и (2.3).

Ядро гомоморфизма $g_{M_0}(V^n)$, очевидно, выделяется из псевдогруппы $\Gamma(V^n)$ требованиями (2.5).

Определение 15. Геометрический объект с компонентами (u_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$, заданный на дифференцируемом многообразии $\{V^n\}$, называется n-мерным копунктором, если при преобразовании локальных координатных систем (2.1) его компоненты преобразуются по транзитивному закону (2.20) [16].

Из (2.20) видно, что разность двух копункторов является ковектором.

Теорема 17. *Пунктор (u_0^i), определяющий в $\{P^n\}$ инвариантную точку, в каждом $\{Q^n\}$ определяет инвариантную гиперплоскость*

$$u_0^i u_i + 1 = 0. \tag{2.22}$$

Аналогично, копунктор (u_i^0), определяющий в $\{Q^n\}$ инвариантную точку, в каждом $\{P^n\}$ определяет инвариантную гиперплоскость

$$u_i^0 u^i + 1 = 0. \tag{2.23}$$

Доказательство. Так как, в силу (2.2) и (2.20),

$$u_{i'}u^{i'}+1=\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}u_i-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{i'}}\right)\cdot\frac{\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}u^i}{-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^j}u^j+1}+1=$$

$$=\frac{u_iu^i+1}{-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^j}u^j+1},$$

то из $u_0^{i'}u_{i'}+1=0$ и $u_{i'}^0u^{i'}+1=0$ следует, соответственно, (2.22) и (2.23).

В силу доказанной теоремы, пространства $\{Q^n\}$ являются двойственными по отношению к $\{P^n\}$ и наоборот.

С каждой точкой M_0 дифференцируемого многообразия $\{V^n\}$ можно связать четыре пространства [16]:

1. Касательное центро-аффинное пространство $\{A^n\}$ векторов (ξ^i).
2. Дуальное к $\{A^n\}$ пространство $\{B^n\}$, ковекторов (ξ_i).
3. Локальное центро-проективное пространство $\{P^n\}$ пункторов (u^i).
4. Двойственное к $\{P^n\}$ пространство $\{Q^n\}$, копункторов (u_i).

Псевдогруппа $\Gamma(V^n)$ преобразований локальных координатных систем дифференцируемого многообразия $\{V^n\}$ индуцирует в $\{A^n\}$ и $\{B^n\}$ группы линейных однородных преобразований

$$\Gamma_{M_0}(A^n):\quad \xi^{i'}=\left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|_{M_0}\xi^i \tag{2.24}$$

и, соответственно,

$$\Gamma_{M_0}(B^n):\quad \xi_{i'}=\left.\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|_{M_0}\xi_i, \tag{2.25}$$

а в $\{P^n\}$ и $\{Q^n\}$ псевдогруппы $\Gamma_{M_0}(P^n)$ и $\Gamma_{M_0}(Q^n)$ преобразований (2.2) и, соответственно, (2.20).

Ядро $\gamma_{M_0}(V^n)$ гомоморфизма $\Gamma(V^n)\to\Gamma_{M_0}(A^n)$ и $\Gamma(V^n)\to\Gamma_{M_0}(B^n)$ выделяется из псевдогруппы $\Gamma(V^n)$ требованием

$$\left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right|_{M_0}=\delta^i_k, \tag{2.26}$$

а ядро гомоморфизма $\Gamma(V^n)\to\Gamma_{M_0}(P^n)$ и $\Gamma(V^n)\to\Gamma_{M_0}(Q^n)$ требованиями (2.5).

Из (2.26) и (2.5) видно, что $g_{M_0}(V^n)\subset\gamma_{M_0}(V^n)$. Ядро $\gamma_{M_0}(P^n)$ гомоморфизма $\Gamma_{M_0}(P^n)\to\Gamma_{M_0}(A^n)$ определяется преобразованиями

$$u^{i'}=\frac{u^i}{-\frac{1}{(n+1)}\left.\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^j}\right|_{M_0}u^j+1}, \tag{2.27}$$

а ядро $\gamma_{M_0}(Q^n)$ гомоморфизма $\Gamma_{M_0}(Q^n)\to\Gamma_{M_0}(B^n)$ — преобразованиями

$$u_{i'}=u_i-\frac{1}{(n+1)}\left.\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{i'}}\right|_{M_0}. \tag{2.28}$$

Из (2.2) и (2.27) следует $\gamma_{M_0}(P^n) \subset \Gamma_{M_0}(P^n)$. Аналогично, из (2.20) и (2.28) имеем $\gamma_{M_0}(Q^n) \subset \Gamma_{M_0}(Q^n)$.

Обозначая буквой I группу, содержащую только тождественное преобразование и замечая, что между $\Gamma_{M_0}(P^n)$ и $\Gamma_{M_0}(Q^n)$, $\Gamma_{M_0}(A^n)$ и $\Gamma_{M_0}(B^n)$, $\gamma_{M_0}(P^n)$ и $\gamma_{M_0}(Q^n)$ имеет место естественный изоморфизм, составим следующую схему гомоморфизмов:

$$\begin{tikzcd}
 & I_{M_0}(P^n) \arrow[rr, phantom, "\subset"] & & \gamma_{M_0}(P^n) \arrow[rrr] \arrow[dddd, leftrightarrow] & & & I_{M_0}(A^n) \\
 & & & & & \Gamma_{M_0}(P^n) \arrow[r] \arrow[dd, leftrightarrow] \arrow[ul, phantom, sloped, "\supset"] & \Gamma_{M_0}(A^n) \arrow[dd, leftrightarrow] \arrow[u, phantom, sloped, "\supset"] \\
g_{M_0}(V^n) \arrow[uur] \arrow[ddr] \arrow[rr, phantom, "\subset"] & & \gamma_{M_0}(V^n) \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \subset \Gamma(V^n) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & & & & \Gamma_{M_0}(Q^n) \arrow[r] \arrow[dl, phantom, sloped, "\subset"] & \Gamma_{M_0}(B^n) \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] \\
 & I_{M_0}(Q^n) \arrow[rr, phantom, "\subset"] & & \gamma_{M_0}(Q^n) \arrow[rrr] & & & I_{M_0}(B^n)
\end{tikzcd}$$

§ 3. Основные алгебраические операции над пункторами и копункторами

Пусть на дифференцируемом многообразии $\{V^n\}$ задан копунктор (a_i).

Теорема 18. *Соотношения*

$$u^i = \frac{\xi^i}{-a_j \xi^j + 1} \tag{2.29}$$

и

$$u_i = \xi_i + a_i, \tag{2.30}$$

определяемые копунктором (a_i), устанавливают локально взаимно-однозначные соответствия между векторами (ξ^i) из $\{A^n\}$ и пункторами (u^i) из $\{P^n\}$, с одной стороны, и ковекторами (ξ_i) из $\{B^n\}$ и копункторами (u_i) из $\{Q^n\}$, с другой [16].

Доказательство. Соответствия, определенные в теореме, локально взаимнооднозначны, так как (2.29) и (2.30) могут быть переписаны в виде

$$\xi^i = \frac{u^i}{a_j u^j + 1} \tag{2.31}$$

и

$$\xi_i = u_i - a_i \tag{2.32}$$

и не зависят от выбора системы координат на $\{V^n\}$, ибо, в силу (2.24), (2.25) и

$$a_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\bigg|_{M_0} a_i - \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{i'}}\Bigg|_{M_0} \tag{2.33}$$

$$\frac{\xi^{i'}}{-a_{j'}\xi^{j'}+1} = \frac{\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\bigg|_{M_0}\left(\dfrac{\xi^i}{-a_j\xi^j+1}\right)}{-\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln \det \left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k}\Bigg|_{M_0}\left(\dfrac{\xi^k}{-a_j\xi^j+1}\right)+1},$$

а

$$\xi_{i'} + a_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\Big|_{M_0}(\xi_i + a_i) - \frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{i'}}\Bigg|_{M_0}.$$

Заметим еще, что пунктору $u^i = 0$ соответствует, согласно (2.31), вектор $\xi^i = 0$, копунктору $u_i = a_i$, определяющему по теореме 17 в каждом $\{P^n\}$ инвариантную гиперплоскость

$$a_i u^i + 1 = 0, \tag{2.34}$$

соответствует, в силу (2.32), ковектор $\xi_i = 0$, определяющий несобственную гиперплоскость $\{A^n\}$.

При введении алгебраических операций над пункторами и копункторами [16], соответствующих обычным алгебраическим операциям над векторами и ковекторами, руководствуемся следующей схемой:

1. Переводим данные пункторы [копункторы] в векторы [ковекторы] по формуле (2.31) [(2.32)].

2. Производим над полученными векторами [ковекторами] алгебраическую операцию.

3. Вектор [ковектор], полученный в результате алгебраической операции, переводим в пунктор [копунктор] по формуле (2.29) [(2.30)].

Таким образом, возникают формулы:

1. Сложение пункторов

$$u^i \oplus v^i = \frac{u^i + v^i + a_j(u^i v^j + u^j v^i)}{-a_k a_l u^k v^l + 1} = \frac{(a_j u^j + 1) v^i + (a_j v^j + 1) u^i}{(a_j u^j + 1) + (a_j v^j + 1) - (a_k u^k + 1)(a_l v^l + 1)}. \tag{2.35}$$

2. Вычитание пункторов

$$u^i \ominus v^i = \frac{u^i - v^i + a_j(u^i v^j - u^j v^i)}{2a_k v^k + a_k a_l u^k v^l + 1} = \frac{(a_j u^j + 1) v^i - (a_j v^j + 1) u^i}{(a_k u^k + 1) - (a_l v^l + 1) - (a_k u^k + 1)(a_l v^l + 1)}. \tag{2.36}$$

3. Умножение пунктора на число

$$\lambda \odot u^i = \frac{\lambda \cdot u^i}{a_j (1 - \lambda) u^j + 1}. \tag{2.37}$$

4. Сложение копункторов

$$u_i \oplus v_i = u_i + v_i - a_i. \tag{2.38}$$

5. Вычитание копункторов

$$u_i \ominus v_i = u_i - v_i + a_i. \tag{2.39}$$

6. Умножение копунктора на число

$$\lambda \odot u_i = \lambda \cdot u_i + a_i (1 - \lambda). \tag{2.40}$$

Введенные алгебраические операции над пункторами и копункторами, очевидно, подчиняются тем же законам, что и соответстсвующие алгебраические операции над векторами и ковекторами.

Если построенный по копунктору (a_i) тензор

$$V_{ij} \equiv \frac{1}{(n+1)} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \right) = 0, \tag{2.41}$$

то-есть

$$a_i = -\frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^i}, \tag{2.42}$$

где a — относительный скаляр веса $N=1$, то существует система координат, определенная с точностью до произвольных невырожденных преобразований с постоянным якобианом, в которой $a_i=0$ [2].

В этой системе координат, в силу (2.31) и (2.32), пункторы и копункторы совпадают, соответственно, с векторами и ковекторами, а операции (1—6), над пункторами и копункторами, превращаются в соответствующие операции над векторами и ковекторами.

В общем случае, при $V_{ij}\neq 0$, не сучествует системы координат, обладающей указанным выше свойством.

§ 4. Внесение метрики в локальные центро-проективные пространства пункторов

Теорема 19. *Задание копунктора* (a_i) *и тензора* $(g_{ij}=g_{ji})$ *определяет в каждом локальном центро-проективном пространстве пункторов* $\{P^n\}$ *инвариантную гиперквадрику*

$$(a_i a_j - g_{ij})\, u^i u^j + 2a_i u^i + 1 = 0, \tag{2.43}$$

не проходящую через центральную точку $u^i=0$ [16].

Доказательство. Представляя левую часть (2.43) в виде

$$\left[(a_i u^i + 1) + \sqrt{g_{ij} u^i u^j}\right]\left[(a_i u^i + 1) - \sqrt{g_{ij} u^i u^j}\right]$$

и замечая, что

$$a_{i'} u^{i'} + 1 = \frac{a_i u^i + 1}{-\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^j} u^j + 1}, \tag{2.44}$$

а

$$\sqrt{g_{i'j'} u^{i'} u^{j'}} = \frac{\sqrt{g_{ij} u^i u^j}}{-\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^k} u^k + 1},$$

имеем

$$(a_{i'} a_{j'} - g_{i'j'})\, u^{i'} u^{j'} + 2a_{i'} u^{i'} + 1 = \frac{(a_i a_j - g_{ij})\, u^i u^j + 2a_i u^i + 1}{\left[-\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^k} u^k + 1\right]^2} \tag{2.45}$$

и, следовательно, (2.43) влечет за собой

$$(a_{i'} a_{j'} - g_{i'j'})\, u^{i'} u^{j'} + 2a_{i'} u^{i'} + 1 = 0.$$

Заметим еще, что гиперквадрика (2.43) в $\{P^n\}$ соответствует гиперквадрике

$$g_{ij}\, \xi^i \xi^j = 1 \tag{2.46}$$

в $\{A^n\}$, а гиперплоскость

$$a_i u^i + 1 = 0 \tag{2.47}$$

в $\{P^n\}$, соответствующая несобственной гиперплоскости $\{A^n\}$, является полярной гиперплоскостью центральной точки $(u^i=0)$ относительно гиперквадрики (2.43).

Условимся впредь считать форму $g_{ij}\xi^i\xi^j$ — невырожденной и положительно определенной и рассматривать в каждом $\{P^n\}$ только те пункторы (u_0^i), которые расположены внутри гиперквадрики (2.43), то-есть, для которых

$$(a_i a_j - g_{ij})\, u_0^i u_0^j + 2a_i u_0^i + 1 > 0. \tag{2.48}$$

Теорема 20. *Сложное отношение* $\left(\frac{AB}{BC} : \frac{AO}{OC}\right)$ *четырех точек в* $\{P^n\}$, *две из которых, O и B, задаются непосредственно пункторами* $(u^i = 0)$ *и* $(u^i = u_0^i)$, *а две другие, A и C, возникают при пересечении гиперквадрики* (2.43) *прямой, проходящей через O и B, больше единицы и может быть вычислено по формуле*

$$\left(\frac{AB}{BC} : \frac{AO}{OC}\right) = \frac{(1 + a_i u_0^i) + \sqrt{g_{ij} u_0^i u_0^j}}{(1 + a_i u_0^i) - \sqrt{g_{ij} u_0^i u_0^j}}. \tag{2.49}$$

Доказательство. Рассмотрим в $\{A^n\}$ гиперквадрику (2.46) и точки o, b, a и c, соответствующие, согласно (2.31), гиперквадрике (2.43) и точкам O, B, A и C в $\{P^n\}$.

Так как сложное отношение четырех точек является инвариантом проективного преобразования, то

$$\left(\frac{AB}{BC} : \frac{AC}{OC}\right) = \left(\frac{ab}{bc} : \frac{ao}{oc}\right) = \frac{1 + \sqrt{g_{ij}\xi_0^i \xi_0^j}}{1 - \sqrt{g_{ij}\xi_0^i \xi_0^j}} = \frac{(1 + a_i u_0^i) + \sqrt{g_{ij} u_0^i u_0^j}}{(1 + a_i u_0^i) - \sqrt{g_{ij} u_0^i u_0^j}}.$$

Наконец, $\left(\frac{AB}{BC} : \frac{AO}{OC}\right) > 1$, ибо, в силу (2.48),

$$(1 + a_i u_0^i) > \sqrt{g_{ij} u_0^i u_0^j} > 0.$$

Определение 16. Длиною пунктора (u_0^i) называется скаляр

$$\lambda(u_0^i) = \frac{R}{2} \ln \frac{(1 + a_i u_0^i) + \sqrt{g_{ij} u_0^i u_0^j}}{(1 + a_i u_0^i) - \sqrt{g_{ij} u_0^i u_0^j}}, \tag{2.50}$$

где R — произвольно заданный положительный скаляр, определяющий единицу масштаба.

При таком определении в каждом $\{P^n\}$ внутренняя область гиперквадрики (2.43) может рассматриваться, согласно интерпретации Кэли-Клейна, как пространство Лобачевского с кривизной $K = -\frac{1}{R^2}$.

Пусть

$$l(\xi_0^i) = \sqrt{g_{ij}\xi_0^i \xi_0^j} \tag{2.51}$$

— длина вектора $\xi_0^i = \frac{u_0^i}{a_j u_0^j + 1}$, определенная тензором g_{ij}.

Переписывая (2.50) в виде

$$\lambda(u_0^i) = \frac{R}{2} \ln \frac{1 + l(\xi_0^i)}{1 - l(\xi_0^i)} \tag{2.52}$$

и разрешая относительно $l(\xi_0^i)$, будем иметь

$$l(\xi_0^i) = \frac{e^{\frac{2\lambda(u_0^i)}{R}} - 1}{e^{\frac{2\lambda(u_0^i)}{R}} + 1} = \operatorname{th}\frac{\lambda(u_0^i)}{R}. \tag{2.53}$$

Формулу (2.52) и (2.53) устанавливают соответствие между длиной пунктора (u_0^i) в $\{P^n\}$ и длиной соответствующего ему вектора (ξ_0^i) в $\{A^n\}$ [1].

Определение 17. Углом $(\widehat{u_0^i, u_1^i})$ между пункторами (u_0^i) и (u_1^i) в $\{P^n\}$ называется угол между соответствующими этим пункторам векторами

$$\xi_0^i = \frac{u_0^i}{a_j u_0^j + 1} \quad \text{и} \quad \xi_1^i \frac{u_1^i}{a_j u_1^j + 1} \quad \text{в} \quad \{A^n\}.$$

Таким образом,

$$\cos(\widehat{u_0^i, u_1^i}) = \frac{g_{ij}\xi_0^i \xi_1^j}{\sqrt{g_{ij}\xi_0^i \xi_0^j}\cdot\sqrt{g_{ij}\xi_1^i \xi_1^j}} = \frac{g_{ij}u_0^i u_1^j}{\sqrt{g_{ij}u_0^i u_0^j}\;\sqrt{g_{ij}u_1^i u_1^j}}. \tag{2.54}$$

Теорема 21. *Каждому пунктору* (u_0^i) *из* $\{P^n\}$, *с длиной* $\lambda(u_0^i)$, *соответствует угол параллельности* $\Pi[\lambda(u_0^i)]$, *удовлетворяющий формуле Лобачевского*

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi[\lambda(u_0^i)]}{2} = e^{-\frac{\lambda(u_0^i)}{R}}. \tag{2.55}$$

Доказательство. Пусть пунктор (u_1^i) удовлетворяет условию

$$(a_i a_j - g_{ij})\, u_1^i u_1^j + 2a_i u_1^i + 1 = 0,$$

то-есть $g_{ij}\xi_1^i \xi_1^j = 1$, и угол $(\widehat{\xi_0^i, \xi_1^i})$ таков, что

$$l(\xi_0^i) = \cos(\widehat{\xi_0^i, \xi_1^i}).$$

Тогда $(\widehat{\xi_0^i, \xi_1^i}) = (\widehat{u_0^i\, u_1^i}) = \Pi[\lambda(u_0^i)]$, ибо гиперплоскостям, ортогональным к прямой, определяемой вектором (ξ_0^i) в $\{A^n\}$, соответствуют гиперплоскости, сопряженные с прямой, определяемой пунктором (u_0^i) в $\{P^n\}$, и, следовательно,

$$l(\xi_0^i) = \cos\Pi[\lambda(u_0^i)]. \tag{2.56}$$

Внося (2.56) в (2.52), имеем

$$\lambda(u_0^i) = \frac{R}{2}\ln\frac{1+\cos\Pi[\lambda(u_0^i)]}{1-\cos\Pi[\lambda(u_0^i)]} = -R\ln\operatorname{tg}\frac{\Pi[\lambda(u_0^i)]}{2},$$

а отсюда и (2.55).

В заключение заметим еще, что геометрии, индуцируемые в различных локальных центро-проективных пространствах $\{P^n\}$, вообще говоря, не изометричны, ибо скаляр R является функцией точки M дифференцируемого многообразия $\{V^n\}$ [1].

§ 5. Локальные центро-проективные пространства пункторов и объект, определяющий инвариантное дифференцирование относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований

Поскольку обращение в нуль копунктора (2.42) влечет за собой обращение в нуль объекта (1.15), то, согласно сказанному в конце § 3 этой главы, всегда можно перейти к такой системе координат, определенной с точностью до произвольных преобразований с постоянным якобианом, в которой объект (1.15) обращается в нуль и, следовательно, инвариантное дифференцирование относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований (1.19) совпадает с обычным дифференцированием.

Если же ограничиться рассмотрением только дробно-линейных преобразований, то перейти к указанной выше системе координат, вообще говоря, нельзя, однако, как будет установлено в дальнейшем, какова бы ни была точка M_0 дифференцируемого многообразия $\{V^n\}$, всегда можно путем дробно-линейных преобразований перейти к такой системе координат, в которой

$$\left(\frac{1}{(n+1)}\delta^i_j\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}+\frac{1}{(n+1)}\delta^i_k\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\right)_{M_0}=0 \tag{2.57}$$

и, следовательно, инвариантное дифференцирование относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований (1.19) в точке M_0 совпадает с обычным дифференцированием в этой точке [14].

Пусть на дифференцируемом многообразии $\{V^n\}$ задан объект (1.15), тогда в локальных центро-проективных пространствах $\{P^n\}$ возникают инвариантные гиперплоскости

$$-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^i}u^i+1=0. \tag{2.58}$$

Если эти гиперплоскости принять за несобственные, то пространства $\{P^n\}$ можно рассматривать как аффинные.

Далее, важно заметить, что, в силу теоремы 15, преобразование

$$x^{i'}=\frac{(x^i-x^i_0)}{-\frac{1}{(n+1)}\left.\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\right|_{M_0}(x^j-x^j_0)+1} \tag{2.59}$$

локальных координатных систем на $\{V^n\}$ индуцирует в локальном центро-проективном пространстве $\{P^n\}$, связанном с точкой $M_0(x^i_0)$ преобразование

$$u^{i'}=\frac{u^i}{-\frac{1}{(n+1)}\left.\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\right|_{M_0}u^j+1}, \tag{2.60}$$

которое, очевидно, определяет переход к некоторой декартовой системе координат.

Теорема 22. *Компоненты плоской аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x^l_0, u^l)$ в локальном центро-проективном пространстве $\{P^n\}$, соответствующем точке M_0 на $\{V^n\}$, принимают в координатах (u^i), связанных с декартовыми координатами $(u^{i'})$ соотношением* (2.60), *следующий вид*:

$$\Gamma^i_{jk}(x^l_0, u^l)=$$

$$=\frac{1}{-\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\right)_{M_0}u^j+1}\left[\delta^i_j\left(\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}\right)_{M_0}+\delta^i_k\left(\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\right)_{M_0}\right]. \tag{2.61}$$

Доказательство. Так как координаты $(u^{i'})$ — декартовы, то

$$\Gamma^i_{jk}(x^l_0, u^l) = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^j \partial u^k},$$

но преобразование (2.60) дробно-линейно и, следовательно, согласно (1.11),

$$\Gamma^i_{jk}(x^l_0, u^l) = \frac{1}{(n+1)} \delta^i_j \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial u^{r'}}{\partial u^r} \right\|}{\partial u^k} + \frac{1}{(n+1)} \delta^i_k \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial u^{r'}}{\partial u^r} \right\|}{\partial u^j}. \quad (2.62)$$

Чтобы получить (2.61), теперь достаточно внести в (2.62) значение

$$\frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial u^{r'}}{\partial u^r} \right\|}{\partial u^k} = \frac{\left.\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}\right|_{M_0}}{-\frac{1}{(n+1)} \left.\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}\right|_{M_0} u^k + 1},$$

подсчитанное согласно (2.7).

Из (2.61) следует соотношение

$$\Gamma^i_{jk}(x^r_0, 0) = \frac{1}{(n+1)} \delta^i_j \left.\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}\right|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)} \delta^i_k \left.\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\right|_{M_0}, \quad (2.63)$$

справедливое в любой системе координат на $\{V^n\}$, ибо преобразования в $\{P^n\}$ дробно-линейны и, следовательно, согласно теореме 14, как левая так и правая части (2.63) преобразуются по одному и тому же закону.

Формула (2.63) выясняет геометрический смысл объекта (1.15), определяющего инвариантное дифференцирование относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований, значение которого в любой точке $M_0(x^i_0)$ на $\{V^n\}$ оказывается совпадающим, согласно этой формуле, со значением соответствующей плоской аффинной связности (2.61) при $u^i = 0$.

Далее, при преобразовании (2.59) получаем

$$\frac{1}{(n+1)} \delta^{i'}_{j'} \left.\frac{\partial \ln a'}{\partial x^{k'}}\right|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)} \delta^{i'}_{k'} \left.\frac{\partial \ln a'}{\partial x^{j'}}\right|_{M_0} = 0, \quad (2.64)$$

ибо преобразование (2.60), соответствующее (2.59), переводит (2.61) в $\Gamma^{i'}_{j'k'}(x^{l'}, u^{l'}) \equiv 0$ и, следовательно, (2.63) в (2.64).

Таким образом, дробно-линейное преобразование (2.59) приводит к такой системе координат на $\{V^n\}$, в которой инвариантное дифференцирование относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований (1.19) в точке $M_0(x^i_0)$ совпадает с обычным дифференцированием в этой точке.

В заключение заметим, что связность (2.61) может быть построена в $\{P^n\}$, связанном с произвольной точкой $M_0(x^i_0)$ на $\{V^n\}$, другим способом [14], исходящим из рассмотрения величин

$$A = \frac{a(x^i_0)}{\left(-\frac{1}{(n+1)} \left.\frac{\partial \ln a}{\partial x^l}\right|_{M_0} u^l + 1\right)^{n+1}}. \quad (2.65)$$

Теорема 23. *Величину (2.65) можно рассматривать в $\{P^n\}$, связанном с точкой $M_0(x^i_0)$ на $\{V^n\}$, как относительный скаляр веса $N=1$, удовлетворяющий условиям*

$$A\Big|_{u^i=0} = a(x^i_0) \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial A}{\partial u^i}\right|_{u^l=0} = \left.\frac{\partial a}{\partial x^i}\right|_{M_0}, \quad (2.66)$$

сохраняющимся при преобразовании координат.

Доказательство. Так как, согласно (2.42) и (2.44),

$$\left(-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a'}{\partial x^{l'}}\Big|_{M_0} u^{l'}+1\right)=\frac{-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^l}\Big|_{M_0} u^l+1}{-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln \det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^j}\Big|_{M_0} u^j+1},$$

то, деля почленно (2.65) на (2.9), получаем

$$\det\left\|\frac{\partial u^r}{\partial u^{r'}}\right\|\cdot A=\frac{a'(x_0^{i'})}{\left(-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a'}{\partial u^{l'}}\Big|_{M_0} u^{l'}+1\right)^{n+1}}=A'.$$

Условия (2.66), проверяемые непосредственно, выполняются в любой системе координат, ибо A' имеет тот же вид, что и A.

По относительному скаляру (2.65) можно построить объект

$$\frac{1}{(n+1)}\delta^i_j\frac{\partial \ln A}{\partial u^k}+\frac{1}{(n+1)}\delta^i_k\frac{\partial \ln A}{\partial u^j}, \tag{2.67}$$

определяющий в локальном центро-проективном пространстве $\{P^n\}$, связанном с точкой M_0 на $\{V^n\}$, инвариантное дифференцирование относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований.

Так как преобразования, индуцируемые в $\{P^n\}$, дробно-линейны, то, согласно теореме 3, объект (2.67) можно принять за аффинную связность.

Внося (2.65) в (2.67), убеждаемся, что эта аффинная связность совпадает со связностью (2.61).

Глава 3

ОБЪЕКТ ЦЕНТРО-ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОКРЕСТНОСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ИМ ПЕРЕНЕСЕНИЯ. ПОЛНЫЕ ОБЪЕКТЫ КРУЧЕНИЯ И КРИВИЗНЫ

§ 1. Соответствие между центро-проективными перенесениями $\{A^n\}$ и $\{P^n\}$ и общими линейными перенесениями $\{B^n\}$ и $\{Q^n\}$

Непосредственным обобщением центро-аффинных перенесений касательных пространств $\{A^n\}$, определяемых системой

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = -\xi^j \Gamma^i_{jk}, \tag{3.1}$$

где Γ^i_{jk} — общая (не обязательно симметричная) аффинная связность, являются центро-проективные перенесения этих пространств, определяемые системой

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = -\xi^j \Gamma^i_{jk} + \xi^i \xi^j C_{jk}, \tag{3.2}$$

где C_{jk} — произвольный дважды ковариантный тензор [5].

Однако, центро-проективные перенесения не естественны для касательных пространств $\{A^n\}$, ибо при этих перенесениях компоненты вектора (вопреки его природе) преобразуются дробно-линейно.

Теорию центро-проективных перенесений следует строить, как это и делается в настоящей главе, не для касательных пространств $\{A^n\}$, а для локальных центро-проективных пространств $\{P^n\}$.

Пусть на дифференцируемом многообразии $\{V^n\}$, кроме общей аффинной связности (Γ^i_{jk}) и тензора (C_{ij}), задано поле копунктора (a_i), тогда, согласно теореме 18, в каждой точке $\{V^n\}$, формулы (2.29) и (2.31) определяет взаимно-однозначное соответствие между векторами (ξ^i) из $\{A^n\}$ и пункторами (u^i) из $\{P^n\}$.

Определение 18. Центро-проективное перенесение $\{P^n\}$ из точки M_0 в точку M_1, вдоль кривой

$$x^i = x^i(t) \tag{3.3}$$

на $\{V^n\}$, возникающее в результате последовательного применения трех преобразований:

1) преобразование (2.31) в точке M_0;

2) преобразование центро-проективного перенесения $\{A^n\}$ из точки M_0 в точку M_1, вдоль кривой (3.3);

3) преобразование (2.29) в точке M_1; называется соответствующим центро-проективному перенесению $\{A^n\}$ из точки M_0 в точку M_1, вдоль кривой (3.3).

Внося (2.31) в (3.2), получаем

$$\frac{\partial\left(\dfrac{u^i}{a_p u^p + 1}\right)}{\partial x^k} = -\frac{u^l}{(a_p u^p+1)} \Gamma^i_{lk} + \frac{u^i}{(a_p u^p+1)} \frac{u^l}{(a_q u^q+1)} C_{lk}. \tag{3.4}$$

Теорема 24. *Система* (3.4) *эквивалентна системе*

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^k} = -u^l\,\Gamma^j_{lk} + u^j u^l\left(\frac{\partial a_l}{\partial x^k} - a_i\,\Gamma^i_{lk} + C_{lk}\right). \tag{3.5}$$

Доказательство. Производя в (3.4) дифференцирование и оставляя в левой части только члены, содержащие производные $\frac{\partial u^j}{\partial x^k}$, будем иметь

$$\left(\delta^i_j - \frac{a_j u^i}{(a_p u^p+1)}\right)\frac{\partial u^j}{\partial x^k} = \left[\frac{u^i \frac{\partial a_l}{\partial x^k}}{(a_p u^p+1)} - \left(\Gamma^i_{lk} - \frac{u^i}{(a_p u^p+1)}\,C_{lk}\right)\right]u^l. \tag{3.6}$$

Так как

$$\det\left\|\delta^i_j - \frac{a_j u^i}{(a_p u^p+1)}\right\| = \begin{vmatrix} 1-\frac{a_1u^1}{(a_pu^p+1)} & \frac{-a_2u^1}{(a_pu^p+1)} & \dots & \frac{-a_nu^1}{(a_pu^p+1)} & 0 \\ \frac{-a_1u^2}{(a_pu^p+1)} & 1-\frac{a_2u^2}{(a_pu^p+1)} & \dots & \frac{-a_nu^2}{(a_pu^p+1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-a_1u^n}{(a_pu^p+1)} & \frac{-a_2u^n}{(a_pu^p+1)} & \dots & 1-\frac{a_nu^n}{(a_pu^p+1)} & 0 \\ \frac{a_1}{(a_pu^p+1)} & \frac{a_2}{(a_pu^p+1)} & \dots & \frac{a_n}{(a_pu^p+1)} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & u^1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & u^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & u^n \\ \frac{a_1}{(a_pu^p+1)} & \frac{a_2}{(a_pu^p+a)} & \dots & \frac{a_n}{(a_pu^p+1)} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{a_l u^l}{(a_p u^p+1)} = \frac{1}{(a_p u^p+1)} \neq 0, \tag{3.7}$$

то система (3.6) крамеровская, причем ее единственное решение, как легко убедиться непосредственной подстановкой, имеет вид (3.5).

Согласно доказанной теореме, система (3.5) определяет центро-проективные перенесения $\{P^n\}$, соответствующие центро-проективным перенесениям $\{A^n\}$, определяемым системой (3.2).

Рассмотрим теперь общие линейные перенесения пространств $\{B^n\}$, дуальных к $\{A^n\}$, определяемые системой

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} = \xi_l\,\Gamma^l_{ik} + C_{ik}. \tag{3.8}$$

Согласно теореме 18, в каждой точке $\{V^n\}$ формулы (2.30) и (2.32) определяют взаимно-однозначное соответствие между ковекторами (ξ_i) из $\{B^n\}$ и копункторами (u_i) из $\{Q^n\}$.

Определение 19. Общее линейное перенесение пространства $\{Q^n\}$, двойственного к $\{P^n\}$, из точки M_0 в точку M_1, вдоль кривой (3.3) на $\{V^n\}$, возникающее в результате последовательного применения трех преобразований:

1) преобразование (2.32) в точке M_0,

2) преобразование общего линейного перенесения $\{B^n\}$ из точки M_0 в точку M_1 вдоль кривой (3.3),

3) преобразование (2.30) в точке M_1; называется соответствующим общему линейному перенесению пространства $\{B^n\}$ из точки M_0 в точку M_1, вдоль кривой (3.3).

Внося (2.32) в (3.8), получаем

$$\frac{\partial (u_i - a_i)}{\partial x^k} = (u_l - a_l)\,\Gamma^l_{ik} + C_{ik}$$

или

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^k} = u_l\,\Gamma^l_{ik} + \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - a_l\,\Gamma^l_{ik} + C_{ik}\right). \tag{3.9}$$

Система (3.9), очевидно, определяет общие линейные перенесения пространств $\{Q^n\}$, двойственных к $\{P^n\}$, соответствующие общим линейным перенесениям пространств $\{B^n\}$, дуальных к $\{A^n\}$, определяемым системой (3.8).

В заключение заметим, что если копунктор $(\tilde{a}_i)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial (a_i - \tilde{a}_i)}{\partial x^k} - (a_l - \tilde{a}_l)\Gamma^l_{ik} = 0, \tag{3.10}$$

то замена (a_i) на $(\tilde{a}_i)$ оставит инвариантными формулы (3.5) и (3.9), более того, каков бы ни был копунктор $(\tilde{a}_i)$, всегда можно, заменив дополнительно тензор C_{ij} тензором

$$\tilde{C}_{ij} = \frac{\partial (a_i - \tilde{a}_i)}{\partial x^j} - (a_l - \tilde{a}_l)\,\Gamma^l_{ij} + C_{ij}, \tag{3.11}$$

снова добиться инвариантности формул (3.5) и (3.9).

В частности, положив

$$\tilde{a}_i = -\frac{1}{(n+1)}\,\Gamma^k_{ki}, \tag{3.12}$$

и

$$\tilde{C}_{ij} = \frac{\partial \left(a_i + \frac{1}{(n+1)}\,\Gamma^k_{ki}\right)}{\partial x^j} - \left(a_l + \frac{1}{(n+1)}\,\Gamma^k_{kl}\right)\Gamma^l_{ij} + C_{ij}, \tag{3.13}$$

будем иметь для (3.5) и (3.9), соответственно,

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} = -u_l\,\Gamma^i_{lj} - \frac{1}{(n+1)}\,u^i u^l \left(\frac{\partial \Gamma^k_{kl}}{\partial x^j} - \Gamma^k_{km}\,\Gamma^m_{lj} - (n+1)\,\tilde{C}_{lj}\right) \tag{3.14}$$

и

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^j} = u_l\,\Gamma^l_{ij} - \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial \Gamma^k_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma^k_{km}\,\Gamma^m_{ij} - (n+1)\,\tilde{C}_{ij}\right). \tag{3.15}$$

§ 2. Объект центро-проективной связности $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{jk})$ из дифференциальной окрестности третьего порядка

В настоящем параграфе вводится такой геометрический объект, который позволяет получить центро-проективные перенесения $\{P^n\}$ непосредственно, то-есть без установления какой-либо предварительной связи между $\{P^n\}$ и $\{A^n\}$.

Теорема 25. *Всякая система, состоящая из $n^2(n+1)$ функций $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{jk})$, преобразующихся при преобразовании локальных координатных систем (2.1) по закону*

$$\begin{cases} \Gamma^{i'}_{j'k'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} + \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\Gamma^i_{jk} \\[2ex] \Gamma_{j'k'} = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\left[\Gamma_{jk} - \left(\dfrac{\partial^2 \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^j \partial x^k} - \dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^l}\,\Gamma^l_{jk}\right)\right], \end{cases} \tag{3.16}$$

образует геометрический объект.

Доказательство. Так как закон преобразования компонент (Γ^i_{jk}) транзитивен, ибо он совпадает с законом преобразования аффинной связности, то для доказательства транзитивности (3.16) достаточно внести (3.16) только в

$$\Gamma_{j''k''}=\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\left[\Gamma_{j'k'}-\left(\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r'}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}-\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r'}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{i'}}\Gamma^{i'}_{j'k'}\right)\right].$$

Производя это внесение непосредственно, имеем

$$\Gamma_{j''k''}=\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\left\{\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\left[\Gamma_{jk}-\left(\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{j}\partial x^{k}}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{i}}\Gamma^{i}_{jk}\right)\right]-\left[\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r'}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r'}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk}\right)\right]\right\},$$

а отсюда, в силу тождества

$$\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r'}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}-\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r'}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{i}}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}=$$

$$=\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r'}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{j}\partial x^{k}}, \qquad (3.17)$$

получаем

$$\Gamma_{j''k''}=\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k''}}\left[\Gamma_{jk}-\left(\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{j}\partial x^{k}}-\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{i}}\Gamma^{i}_{jk}\right)\right].$$

Определение 20. Геометрический объект $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{jk})$, введенный в теореме 25, называется объектом центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка [19].

Из (3.16) видно, что объект аффинной связности (Γ^i_{jk}), принадлежащий дифференциальной окрестности второго порядка, является подобъектом объекта центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{jk})$.

Теорема 26. *Величины*

$$\tilde{C}_{ij}=\Gamma_{ij}+\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial\Gamma^k_{ki}}{\partial x^j}-\Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{ij}\right), \qquad (3.18)$$

составленные из компонент объекта центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка и их первых производных, образуют тензор.

Доказательство. Покажем, что величины (3.18) преобразуются по тензорному закону.

Действительно, если

$$\Gamma^{k'}_{k'i'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\Gamma^k_{ki}+\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{i'}} \tag{3.19}$$

свернуть с

$$\Gamma^{l'}_{i'j'}=\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^l_{ij},$$

то будем иметь

$$\Gamma^{k'}_{k'l'}\Gamma^{l'}_{i'j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{ij}+\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\Gamma^k_{kl}+\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}-$$

$$-\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^l_{ij}, \tag{3.20}$$

а если (3.19) продифференцировать, то получим

$$\frac{\partial\Gamma^{k'}_{k'i'}}{\partial x^{j'}}=\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\Gamma^k_{kl}+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial\Gamma^k_{ki}}{\partial x^j}+\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}. \tag{3.21}$$

Далее, вычитая почленно (3.20) из (3.21), и умножая на $\frac{1}{(n+1)}$, имеем

$$\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial\Gamma^{k'}_{k'i'}}{\partial x^{j'}}-\Gamma^{k'}_{k'l'}\Gamma^{l'}_{i'j'}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial\Gamma^k_{ki}}{\partial x^j}-\Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{ij}\right)-$$

$$-\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^l_{ij}-$$

$$-\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}+\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}},$$

что, согласно тождеству (3.17), рассматриваемому при $x^{r''}=x^r$, дает

$$\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial\Gamma^{k'}_{k'i'}}{\partial x^{j'}}-\Gamma^{k'}_{k'l'}\Gamma^{l'}_{i'j'}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left[\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial\Gamma^k_{ki}}{\partial x^j}-\Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{ij}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^l}\Gamma^l_{ij}\right)\right]. \tag{3.22}$$

Складывая, наконец, (3.22) с

$$\Gamma_{i'j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left[\Gamma_{ij}-\left(\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^l}\Gamma^l_{ij}\right)\right],$$

получаем окончательно

$$\Gamma_{i'j'}+\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial\Gamma^{k'}_{k'i'}}{\partial x^{j'}}-\Gamma^{k'}_{k'l'}\Gamma^{l'}_{i'j'}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left[\Gamma_{ij}+\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial\Gamma^k_{kl}}{\partial x^j}-\Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{ij}\right)\right].$$

Теорема 27. *Системы*

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=-u^l\Gamma^i_{lj}+u^i u^l\Gamma_{lj} \tag{3.23}$$

и

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^j}=u_l\Gamma^l_{ij}+\Gamma_{ij}, \tag{3.24}$$

построенные по компонентам объекта центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка, определяют, соответственно, центро-проективные перенесения $\{P^n\}$ и общие линейные перенесения $\{Q^n\}$.

Доказательство. В силу теоремы 26, (3.18) — тензор, а потому система (3.23) может быть представлена в виде (3.14) и, следовательно, определяет соответствующие центро-проективные перенесения $\{P^n\}$.

Аналогично, система (3.24) представляется в виде (3.15) и, следовательно, определяет соответствующие общие линейные перенесения $\{Q^n\}$.

В заключение выпишем отдельно формулы преобразования (3.16) при $n=1$.

Записывая преобразование локальных координатных систем на $\{V^1\}$ в виде $x'=x'(x)$ и обозначая $\Gamma^1_{11}=\Gamma$, $\Gamma_{11}=\gamma$, будем иметь

$$\left\{\begin{aligned} &\Gamma' = \frac{d\ln\dfrac{dx}{dx'}}{dx'} + \frac{dx}{dx'}\Gamma \\ &\gamma' = \left(\frac{dx}{dx'}\right)^2\left[\gamma - \left(\frac{d^2\ln\left(\dfrac{dx'}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}}{dx^2} - \frac{d\ln\left(\dfrac{dx'}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}}{dx}\Gamma\right)\right]. \end{aligned}\right. \tag{3.25}$$

§ 3. Перенесения $\{P^n\}$ и $\{Q^n\}$, присоединенные к пространству аффинной связности

Определение 21. Перенесения $\{P^n\}$ и $\{Q^n\}$, определяемые объектом $(\Gamma^l_{jk},\ \Gamma_{jk})$, называются присоединенными к пространству аффинной связности (Γ^i_{jk}), если тензор (3.18) является ковариантной производной некоторого ковектора $(\tilde{C}_i)$. В частности, если тензор (3.18) равен нулю, то указанные выше перенесения называются инвариантно присоединенными к пространству аффинной связности.

Системы (3.23) и (3.24) для перенесений, присоединенных к пространству аффинной связности (Γ^i_{jk}), в силу

$$\tilde{C}_{ij} = \frac{\partial\tilde{C}_i}{\partial x^j} - \tilde{C}_l\Gamma^l_{ij}, \tag{3.26}$$

принимают вид

$$\frac{du^i}{\partial x^j} = -u^l\Gamma^i_{lj} + u^i u^l\left(\frac{\partial a_l}{\partial x^j} - a_k\Gamma^k_{lj}\right) \tag{3.27}$$

и

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^j} = u_l\Gamma^l_{ij} + \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - a_l\Gamma^l_{ij}\right), \tag{3.28}$$

где копунктор

$$a_i = \tilde{C}_i - \frac{1}{(n+1)}\Gamma^k_{ki}; \tag{3.29}$$

а для перенесений, инвариантно присоединенных к пространству аффинной связности (Γ^i_{jk}), в силу

$$\frac{\partial\tilde{C}_i}{\partial x^j} - \tilde{C}_l\Gamma^l_{ij} = 0, \tag{3.30}$$

вид

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} = -u^l\Gamma^i_{lj} - \frac{1}{(n+1)}u^i u^l\left(\frac{\partial\Gamma^k_{kl}}{\partial x^j} - \Gamma^k_{km}\Gamma^m_{lj}\right) \tag{3.31}$$

и

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^j} = u_l\Gamma^l_{ij} - \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial\Gamma^k_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma^k_{km}\Gamma^m_{ij}\right). \tag{3.32}$$

Теорема 28. *Группы голономии перенесений $\{P^n\}$ и $\{Q^n\}$, присоединенных к пространству аффинной связности (Γ^i_{jk}), подобны соответствующим группам голономии этого пространства.*

Доказательство. Так как системы (3.5) и (3.9) при $C_{ij}=0$ совпадают с системами (3.27) и (3.28), то последние эквивалентны, соответственно,

$$\frac{\partial\left(\frac{u^i}{(a_p u^p+1)}\right)}{\partial x^j} = -\frac{u^l}{(a_p u^p+1)}\Gamma^i_{lj} \tag{3.33}$$

и

$$\frac{\partial (u_i-a_i)}{\partial x^j} = (u_l-a_l)\,\Gamma^l_{ij}. \tag{3.34}$$

Из (3.33) [(3.34)] видно, что перенесения $\{P^n\}$ [$\{Q^n\}$], из точки M_0, вдоль замкнутой кривой (l), снова в точку M_0, осуществляются путем следующих трёх преобразований:

1) преобразование (2.31) [(2.32)] в точке M_0;

2) преобразование перенесения $\{A^n\}$ [$\{B^n\}$] в аффинной связности (Γ^i_{jk}), из точки M_0, вдоль замкнутой кривой (l), снова в точку M_0;

3) преобразование (2.29), обратное к (2.31) [(2.30), обратное к (2.32)] в точке M_0.

Определение 22. Пунктор [копунктор] называется ковариантно постоянным относительно перенесений, определенных центро-проективной связностью дифференциальной окрестности третьего порядка $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{jk})$, если его компоненты (u^i) [(u_i)] удовлетворяют системе (3.23) [(3.24)].

Копунктор (a_i) ковариантно постоянен относительно перенесений, присоединенных к пространству аффинной связности, ибо для него (3.28) обращается в тождество

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j} = a_l\Gamma^l_{ij} + \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - a_l\Gamma^l_{ij}\right).$$

Обратно, если центро-проективная связность дифференциальной окрестности третьего порядка $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{jk})$ допускает ковариантно постоянный копунктор, то она является присоединенной к пространству аффинной связности.

Теорема 29. *Пунктор [копунктор] тогда и только тогда ковариантно постоянен относительно перенесений (3.27) [(3.28)], присоединенных к пространству аффинной связности (Γ^i_{jk}), когда он инвариантен относительно группы голономии этих перенесений.*

Доказательство. Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы 28 и из того, что векторное [ковекторное] поле тогда и только тогда ковариантно постоянно в аффинной связности (Γ^i_{jk}), когда оно инвариантно относительно группы голономии этой связности [38], [20].

Согласно теореме 29 и теореме 17, лежащая в $\{P^n\}$ гиперплоскость $a_i u^i + 1 = 0$ инвариантна относительно группы голономии перенесений, присоединенных к пространству аффинной связности.

В заключение заметим еще, что алгебраические операции над пункторами и копункторами (1—6), введенные в § 3 главы 2, перестановочны с перенесениями, присоединенными к пространству аффинной связности, ибо соответствующие им обычные алгебраические операции над векторами и ковекторами перестановочны с перенесениями в аффинной связности [16].

Разумеется, все сказанное в этом параграфе относится и к перенесениям, инвариантно присоединенным к пространству аффинной связности, то-есть к таким перенесениям, в которых

$$a_i = -\frac{1}{(n+1)}\Gamma^k_{ki}.$$

§ 4. Проективно-метрические перенесения

Пусть в каждом локальном центро-проективном пространстве $\{P^n\}$ зафиксирована инвариантная гиперквадрика (2.43), определяемая, согласно теореме 19, заданием копунктора (a_i) и тензора $(g_{ij}=g_{ji})$, который предполагается невырожденным и положительно определенным.

Определение 23. Перенесения $\{P^n\}$, определяемые центро-проективной связностью $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk})$ из дифференциальной окрестности третьего порядка, называются проективно-метрическими, если длина $\lambda(u^i_0)$ каждого пунктора (u^i_0) из $\{P^n\}$, определенная формулой (2.50), остается инвариантной при этих перенесениях.

Теорема 30. *Компоненты связности* $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk})$ *определяющей проективно-метрические перенесения, всегда могут быть представлены в виде*

$$\begin{cases} \Gamma^i_{jk} = E^i_{jk} \\ \Gamma_{jk} = \dfrac{\partial a_j}{\partial x^k} - a_l E^l_{jk}, \end{cases} \tag{3.35}$$

где E^i_{jk} — *общая метрическая связность* [28], *определяемая по формуле*

$$E^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + D_{ljk}\right), \tag{3.36}$$

в которой D_{ljk} — *произвольный тензор, удовлетворяющий условию*

$$D_{ljk} + D_{jlk} = 0. \tag{3.37}$$

Доказательство. Так как при проективно-метрических перенесениях и центральная точка $(u^i=0)$, и гиперквадрика (2.43) остаются инвариантными, то при этих перенесениях должна оставаться инвариантной и полярная гиперплоскость (2.47) центральной точки $(u^i=0)$ относительно гиперквадрики (2.43).

Таким образом, копунктор (a_i) должен быть ковариантно постоянным относительно проективно-метрических перенесений, а следовательно, проективно-метрические перенесения должны быть присоединенными к пространству аффинной связности, то-есть

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - a_l \Gamma^l_{ij}. \tag{3.38}$$

Далее, поскольку проективно-метрические перенесения являются изометрическими отображениями пространств постоянной кривизны, то в формуле (2.50), а следовательно, и в (2.53) скаляр $R=\mathrm{const}$ [1].

Из (2.51) и (2.53) имеем

$$g_{ij}\,\xi^i_0\,\xi^j_0 = \mathrm{th}^2\,\frac{\lambda(u^i_0)}{R}, \tag{3.39}$$

то-есть определяемая тензором (g_{ij}) длина вектора $\xi^i_0 = \dfrac{u^i_0}{(a_p u^p+1)}$, параллельно переносимого в пространстве аффинной связности (Γ^i_{jk}), должна быть постоянной, ибо постоянна длина $\lambda(u_0^i)$ пунктора (u_0^i), переносимого в проективно-метрической связности.

Таким образом, аффинная связность (Γ^i_{jk}) должна быть общей метрической связностью]28], а следовательно, центро-проективная связность $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk})$ дифференциальной окрестности третьего порядка, определяющая проективно-метрические перенесения, должна быть присоединенной к пространству общей метрической связности, то-есть должны иметь место соотношения (3.35), (3.36) и (3.37).

Очевидно и обратное: всякая центро-проективная связность дифференциальной окрестности третьего порядка, определяемая формулами (3.35), (3.36) и (3.37), является проективно-метрической, то-есть определяет проективно-метрические перенесения $\{P^n\}$.

Теорема 31. *Пусть* $n=2$ *и* $g=\det\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{Vmatrix}$, *тогда формулы*

$$\left\{\begin{aligned} u_1^1 &= \frac{-a_1 g_{22}+a_2 g_{12}+ia_2\sqrt{g}}{a_1^2 g_{22}-2a_1 a_2 g_{12}+a_2^2 g_{11}} \\ u_1^2 &= \frac{a_1 g_{12}-a_2 g_{11}-ia_1\sqrt{g}}{a_1^2 g_{22}-2a_1 a_2 g_{12}+a_2^2 g_{11}} \end{aligned}\right. \tag{3.40}$$

и

$$\left\{\begin{aligned} u_2^1 &= \frac{-a_1 g_{22}+a_2 g_{12}-ia_2\sqrt{g}}{a_1^2 g_{22}-2a_1 a_2 g_{12}+a_2^2 g_{11}} \\ u_2^2 &= \frac{a_1 g_{12}-a_2 g_{11}+ia_1\sqrt{g}}{a_1^2 g_{22}-2a_1 a_2 g_{12}+a_2^2 g_{11}} \end{aligned}\right. \tag{3.41}$$

определяют пункторы, ковариантно постоянные относительно перенесений в проективно-метрической связности (3.35) *дифференциальной окрестности третьего порядка.*

Доказательство. Рассмотрим в каждом $\{P^2\}$ систему

$$\left\{\begin{aligned} &(a_2^2-g_{22})(u^2)^2+2\,[a_2+(a_1a_2-g_{12})\,u^1]\,u^2+[(a_1^2-g_{11})\,u'+2a_1]\,u^1+1=0 \\ &a_2 u^2+a_1 u^1+1=0, \end{aligned}\right. \tag{3.42}$$

состоящую из уравнения определяющей метрику кривой второго порядка и уравнения поляры центральной точки $(u^i=0)$ относительно этой кривой.

Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно показать, что всегда имеющиеся два решения системы (3.42) совпадают, соответственно, с (3.40) и (3.41).

Действительно, приравнивая нулю результант системы (3.42), имеем

$$\begin{vmatrix} a_2^2-g_{22} & 2a_2(a_1u^1+1)-2g_{12}u^1 & (a_1u^1+1)^2-g_{11}(u^1)^2 \\ a_2 & a_1u^1+1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1u^1+1 \end{vmatrix}=0$$

или

$$\begin{vmatrix} g_{22} & 2g_{12}u' & g_{11}(u')^2 \\ a_2 & a_1u^1+1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1u^1+1 \end{vmatrix}=0,$$

то-есть

$$(a_1^2 g_{22}-2a_1 a_2 g_{12}+a_2^2 g_{11})(u^1)^2+2\,(a_1 g_{22}-a_2 g_{12})\,u^1+g_{22}=0. \tag{3.43}$$

Решая (3.43), получаем

$$u_1^1 = \frac{-a_1 g_{22} + a_2 g_{12} + i a_2 \sqrt{g}}{a_1^2 g_{22} - 2a_1 a_2 g_{12} + a_2^2 g_{11}}, \tag{3.44}$$

$$u_2^1 = \frac{-a_1 g_{22} + a_2 g_{12} - i a_2 \sqrt{2}}{a_1^2 g_{22} - 2a_1 a_2 g_{12} + a_2^2 g_{11}}. \tag{3.45}$$

Меняя местами индексы (1) и (2) в (3.44) и (3.45), имеем

$$u_2^2 = \frac{a_1 g_{12} - a_2 g_{11} + i a_1 \sqrt{g}}{a_1^2 g_{22} - 2a_1 a_2 g_{12} + a_2^2 g_{11}}, \tag{3.46}$$

$$u_1^2 = \frac{a_1 g_{12} - a_2 g_{11} - i a_1 \sqrt{g}}{a_1^2 g_{22} - 2a_1 a_2 g_{12} + a_2^2 g_{11}}. \tag{3.47}$$

Теперь непосредственно видно, что (3.44) и (3.47) составляют (3.40), а (3.45) и (3.46) дают (3.41).

§ 5. Полный объект кручения (R^k_{ji}, R_{ji}) и полный объект кривизны $(R^l_{k,ji}, R_{k,ji})$

Определение 24. Полным объектом кручения [19] называется геометрический объект, компоненты которого (R^i_{jk}, R_{jk}) определяются кососимметрической частью объекта центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка $(\Gamma^i_{jk}\ \Gamma_{jk})$, а именно:

$$\begin{cases} R^i_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}) \\ R_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma_{jk} - \Gamma_{kj}). \end{cases} \tag{3.48}$$

Таким образом, обращение в нуль полного объекта кручения является необходимым и достаточным условием симметрии компонент объекта $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk})$ по их нижним индексам.

Из (3.16) видно, что, при преобразовании локальных координатных систем на $\{V^n\}$, компоненты полного объекта кручения преобразуются по транзитивному закону

$$\begin{cases} R^{i'}_{j'k'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} R^i_{jk} \\ R_{j'k'} = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} R_{jk} + \dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} R^i_{jk}. \end{cases} \tag{3.49}$$

Очевидно, тензор кручения (R^i_{jk}) является подобъектом полного объекта кручения, а, при условии $(R^i_{jk} = 0)$, компоненты (R_{jk}) также образуют тензор.

Определение 25. Полным объектом кривизны [19] называется геометрический объект, компоненты которого $(R^l_{k,ji}, R_{k,ji})$ выражаются через компоненты объекта центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk})$ и их первые производные по формуле

$$\begin{cases} R^l_{k,ji} = \dfrac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{ki} \Gamma^l_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{kj} \Gamma^l_{\alpha i} \\ R_{k,ji} = \dfrac{\partial \Gamma_{ki}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial \Gamma_{kj}}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{ki} \Gamma_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{kj} \Gamma_{\alpha i}. \end{cases} \tag{3.50}$$

Теорема 32. *Компоненты полного объекта кривизны* $(R^{l}_{k,ji},\ R_{k,ji})$ *преобразуются, при преобразовании локальных координатных систем на* $\{V^n\}$, *по транзитивному закону:*

$$\left\{\begin{aligned} R^{l'}_{k',j'i'} &= \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{l}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}R^{l}_{k,ji}\\ R_{k',j'i'} &= \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}R_{k,ji}+\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{l}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}R^{l}_{k,ji}.\end{aligned}\right. \tag{3.51}$$

Доказательство. Так как непосредственная проверка справедливости (3.51), в силу сложности формулы (3.50) и закона преобразования (3.16), довольно громоздка, то целесообразно выбрать иной путь, представляющий к тому же и самостоятельный интерес.

Рассмотрим псевдогруппу

$$\left\{\begin{aligned} x^{i'} &= x^{i'}(x^{i})\\ x^{0'} &= \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}+x^{0}, \end{aligned}\right. \tag{3.52}$$

полученную из исходной псевдогруппы преобразований локальных координатных систем на $\{V^n\}$ путем добавления нового переменного (x^0).

Поскольку, согласно (3.52),

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{0}}=\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{0'}}=0,\qquad \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^{0}}=\frac{\partial x^{0}}{\partial x^{0'}}=1,$$

$$\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^{i}}=\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{i}},\qquad \frac{\partial x^{0}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial\,\mathrm{dl}\det\left\|\frac{\partial x^{r}}{\partial x^{r'}}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^{i'}}, \tag{3.53}$$

то, положив

$$\Gamma^{0}_{ij}=\Gamma_{ij},\qquad \Gamma^{0}_{00}=\Gamma^{i}_{j0}=\Gamma^{i}_{0j}=\Gamma^{i}_{00}=0, \tag{3.54}$$

будем иметь вместо (3.16) и (3.50), соответственно,

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}+\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^{2} x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}} \tag{3.55}$$

и

$$R^{\alpha}_{\beta,\gamma\delta}=\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}}+\Gamma^{\varepsilon}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}-\Gamma^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\delta}, \tag{3.56}$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon=0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

Так как (3.56) — тензор, то

$$R^{\alpha'}_{\beta',\gamma'\delta'}=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\delta'}}R^{\alpha}_{\beta,\gamma\delta},$$

а отсюда, в силу (3.53) и (3.54), непосредственно следует закон преобразования (3.51) вместе с транзитивностью.

Замечание. Вместо того, чтобы рассматривать многообразие $\{V^n\}$ с объектом $(\Gamma^{i}_{jk},\ \Gamma_{jk})$, очевидно, можно рассматривать $\{V^{n+1}\}$ с псевдогруппой (3.52) и со связностью $(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma})$, удовлетворяющей условиям (3.54).

В частности, пунктор (u^i) будет реализовываться тогда как отношение дифференциалов $\left(\frac{dx^i}{dx^0}\right)$, ибо

$$u^{i'}=\frac{dx^{i'}}{dx^{0'}}=\frac{\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}dx^{i}}{-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial\ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}}\right\|}{\partial x^{j}}dx^{j}+dx^{0}}=\frac{\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}u^{i}}{-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial\ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}}\right\|}{\partial x^{j}}u^{j}+1}. \tag{3.57}$$

Пусть теперь полный объект кручения (3.48) равен нулю, то-есть объект $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{jk})$ – симметричен по своим нижним индексам.

Определение 26. Инвариантно присоединенный к симметрической аффинной связности (Γ^i_{jk}) объект центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{jk})$ называется аффинно плоским, если построенный по нему полный объект кривизны (3.50) равен нулю.

Так как для симметричного аффинно плоского объекта $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{jk})$ тензор кривизны $R^l_{k,ji}=0$, то на $\{V^n\}$ можно найти такую систему координат, определенную с точностью до произвольных невырожденных линейных преобразований, в которой $\Gamma^i_{jk}=0$. Более того, в той же системе координат и $\Gamma_{jk}=0$, ибо, в силу инвариантной присоединенности объекта $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{jk})$ к аффинной связности (Γ^i_{jk}), имеет место обращение в нуль тензора (3.18).

Заметим, что условия обращения в нуль полного объекта кручения (3.48) и полного объекта кривизны (3.50), хотя и влекут за собой существование на $\{V^n\}$, с одной стороны, такой системы координат, в которой $\Gamma^i_{jk}=0$, а с другой стороны, такой системы координат, в которой $\Gamma_{jk}=0$, но, тем не менее, сами по себе эти условия еще не являются достаточными для существования на $\{V^n\}$ такой системы координат, в которой одновременно и $\Gamma^i_{jk}=0$, и $\Gamma_{jk}=0$.

Даже в одномерном случае, когда объекты (3.48) и (3.50) обращаются в нуль тождественно, система

$$\begin{cases} \Gamma-\dfrac{d\ln\dfrac{dx'}{dx}}{dx}=0 \\ \gamma+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{d^2\ln\dfrac{dx'}{dx}}{dx^2}-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{d\ln\dfrac{dx'}{dx}}{dx}\,\Gamma=0, \end{cases} \tag{3.58}$$

полученная из (3.25) при $\Gamma'=\gamma'=0$, вообще говоря, несовместна. Для совместности системы (3.58) нужно, чтобы выполнялось условие

$$\gamma=-\frac{1}{2}\,\frac{d\Gamma}{dx}+\frac{1}{2}\,\Gamma^2, \tag{3.59}$$

совпадающее с условием инвариантной присоединенности $(\Gamma,\ \gamma)$ к (Γ). Выписывая условия совместности систем (3.23) и (3.24), имеем, соответственно,

$$u^k R^l_{k,ji}-u^l u^k R_{k,ji}=0 \tag{3.60}$$

и

$$u_l R^l_{k,ji}+R_{k,ji}=0. \tag{3.61}$$

Таким образом, обращение в нуль полного объекта кривизны (3.50) влечет за собой (3.60) и (3.61) и, следовательно, является условием независимости перенесений пунктора и копунктора от того пути, вдоль которого эти перенесения производятся.

Однако, рассмотренные перенесения, вообще говоря, существенно зависят от той точки, в которую они производятся, и поэтому не являются полной аналогией абсолютного параллелизма.

Далее, хотя существование в n-мерном пространстве аффинной связности n ковариантно постоянных векторных полей влечет за собой, как известно, обращение в нуль тензора кривизны этой связности, тем не менее, существование n ковариантно постоянных пункторов в многообразии с объектом $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk})$, вообще говоря не влечет за собой обращение в нуль полного объекта кривизны (3.50).

Так, например, уже при $n=2$, для проективно-метрических перенесений, согласно теореме 31, существует два ковариантно постоянных пунктора, (3.40) и (3.41), хотя полный объект кривизны, очевидно, отличен от нуля.

Определение 27. Объект центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk})$ при $n>2$ $[n=2]$ называется проективно плоским, если построенные по нему тензоры (3.18) и (1.32) [(1.56)] и объект (3.48) равны нулю.

Так как тензор (1.32) [(1.56)] равен нулю, то, согласно теореме 11, всегда имеется возможность перейти к такой системе координат, определенной с точностью до произвольных невырожденных дробно-линейных преобразований, в которой проективные параметры Томаса $\Pi^i_{jk}=0$ и, следовательно, в силу формулы (1.29), аффинная связность имеет вид

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{(n+1)}\delta^i_j\Gamma^a_{ak}+\frac{1}{(n+1)}\delta^i_k\Gamma^a_{aj}. \tag{3.62}$$

Системы (3.31) и (3.32), определяющие перенесения пункторов и копункторов в указанной выше системе координат, в силу (3.62), принимают вид

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=-\frac{1}{(n+1)}\left[u^i\Gamma^a_{aj}+\delta^i_j u^l\Gamma^a_{al}+u^i u^l\left(\frac{\partial\Gamma^a_{al}}{\partial x^j}-\frac{2}{(n+1)}\Gamma^a_{al}\Gamma^b_{bj}\right)\right] \tag{3.63}$$

и, соответственно,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^j}=\frac{1}{(n+1)}\left[u_i\Gamma^a_{aj}+u_j\Gamma^a_{ai}-\left(\frac{\partial\Gamma^a_{ai}}{\partial x^j}-\frac{2}{(n+1)}\Gamma^a_{ai}\Gamma^b_{bj}\right)\right]. \tag{3.64}$$

Далее, поскольку в рассматриваемых координатах, в силу теоремы 15, появляется возможность отождествить точки локальных центро-проективных пространств $\{P^n\}$ с точками самого многообразия $\{V^n\}$, то геометрические образы (точки и гиперплоскости), определяемые пункторами и копункторами в $\{P^n\}$ и переносимые с помощью формул (3.63) и (3.64), оказываются лежащими в самом многообразии $\{V^n\}$.

В заключение заметим еще, что формулы (3.63) и (3.64) при дополнительном условии

$$\Gamma^k_{ki}=\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}, \tag{3.65}$$

вытекающем из обращения в нуль тензора эквиаффинности, принимают вид

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=\frac{1}{2}a^{\frac{2}{(n+1)}}\left(u^i\frac{\partial a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^j}+\delta^i_j u^l\frac{\partial a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^l}+u^i u^l\frac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^j\partial x^l}\right) \tag{3.66}$$

и

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^j}=-\frac{1}{2}a^{\frac{2}{(n+1)}}\left(u_i\frac{\partial a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^j}+u_j\frac{\partial a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i}-\frac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}\right). \tag{3.67}$$

Глава 4

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПУНКТОРОВ $\{P^n\}$ КАК СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКТИВНО-ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА И РАСЩЕПЛЕНИЕ ТЕНЗОРА ЭКВИПРОЕКТИВНОЙ КРИВИЗНЫ

§ 1. Проективная метрика, индуцированная в $\{P^n\}$ свернутым объектом аффинной связности и симметрической частью тензора Риччи

Пусть на $\{V^n\}$ задан объект симметричной аффинной связности (Γ^i_{jk}). Рассмотрим в каждом $\{P^n\}$ гиперквадрику [16]

$$\varphi \equiv \left[\frac{1}{(n+1)^2}\Gamma^a_{ai}\Gamma^b_{bj} - \frac{\sigma_{ij}}{(n-1)}\right]u^i u^j - \frac{2}{(n+1)}\Gamma^a_{ai}u^i + 1 = 0, \tag{4.1}$$

где через (σ_{ij}) обозначена симметрическая часть тензора Риччи

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{j,i}). \tag{4.2}$$

Хотя $\det\|\sigma_{ij}\|$, вообще говоря, не предполагается отличным от нуля и гиперквадрика (4.1) может оказаться вырожденной, тем не менее, в случае $\sigma_{ij}u^i_0 u^j_0 \geqslant 0$, длина пунктора (u^i_0) может быть определена формулой

$$\lambda(u^i_0) = \frac{R}{2}\ln\frac{\left(-\frac{1}{(n+1)}\Gamma^a_{ak}u^k_0 + 1\right) + \sqrt{\frac{\sigma_{ij}}{(n-1)}u^i_0 u^j_0}}{\left(-\frac{1}{(n+1)}\Gamma^a_{ak}u^k_0 + 1\right) - \sqrt{\frac{\sigma_{ij}}{(n-1)}u^i_0 u^j_0}}, \tag{4.3}$$

соответствующей (2.50), а косинус угла между пункторами (u^i_0) и (u^i_1), с отличными от нуля длинами, формулой

$$\cos(\widehat{u^i_0, u^i_1}) = \frac{\sigma_{ij}u^i_0 u^j_1}{\sqrt{\sigma_{ij}u^i_0 u^j_0}\sqrt{\sigma_{ij}u^i_1 u^j_1}}, \tag{4.4}$$

соответствующей (2.54).

Наконец, каждому пунктору (u^i_0), с длиной $\lambda(u^i_0)$, можно поставить в соответствие угол параллельности $\Pi[\lambda(u^i_0)]$, удовлетворяющий формуле Лобачевского

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi[\lambda(u^i_0)]}{2} = e^{-\frac{\lambda(u^i_0)}{R}}.$$

В частности, пунктору (u^i_0), с длиной $\lambda(u^i_0) = 0$, очевидно, будет соответствовать угол параллельности $\Pi[0] = \frac{\pi}{2}$.

Если же окажется $\det\|\sigma_{ij}\| \neq 0$, то локальные пространства $\{P^n\}$ станут пространствами постоянной кривизны, а проективно-метрические перенесения пункторов и копункторов определятся системами

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} = -u^k \tilde{E}^i_{kj} - \frac{1}{(n+1)}u^i u^k\left(\frac{\partial \Gamma^l_{lk}}{\partial x^j} - \Gamma^l_{lm}\tilde{E}^m_{kj}\right) \tag{4.5}$$

и, соответственно,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^j} = u_k \tilde{E}^k_{ij} - \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial \Gamma^l_{li}}{\partial x^j} - \Gamma^l_{lm}\tilde{E}^m_{ij}\right), \tag{4.6}$$

где $\tilde{E}^i_{jk}$ — общая метрическая связность, построенная, согласно формулам (3.35), (3.36) и (3.37), для тензора $\frac{\sigma_{ij}}{(n-1)}$.

§ 2. Пространства $\{P^n\}$ как симметрические проективно-евклидовы пространства

В настоящем параграфе локальные пространства пункторов $\{P^n\}$, в свою очередь, рассматриваются как пространства с аффинной связностью.

Теорема 33. *Полярное коррелятивное соответствие относительно гиперквадрики* (4.1) *определяет в каждом* $\{P^n\}$ *симметрическую аффинную связность* $\left(\Gamma^i_{jk}(x, u)\right)$ *и ее тензор Риччи* $\left(R_{i,j}(x, u)\right)$ [17], [22].

Доказательство. Принимая $(\tilde{u}', \tilde{u}^2, \ldots, \tilde{u}^n, \tilde{u}^0)$ за однородные координаты точки в $\{P^n\}$ и считая их функциями параметров $(t^1, t^2, \ldots, t^n)$, сопоставляем с каждой точкой из $\{P^n\}$ n точек

$$v^\alpha_i = \frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial t^i} + \mu_i \tilde{u}^\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n; \ \ i = 1, 2, \ldots, n),$$

лежащих на касательных к координатным линиям (t^i) в точке $(\tilde{u}^\alpha)$.

Требуя теперь, чтобы точки (v^α_i) лежали в полярной гиперплоскости точки $(\tilde{u}^\alpha)$ относительно гиперквадрики (4.1), получаем

$$v^\alpha_i = \frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial t^i} - \frac{\partial \ln \sqrt{(\tilde{u}^0)^2 \cdot \varphi}}{\partial t^i}\,\tilde{u}^\alpha. \tag{4.7}$$

Нормируя однородные координаты точки так, чтобы $\tilde{u}^0 = 1$ и применяя в качестве параметров $(u', u^2, \ldots, u^n)$, получаем

$$\begin{cases} v^j_i = \delta^j_i - \dfrac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^i}\,u^j \\ v^0_i = -\dfrac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^i}. \end{cases} \tag{4.8}$$

Сопоставляя далее каждой точке (v^α_i), в свою очередь, n точек, будем иметь, подобно (4.7),

$$w^\beta_{kl} = \frac{\partial v^\beta_k}{\partial u^l} - \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^l}\,v^\beta_k. \tag{4.9}$$

Представляя полученные точки в виде

$$w^\beta_{kl} = \Gamma^j_{kl} v^\beta_j + \frac{1}{(n-1)} R_{k,l} u^\beta \tag{4.10}$$

и учитывая соотношение (4.8), получаем

$$\begin{cases} \Gamma^j_{kl}\left(\delta^i_j - \dfrac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^j}\,u^i\right) + \dfrac{1}{(n-1)} R_{k,l} u^i = -\dfrac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^k \partial u^l}\,u^i + \dfrac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^k}\,\dfrac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^l}\,u^i - \\ \qquad - \delta^i_k \dfrac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^l} - \delta^i_l \dfrac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^k} \\ -\Gamma^j_{kl} \dfrac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^j} + \dfrac{1}{(n-1)} R_{k,l} = -\dfrac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^k \partial u^l} + \dfrac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^k}\,\dfrac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^l}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Из (4.11) находим

$$\Gamma^j_{kl}(x,\ u) = -\delta^j_k \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^l} - \delta^j_l \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^k} \tag{4.12}$$

и

$$R_{k,l}(x,\ u) = (1-n)\left(\frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^k \partial u^l} + \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^k}\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^l}\right). \tag{4.13}$$

Так как преобразование пункторов (u^i) в $\{P^n\}$ влечет за собой, согласно (2.45), преобразование

$$\varphi' = \frac{\varphi}{\left(-\frac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k} u^k + 1\right)^2},$$

то, в силу (2.9),

$$\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi'}}{\partial u^{k'}} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^k} - \frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial u^r}{\partial u^{r'}}\right\|}{\partial u^{k'}}$$

и, следовательно,

$$\Gamma^{j'}_{k'l'}(x,\ u) = \frac{1}{(n+1)}\delta^{j'}_{k'}\frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial u^r}{\partial u^{r'}}\right\|}{\partial u^{l'}} +$$

$$+\frac{1}{(n+1)}\delta^{j'}_{l'}\frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial u^r}{\partial u^{r'}}\right\|}{\partial u^{k'}} + \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}\frac{\partial u^l}{\partial u^{l'}}\Gamma^j_{kl}(x,\ u),$$

что, согласно приведенной системе дифференциальных уравнений псевдогруппы дробно-линейных преобразований, совпадает с законом преобразования аффинной связности.

Таким образом, (4.12) действительно определяет аффинную связность.

Далее, вычисляя тензор кривизны для связности (4.12), имеем

$$R^i_{k,lj}(x,\ u) = \delta^i_l\left(\frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^j \partial u^k} + \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^j}\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^k}\right) -$$

$$-\delta^i_j\left(\frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^k \partial u^l} + \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^k}\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi}}{\partial u^l}\right), \tag{4.14}$$

а, следовательно, (4.13) совпадает с тензором Риччи для связности (4.12).

Итак, аффинная связность (4.12) и ее тензор Риччи (4.13) определяются, как коэффициенты разложения в формуле (4.10).

Наконец заметим еще, что, в силу своей структуры, (4.12) является эквиаффинной проективно-евклидовой связностью.

Внося в (4.12) и (4.13) значение φ из (4.1), получаем

$$\Gamma^j_{kl}(x,\ u) = -\frac{\delta^j_k(a_{il}u^i + a_l)}{\varphi} - \frac{\delta^j_l(a_{ik}u^i + a_k)}{\varphi} \tag{4.15}$$

и, соответственно,

$$R_{k,l}(x,\ u) = \frac{(1-n)\,a_{kl}}{\varphi} - \frac{(1-n)\,(a_{ik}u^i + a_k)\,(a_{il}u^i + a_l)}{\varphi}, \tag{4.16}$$

где

$$a_{ij} = \frac{1}{(n+1)^2}\Gamma^a_{ai}\Gamma^b_{bj} - \frac{\sigma_{ij}}{(n-1)}, \qquad a_i = -\frac{1}{(n+1)}\Gamma^a_{ai}. \tag{4.17}$$

Теорема 34. *Проективно-евклидова связность* (4.15) *является связностью симметрического пространства* [26].

Доказательство. Поскольку, согласно (4.14) и (4.13),

$$R^i_{k,\,ij}(x,\ u)=\frac{1}{(1-n)}\,[\delta^i_l R_{j,\,k}(x,\ u)-\delta^i_j R_{l,\,k}(x,\ u)],\tag{4.18}$$

то для доказательства теоремы достаточно показать, что тензор Риччи (4.16) ковариантно постоянен в связности (4.15).

Производя непосредственные вычисления, получаем:

$$\frac{\partial R_{k,\,l}(x,\ u)}{\partial u^j}=\frac{-2\,(1-n)\,a_{kl}\,(a_{ij}u^i+a_j)}{\varphi^2}-\frac{(1-n)\,a_{kj}\,(a_{il}u^i+a_l)+(1-n)\,a_{lj}\,(a_{ik}u^i+a_k)}{\varphi^2}-$$

$$-\frac{(1-n)\,4\,(a_{ij}u^i+a_j)\,(a_{ik}u^i+a_k)\,(a_{il}u^i+a_l)}{\varphi^3},$$

$$R_{k,\,m}(x,\ u)\,\Gamma^m_{lj}(x,\ u)=-\frac{(1-n)\,a_{kl}\,(a_{ij}u^i+a_j)}{\varphi^2}-\frac{(1-n)\,a_{kj}\,(a_{il}u^i+a_l)}{\varphi^2}+$$

$$+\frac{2\,(1-n)\,(a_{ij}u^i+a_j)\,(a_{ik}u^i+a_k)\,(a_{il}u^i+a_l)}{\varphi^3}$$

и, следовательно,

$$\nabla_j R_{k,\,l}(x,\ u)=0.\tag{4.19}$$

Заметим еще, что при условии невырожденности тензора (4.16), аффинная связность (4.15) становится связностью пространства постоянной кривизны.

§ 3. Расщепление объекта аффинной связности

Теорема 35. *Значение проективных параметров Томаса* (Π^i_{jk}), *в каждой точке* $M_0(x^r_0)$ *на* $\{V^n\}$, *может быть представлено в виде*

$$\Pi^i_{jk}(x^r_0)=\Gamma^i_{jk}(x^r_0)-\Gamma^i_{jk}(x^r_0,\ 0),\tag{4.20}$$

где $\Gamma^i_{jk}(x^r_0)$ *— значение исходной аффинной связности в точке* $M_0(x^r_0)$, *а* $\Gamma^i_{jk}(x^r_0,\ 0)$ *— вычисленное в центральной точке* $(u^r=0)$ *значение аффинной связности симметрического проективно-евклидова пространства, индуцированного в локальном центро-проективном пространстве* $\{P^n\}$, *связанном с точкой* $M_0(x^r_0)$ [17]. •

Доказательство. Так как, согласно (4.15) и (4.17),

$$\Gamma^j_{kl}(x^r_0,\ u^r)=-\frac{\delta^j_k\left[\left(\frac{1}{(n+1)^2}\,\Gamma^a_{al}(x^r_0)\,\Gamma^b_{bi}(x^r_0)-\frac{\sigma_{li}(x^r_0)}{(n-1)}\right)u^i-\frac{1}{(n+1)}\,\Gamma^a_{al}(x^r_0)\right]}{\left[\frac{1}{(n+1)^2}\,\Gamma^a_{ap}(x^r_0)\,\Gamma^b_{bq}(x^r_0)-\frac{\sigma_{pq}(x^r_0)}{(n-1)}\right]u^pu^q-\frac{2}{(n+1)}\,\Gamma^a_{ap}(x^r_0)\,u^p+1}-$$

$$-\frac{\delta^j_l\left[\left(\frac{1}{(n+1)^2}\,\Gamma^a_{ak}(x^r_0)\,\Gamma^b_{bi}(x^r_0)-\frac{\sigma_{ki}(x^r_0)}{(n-1)}\right)u^i-\frac{1}{(n+1)}\,\Gamma^a_{ak}(x^r_0)\right]}{\left[\frac{1}{(n+1)^2}\,\Gamma^a_{ap}(x^r_0)\,\Gamma^b_{bq}(x^r_0)-\frac{\sigma_{pq}(x^r_0)}{(n-1)}\right]u^pu^q-\frac{2}{(n+1)}\,\Gamma^a_{ap}(x^r_0)\,u^p+1},$$

то в центральной точке, при $(u^r=0)$, имеем

$$\Gamma^j_{kl}(x^r_0,\ 0)=\frac{1}{(n+1)}\,\delta^j_k\,\Gamma^a_{al}(x^r_0)+\frac{1}{(n+1)}\,\delta^j_l\,\Gamma^a_{ak}(x^r_0)\tag{4.21}$$

и, следовательно, из (1.29) получаем соотношение (4.20), которое, в силу (2.6) и (2.10), сохраняется в любой системе координат.

Заметим еще, что при свертывании (4.20) по индексам i и j, в силу $(\Pi^a_{ak}=0)$, получаем дополнительно

$$\Gamma_k(x^r_0)=\Gamma_k(x^r_0,\ 0).\tag{4.22}$$

Подобным же образом можно дать геометрическое истолкование компонент связующего объекта (G^i_{jk}).

Действительно, рассматривая всюду вместо свернутого объекта связности (Γ^k_{kl}) объект $\left(\frac{\partial \ln a}{\partial x^i}\right)$, где a — относительный скаляр единичного веса, будем иметь

$$\Gamma^j_{kl}(x^r_0, u^r) = -$$

$$-\frac{\delta^j_k\left[\left(\frac{1}{(n+1)^2}\frac{\partial \ln a}{\partial x^l}\Big|_{x^r=x^r_0}\frac{\partial \ln a}{\partial x^i}\Big|_{x^r=x^r_0}-\frac{\sigma_{li}(x^r_0)}{(n-1)}\right)u^i-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^l}\Big|_{x^r=x^r_0}\right]}{\left[\frac{1}{(n+1)^2}\frac{\partial \ln a}{\partial x^p}\Big|_{x^r=x^r_0}\frac{\partial \ln a}{\partial x^q}\Big|_{x^r=x^r_0}-\frac{\sigma_{pq}(x^r_0)}{(n-1)}\right]u^pu^q-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^p}\Big|_{x^r=x^r_0}u^p+1}-$$

$$-\frac{\delta^j_l\left[\left(\frac{1}{(n+1)^2}\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}\Big|_{x^r=x^r_0}\frac{\partial \ln a}{\partial x^i}\Big|_{x^r=x^r_0}-\frac{\sigma_{ki}(x^r_0)}{(n-1)}\right)u^i-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}\Big|_{x^r=x^r_0}\right]}{\left[\frac{1}{(n+1)^2}\frac{\partial \ln a}{\partial x^p}\Big|_{x^r=x^r_0}\frac{\partial \ln a}{\partial x^q}\Big|_{x^r=x^r_0}-\frac{\sigma_{pq}(x^r_0)}{(n-1)}\right]u^pu^q-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^p}\Big|_{x^r=x^r_0}u^p+1},$$

т. е., при $(u^r=0)$,

$$\Gamma^j_{kl}(x^r_0, 0)=\frac{1}{(n+1)}\delta^j_k\frac{\partial \ln a}{\partial x^l}\Big|_{x^r=x^r_0}+\frac{1}{(n+1)}\delta^j_l\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}\Big|_{x^r=x^r_0}. \tag{4.23}$$

Таким образом, формула расщепления (1.23) переписывается в виде (4.20) и, следовательно, получает соответствующий геометрический смысл

$$G^i_{jk}(x^r_0)=\Gamma^i_{jk}(x^r_0)-\Gamma^i_{jk}(x^r_0, 0).$$

§ 4. Расщепление тензора эквипроективной кривизны

Теорема 36. *Значение тензора эквипроективной кривизны $(T^l_{k,\,ji})$ в каждой точке $M_0(x^r_0)$ на $\{V^n\}$ может быть представлено в виде*

$$T^l_{k,\,ji}(x^r_0)=R^l_{k,\,ji}(x^r_0)-R^l_{k,\,ji}(x^r_0, 0), \tag{4.24}$$

где $R^l_{k,\,ji}(x^r_0)$ — значение тензора кривизны исходной аффинной связности в точке $M^0(x^r_0)$, а $R^l_{k,\,ji}(x^r_0, 0)$ — вычисленное в центральной точке $(u^r=0)$ значение тензора кривизны симметрического проективно-евклидова пространства, индуцированного в локальном центро-проективном пространстве $\{P^n\}$, связанном с точкой $M_0(x^r_0)$ [17].

Доказательство. Так как, согласно (4.16) и (4.17),

$$R_{k,\,l}(x^r_0, u^r)=(1-n)\frac{\frac{1}{(n+1)^2}\Gamma^a_{ak}(x^r_0)\Gamma^b_{bl}(x^r_0)-\frac{\sigma_{kl}(x^r_0)}{(n-1)}}{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\Gamma^a_{ai}(x^r_0)\Gamma^b_{bj}(x^r_0)-\frac{\sigma_{ij}(x^r_0)}{(n-1)}\right)u^iu^j-\frac{2}{(n+1)}\Gamma^a_{ai}(x^r_0)u^i+1}-$$

$$-\frac{(1-n)\left[\left(\frac{1}{(n+1)^2}\Gamma^a_{ai}(x^r_0)\Gamma^b_{bk}(x^r_0)-\frac{\sigma_{ik}(x^r_0)}{(n-1)}\right)u^i-\frac{1}{(n+1)}\Gamma^a_{ak}(x^r_0)\right]}{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\Gamma^a_{ai}(x^r_0)\Gamma^b_{bj}(x^r_0)-\frac{\sigma_{ij}(x^r_0)}{(n-1)}\right)u^iu^j-\frac{2}{(n+1)}\Gamma^a_{ai}(x^r_0)u^i+1}\times$$

$$\times\frac{\left[\left(\frac{1}{(n+1)^2}\Gamma^a_{ai}(x^r_0)\Gamma^b_{bl}(x^r_0)-\frac{\sigma_{il}(x^r_0)}{(n-1)}\right)u^i-\frac{1}{(n+1)}\Gamma^a_{al}(x^r_0)\right]}{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\Gamma^a_{ai}(x^r_0)\Gamma^b_{bj}(x^r_0)-\frac{\sigma_{ij}(x^r_0)}{(n-1)}\right)u^iu^j-\frac{2}{(n+1)}\Gamma^a_{ai}(x^r_0)u^i+1},$$

то в центральной точке, при $(u^r=0)$, имеем

$$R_{k,\,l}(x^r_0, 0)=\sigma_{kl}(x^r_0) \tag{4.25}$$

и, следовательно, в силу (4.18),

$$R^l_{k,\,ji}(x^r_0,\ 0)=\frac{1}{(1-n)}\,[\delta^l_j\sigma_{ik}(x^r_0)-\delta^l_i\sigma_{jk}(x^r_0)]. \tag{4.26}$$

Внося теперь (4.26) в (1.40), получаем соотношение (4.24), которое, в силу (2.10), сохраняется в любой системе координат.

В силу (1.38), (4.24) можно переписать в виде

$$P^l_{k,\,ji}(x^r_0)-Q^l_{k,\,ji}(x^r_0)=R^l_{k,\,ji}(x^r_0)-R^l_{k,\,ji}(x^r_0,\ 0). \tag{4.27}$$

Отсюда, в частности, имеем:

1) для эквиаффинных пространств

$$P^l_{k,\,ji}(x^r_0)=R^l_{k,\,ji}(x^r_0)-R^l_{k,\,ji}(x^r_0,\ 0); \tag{4.28}$$

2) для проективно-евклидовых пространств

$$-Q^l_{k,\,ji}(x^r_0)=R^l_{k,\,ji}(x^r_0)-R^l_{k,\,ji}(x^r_0,\ 0); \tag{4.29}$$

3) для эквиаффинных проективно-евклидовых пространств

$$R^l_{k,\,ji}(x^r_0)=R^l_{k,\,ji}(x^r_0,\ 0). \tag{4.30}$$

Для двумерных пространств тензор проективной кривизны обращается в нуль тождественно и, следовательно, соотношение (4.27) принимает вид (4.29), а в случае эквиаффинной связности (4.30).

Заметим наконец, что, в силу (4.24) и (1.39), разность тензора кривизны рассматриваемой аффинной связности и тензора кривизны локального симметрического проективно-евклидова пространства, вычисленного в соответствующей точке, выражается через компоненты связующего объекта и их первые производные и, следовательно, не зависит от выбора основного относительного скаляра (a) веса $N=1$, определяющего расщепление аффинной связности (1.23), т. е. имеет одно и то же значение для всех пространств аффинной связности, допускающих геодезическое отображение друг на друга с сохранением тензора эквиаффинности.

§ 5. Пространства эквиаффинной проективно-евклидовой связности с невырожденным тензором Риччи

Пусть на $\{V^n\}$ задана аффинная связность $(\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj})$, обращающая в нуль тензор эквипроективной кривизны $(T^l_{k,\,ji})$ и обладающая невырожденным тензором Риччи $(R_{i,\,j})$.

Введем в рассмотрение скаляр

$$K(x^r)=\frac{\varepsilon}{(1-n)}\sqrt[n]{\frac{\det\|R_{p,\,q}\|}{a^2(x^r)}}\,, \tag{4.31}$$

где ε — корень n-ой степени из единицы, а $a(x^r)$ — относительный скаляр единичного веса, определенный с точностью до постоянного множителя из условия

$$\Gamma^k_{ki}(x^r)=\frac{\partial\ln a(x^r)}{\partial x^i}. \tag{4.32}$$

Локальные симметрические проективно-евклидовы пространства становятся теперь пространствами постоянной кривизны $K(x^r)$, а их метрические тензоры принимают вид

$$g_{ij}(x^r,\ u^r)=\bar{\varepsilon}R_{i,j}(x^r,\ u^r)\sqrt[n]{\frac{a^2(x^r)}{\det\|R_{p,q}(x^r)\|}}\,, \tag{4.33}$$

ибо, согласно (4.33),

$$\det\|g_{pq}(x^r,\ 0)\|=a^2(x^r). \tag{4.34}$$

Внося в (4.18) вместо $R_{ij}(x^r,\ u^r)$ его значение из (4.33) и учитывая (4.31) получаем

$$R^i_{k,\,lj}(x^r,\ u^r)=K(x^r)\left(\delta^i_l g^{(x^r,\,u^r)}_{jk}-\delta^i_j g^{(x^r,\,u^r)}_{lk}\right), \tag{4.35}$$

откуда при $(u^i=0)$, в силу (4.30), имеем

$$R^i_{k,\,lj}(x^r)=K(x^r)\left(\delta^i_l g_{jk}(x^r)-\delta^i_j g_{lk}(x^r)\right), \tag{4.36}$$

где

$$g_{ij}(x^r)=g_{ij}(x^r,\ 0)=\bar{\varepsilon}R_{i,j}(x^r)\sqrt[n]{\frac{a^2(x^r)}{\det\|R_{p,q}(x^r)\|}}\,. \tag{4.37}$$

Хотя ковариантно постоянным в рассматриваемой аффинной связности (Γ^i_{jk}) является только определитель (4.34)

$$\frac{\partial a^2(x^r)}{\partial x^k}-2a^2(x^r)\frac{\partial\ln a(x^r)}{\partial x^k}\equiv 0\,,$$

а не сам тензор (4.37), тем не менее, используя этот тензор в качестве метрического, можно, согласно (4.36), определить скаляр (4.31) как кривизну в двумерном направлении, которая не зависит от выбора этого направления, но существенно зависит от той точки, в которой рассматривается.

Таким образом, пространства, рассматриваемые в этом параграфе [17], по своей природе оказываются очень близкими к пространствам постоянной кривизны.

Для изучения таких пространств целесообразно перейти к специальным, локально-проективным, координатам [15], что и будет сделано в следующей главе.

Глава 5

ЛОКАЛЬНО-ПРОЕКТИВНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

§ 1. Эквиаффинные проективно-евклидовы пространства в локально-проективных координатах

Поскольку для эквиаффинных проективно-евклидовых пространств всегда можно перейти к такой системе координат, определенной с точностью до произвольных невырожденных дробно-линейных преобразований, в которой компоненты аффинной связности (Γ^i_{jk}) принимают вид

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{(n+1)}\delta^i_j\frac{\partial\ln a}{\partial x^k}+\frac{1}{(n+1)}\delta^i_k\frac{\partial\ln a}{\partial x^j}, \tag{5.1}$$

где (a) — относительный скаляр единичного веса, определенный с точностью до постоянного множителя из условия (4.32), то естественно возникает возможность изучать такие пространства, рассматривая локально-проективное многообразие [13], [15] (многообразие, определенное с точностью до произвольных невырожденных дробно-линейных преобразований локальных координатных систем), с заданным на нем относительным скаляром (a), веса $N=1$.

При таком рассмотрении формулы ковариантного дифференцирования заменяются формулами инвариантного дифференцирования (1.19) относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований.

Тензор кривизны и тензор Риччи, как показывают непосредственные вычисления, принимают, соответственно, вид:

$$R^h_{k,ij}(x)=\frac{1}{(1-n)}\left(\delta^h_i R_{j,k}(x)-\delta^h_j R_{i,k}(x)\right) \tag{5.2}$$

и

$$R_{i,j}(x)=\frac{1-n}{(n+1)}\left(\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}\frac{\partial\ln a}{\partial x^j}-\frac{\partial^2\ln a}{\partial x^i\partial x^j}\right)=(1-n)\,a^{\frac{1}{(n+1)}}\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}. \tag{5.3}$$

Теорема 37. *Относительный скаляр $a(x)$ в каждом локальном центро-проективном пространстве $\{P^n\}$ определяет величину*

$$a(x,\ u)=\frac{a(x)}{\left(\dfrac{a^{\frac{2}{(n+1)}}}{2}\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}u^i u^j-\dfrac{2}{(n+1)}\dfrac{\partial\ln a}{\partial x^i}u^i+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \tag{5.4}$$

преобразующуюся при дробно-линейных преобразованиях (2.2), *индуцируемых преобразованиями* (1.1) *в* $\{P^n\}$, *по закону относительного скаляра, веса* $N=1$, *и удовлетворяющую условиям*

$$a(x,\ u)\Big|_{u=0}=a(x),\qquad \frac{\partial a(x,\ u)}{\partial u^k}\Big|_{u=0}=\frac{\partial a(x)}{\partial u^k},\qquad \frac{\partial^2 a(x,\ u)}{\partial u^k\partial u^l}\Big|_{u=0}=\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^k\partial x^l}, \tag{5.5}$$

сохраняющимся при преобразовании координат [15].

Доказательство. Так как $a'(x')=\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|\cdot a(x)$, а

$$\frac{1}{2}a^{\frac{2}{(n+1)}}\frac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}=\frac{1}{(n+1)^2}\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}\frac{\partial\ln a}{\partial x^j}+a^{\frac{1}{(n+1)}}\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}\Gamma^a_{ai}\Gamma^b_{bj}-\frac{1}{(n-1)}R_{i,j},$$

то, в силу (2.45),

$$a'(x',u')=\frac{\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|a(x,u)}{\left(-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial\ln\det\left\|\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\right\|}{\partial x^{k'}}u^{k'}+1\right)^{n+1}},$$

то-есть

$$a'(x',u')=\det\left\|\frac{\partial u^r}{\partial u^{r'}}\right\|a(x,u).$$

В справедливости условий (5.5) легко убеждаемся путем непосредственной проверки.

Поскольку рассматриваются только дробно-линейные преобразования локальных координатных систем, то, согласно теореме 15, можно, положив

$$u^i=x^i-x_0^i, \tag{5.6}$$

отождествить точки локальных центро-проективных пространств $\{P^n\}$ с точками самого многообразия.

Определение 28. Относительный скаляр единичного веса

$$a(x_0,x-x_0)=$$
$$=\frac{a(x_0)}{\left(\frac{a^{\frac{2}{(n+1)}}(x_0)}{2}\frac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}\Big|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)-\frac{2}{(n+1)}\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}\Big|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)+1\right)^{\frac{(n+1)}{2}}}, \tag{5.7}$$

определенный в каждой точке $M_0(x_0^r)$, согласно (5.4) и (5.6), и удовлетворяющий, в силу (5.5), условиям

$$a(x_0,x-x_0)\Big|_{x=x_0}=a(x_0),\qquad \frac{\partial a(x_0,x-x_0)}{\partial x^k}\Big|_{x=x_0}=\frac{\partial a}{\partial x^k}\Big|_{x=x_0},$$
$$\frac{\partial^2 a(x_0,x-x_0)}{\partial x^i\partial x^j}\Big|_{x=x_0}=\frac{\partial^2 a}{\partial x^i\partial x^j}\Big|_{x=x_0}, \tag{5.8}$$

называется соприкасающимся с исходным относительным скаляром (a) в точке $M_0(x_0^r)$.

В рассматриваемом локально-проективном многообразии каждой точке $M_0(x_0^r)$ соответствует гиперквадрика

$$\frac{a^{\frac{2}{(n+1)}}(x_0)}{2}\frac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}\Big|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)-\frac{2}{(n+1)}\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}\Big|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)+1=0, \tag{5.9}$$

а, следовательно, и гиперплоскость, полярная относительно этой гиперквадрики

$$-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}\Big|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)+1=0. \tag{5.10}$$

По соприкасающемуся в точке $M_0(x_0^r)$ относительному скаляру (5.7) можно построить эквиаффинную проективно-евклидову связность

$$\Gamma^i_{jk}(x_0,\ x-x_0)=\frac{1}{(n+1)}\,\delta^i_j\,\frac{\partial \ln a\,(x_0,\ x-x_0)}{\partial x^k}+\frac{1}{(n+1)}\,\delta^i_k\,\frac{\partial \ln a\,(x_0,\ x-x_0)}{\partial x^j}=$$

$$=-\frac{\delta^i_j\left(\dfrac{a^{\frac{2}{(n+1)}}(x_0)}{2}\,\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^k\,\partial x^l}\bigg|_{x=x_0}(x^l-x^l_0)-\dfrac{1}{(n+1)}\,\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^k}\bigg|_{x=x_0}\right)}{\dfrac{a^{\frac{2}{(n+1)}}(x_0)}{2}\,\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^p\,\partial x^q}\bigg|_{x=x_0}(x^p-x^p_0)(x^q-x^q_0)-\dfrac{2}{(n+1)}\,\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^p}\bigg|_{x=x_0}(x^p-x^p_0)+1}-$$

$$-\frac{\delta^i_k\left(\dfrac{a^{\frac{2}{(n+1)}}(x_0)}{2}\,\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^j\,\partial x^l}\bigg|_{x=x_0}(x^l-x^l_0)-\dfrac{1}{(n+1)}\,\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^j}\bigg|_{x=x_0}\right)}{\dfrac{a^{\frac{2}{(n+1)}}(x_0)}{2}\,\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^p\,\partial x^q}\bigg|_{x=x_0}(x^p-x^p_0)(x^q-x^q_0)-\dfrac{2}{(n+1)}\,\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^p}\bigg|_{x=x_0}(x^p-x^p_0)+1},\qquad (5.11)$$

которая, согласно теореме 33, может быть определена полярным коррелятивным соответствием относительно гиперквадрики (5.9) и является, в силу теоремы 34, связностью симметрического пространства.

Определение 29. Связность (5.11), определяемая в каждой точке $M_0(x^r_0)$ относительным скаляром (a) и удовлетворяющая, согласно (5.8), условиям

$$\Gamma^i_{jk}(x_0,\ x-x_0)\Big|_{x=x_0}=\Gamma^i_{jk}(x_0)\qquad (5.12)$$

и

$$\frac{\partial\Gamma^i_{jk}(x_0,\ x-x_0)}{\partial x^l}\bigg|_{x=x_0}=\frac{\partial\Gamma^i_{jk}(x)}{\partial x^l}\bigg|_{x=x_0},\qquad (5.13)$$

где $\Gamma^i_{jk}(x)$ задается равенством (5.1), называется связностью симметрического проективно-евклидова пространства, соприкасающегося в точке $M_0(x^r_0)$ с исходным многообразием эквиаффинной проективно-евклидовой связности.

В силу (5.13), тензор кривизны соприкасающегося проективно-евклидова пространства совпадает в точке $M_0(x^r_0)$ с тензором кривизны исходного эквиаффинного проективно-евклидова пространства.

Таким образом, эквиаффинные проективно-евклидовы пространства в окрестности каждой своей точки устроены так же, как и симметрические проективно-евклидовы пространства.

Так как пункторы и копункторы лежат теперь в самом многообразии, то операции над ними, введенные еще в § 3 главы 2 и определяемые теперь полем гиперплоскостей (5.10), также не выводят за пределы рассматриваемого многообразия, а формулы этих операций (1—6) принимают, соответственно, вид:

1. Сложение пункторов

$$(x^i_1-x^i_0)\oplus(x^i_2-x^i_0)=$$

$$=\frac{\left[-\dfrac{1}{(n+1)}\,\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^j}\bigg|_{x=x_0}(x^j_1-x^j_0)+1\right](x^i_2-x^i_0)+}{\left[-\dfrac{1}{(n+1)}\,\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^j}\bigg|_{x=x_0}(x^j_1-x^j_0)+1\right]+\left[-\dfrac{1}{(n+1)}\,\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^j}\bigg|_{x=x_0}(x^j_2-x^j_0)+1\right]-}\times$$

$$\times\frac{+\left[-\dfrac{1}{(n+1)}\,\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^j}\bigg|_{x=x_0}(x^j_2-x^j_0)+1\right](x^i_1-x^i_0)}{-\left[-\dfrac{1}{(n+1)}\,\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^j}\bigg|_{x=x_0}(x^j_1-x^j_0)+1\right]\left[-\dfrac{1}{(n+1)}\,\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^k}\bigg|_{x=x_0}(x^k_2-x^k_0)+1\right]}.\qquad (5.14)$$

2. Вычитание пункторов

$$(x_1^i - x_0^i) \ominus (x_2^i - x_0^i) =$$
$$= \frac{\left[-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\Big|_{x=x_0}(x_1^j - x_0^j)+1\right](x_2^i - x_0^i) -}{\left[-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\Big|_{x=x_0}(x_1^j - x_0^j)+1\right] - \left[-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\Big|_{x=x_0}(x_2^j - x_0^j)+1\right] -} \times$$
$$\times \frac{-\left[-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\Big|_{x=x_0}(x_2^j - x_0^j)+1\right](x_1^i - x_0^i)}{-\left[-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\Big|_{x=x_0}(x_1^j - x_0^j)+1\right]\left[-\frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}\Big|_{x=x_0}(x_2^k - x_0^k)+1\right]}. \quad (5.15)$$

3. Умножение пунктора на скаляр

$$\lambda \odot (x^i - x_0^i) = \frac{\lambda \cdot (x^i - x_0^i)}{-\frac{(1-\lambda)}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\Big|_{x=x_0}(x^j - x_0^j)+1}. \quad (5.16)$$

4. Сложение копункторов

$$u_i \oplus v_i = u_i + v_i + \frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^i}\Big|_{x=x_0}. \quad (5.17)$$

5. Вычитание копункторов

$$u_i \ominus v_i = u_i - v_i - \frac{1}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^i}\Big|_{x=x_0}. \quad (5.18)$$

6. Умножение копунктора на скаляр

$$\lambda \odot u_i = \lambda u_i - \frac{1-\lambda}{(n+1)}\frac{\partial \ln a}{\partial x^i}\Big|_{x-x_0}. \quad (5.19)$$

Хотя рассматриваемые операции определены только для пункторов и копункторов, заданных в одной и той же точке $M_0(x_0^r)$, тем не менее, составляя объект центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка, инвариантно присоединенный к исходному пространству эквиаффинной проективно-евклидовой связности,

$$\begin{cases} \Gamma_{jk}^i = -\frac{1}{2}\delta_j^i a^{\frac{2}{(n+1)}} \dfrac{\partial a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\delta_k^i a^{\frac{2}{(n+1)}} \dfrac{\partial a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^j} \\ \Gamma_{jk} = \frac{1}{2} a^{\frac{2}{(n+1)}} \dfrac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^j \partial x^k} \end{cases} \quad (5.20)$$

и выписывая формулы (3.66) и (3.67), естественно возникает возможность определить перенесения вдоль всякой гладкой кривой и распространить, таким образом, введенные операции и на тот случай, когда пункторы и копункторы заданы в разных точках.

В заключение заметим еще, что, согласно (5.8), объект центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка $\left(\Gamma_{jk}^i(x_0, x-x_0), \Gamma_{jk}(x_0, x-x_0)\right)$, инвариантно присоединенный к соприкасающейся в точке $M_0(x_0^r)$ аффинной связности симметрического проективно-евклидова пространства $\Gamma_{jk}^i(x_0, x-x_0)$, совпадает в точке $M_0(x_0^r)$ с объектом центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка (5.20), инвариантно присоединенной к исходному пространству эквиаффинной проективно-евклидовой связности.

§ 2. Пространства переменной (положительной и отрицательной) кривизны

Пусть основной относительный скаляр (a), определяющий эквиаффинное проективно-евклидово пространство в локально-проективных координатах, больше нуля.

Теорема 38. *Для того чтобы аффинная связность* (5.1) *была связностью пространства постоянной кривизны* $K \neq 0$, *достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы она была римановой* (с $R_{j,k} \neq 0$), *а это, в свою очередь, возможно тогда и только тогда, когда*

$$a(x) = \frac{c}{(c_{ij} x^i x^j + 2c_i x^i + 1)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \textit{и} \quad \det \| c_i c_j - c_{ij} \| \neq 0, \tag{5.21}$$

$$(c_{ij} = c_{ji},\ c_i,\ c - \text{const}).$$

Кроме того, при естественном требовании

$$a^2 = \det \| g_{ij} \|, \quad (g_{ij} - \textit{метрический тензор}) \tag{5.22}$$

имеет место

$$c^2 = \frac{1}{K^n} \det \| c_i c_j - c_{ij} \| \tag{5.23}$$

и, следовательно, для четного n $\det \| c_i c_j - c_{ij} \| > 0$ *и кривизна* K *определена с точностью до умножения на* (± 1), *а для нечетного* n, *при* $\det \| c_i c_j - c_{ij} \| > 0$, *кривизна* K *— положительна, а при* $\det \| c_i c_j - c_{ij} \| < 0$ *— отрицательна* [15].

Доказательство. Требование ковариантной постоянности тензора (g_{ij}) относительно связности (5.1) приводит к системе

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{1}{(n+1)} \left(g_{ik} \frac{\partial \ln a}{\partial x^j} + 2 g_{ij} \frac{\partial \ln a}{\partial x^k} + g_{kj} \frac{\partial \ln a}{\partial x^i} \right), \tag{5.24}$$

условия интегрируемости которой имеют вид:

$$g_{ik} \left(\frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^j} \frac{\partial \ln a}{\partial x^l} - \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^j \partial x^l} \right) + g_{kj} \left(\frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^i} \frac{\partial \ln a}{\partial x^l} - \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^i \partial x^l} \right) -$$
$$- g_{il} \left(\frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^j} \frac{\partial \ln a}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^j \partial x^k} \right) - g_{lj} \left(\frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^i} \frac{\partial \ln a}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^i \partial x^k} \right) = 0. \tag{5.25}$$

Отсюда, в частности, при $i = j$ имеем

$$g_{ik} \left(\frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^i} \frac{\partial \ln a}{\partial x^l} - \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^i \partial x^l} \right) = g_{il} \left(\frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^i} \frac{\partial \ln a}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^i \partial x^k} \right).$$

Теперь нетрудно видеть, что система (5.25) эквивалентна

$$\frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^i} \frac{\partial \ln a}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^i \partial x^j} = (n+1) K \cdot g_{ij}. \tag{5.26}$$

Подставляя в (5.24) значение g_{ij} из (5.26), получаем

$$\frac{\partial \ln K}{\partial x^k} \left(\frac{1}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^i} \frac{\partial \ln a}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^i \partial x^j} \right) =$$
$$= \frac{4}{(n+1)^2} \frac{\partial \ln a}{\partial x^i} \frac{\partial \ln a}{\partial x^j} \frac{\partial \ln a}{\partial x^k} - \frac{2}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^{(i}} \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^j \partial x^{k)}} + \frac{\partial^3 \ln a}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}. \tag{5.27}$$

Однако, в действительности, уравнения (5.27) могут быть записаны в более простом виде

$$\frac{\partial^3 \ln a}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} - \frac{2}{(n+1)} \frac{\partial \ln a}{\partial x^{(i}} \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^j \partial x^{k)}} + \frac{4}{(n+1)^2} \frac{\partial \ln a}{\partial x^i} \frac{\partial \ln a}{\partial x^j} \frac{\partial \ln a}{\partial x^k} = 0, \tag{5.28}$$

ибо $K=\mathrm{const}$. В самом деле, в силу (5.2) и (5.3), имеем

$$R_{l,j}=(1-n)Kg_{lj} \tag{5.29}$$

и

$$R_{lk,ij}=K(g_{li}g_{kj}-g_{lj}g_{ki}).$$

Таким образом, при $n>2$, $K=\mathrm{const}$.

Далее, при $n=2$, в силу симметрии правой части (5.27) по любой паре индексов, должны выполняться равенства

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial\ln a}{\partial x^1}\dfrac{\partial\ln a}{\partial x^1}-\dfrac{\partial^2\ln a}{(\partial x^1)^2}\right)\dfrac{\partial\ln K}{\partial x^2}-\left(\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial\ln a}{\partial x^1}\dfrac{\partial\ln a}{\partial x^2}-\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{\partial^2\ln a}{\partial x^1\partial x^2}\right)\dfrac{\partial\ln K}{\partial x^1}=0 \\ -\left(\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial\ln a}{\partial x^2}\dfrac{\partial\ln a}{\partial x^1}-\dfrac{\partial^2\ln a}{\partial x^2\partial x^1}\right)\dfrac{\partial\ln K}{\partial x^2}+\left(\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial\ln a}{\partial x^2}\dfrac{\partial\ln a}{\partial x^2}-\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{\partial^2\ln a}{(\partial x^2)^2}\right)\dfrac{\partial\ln K}{\partial x^1}=0 \end{cases}$$

и, следовательно, $K=\mathrm{const}$, ибо $\det\|R_{i,j}\|\neq 0$.

Решая теперь систему (5.28), которая может быть переписана в виде

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial\ln a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i}\dfrac{\partial\ln a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^j}a^{-\frac{2}{(n+1)}}\right)}{\partial x^k}+\frac{\partial\left(\dfrac{\partial^2\ln a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}a^{-\frac{2}{(n+1)}}\right)}{\partial x^k}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}=\tilde C_{ij},$$

где $\tilde C_{ij}=\mathrm{const}$ и $\tilde C_{ij}=\tilde C_{ji}$, получаем

$$a(x)=\frac{c}{(c_{ij}x^ix^j+2c_ix^i+1)^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{5.30}$$

Далее, из (5.29) имеем

$$\det\|R_{i,j}\|=(1-n)^nK^n\det\|g_{ij}\|$$

и, следовательно, в силу требования (5.22),

$$\det\|R_{i,j}\|=(1-n)^nK^na^2(x). \tag{5.31}$$

Но, согласно (5.3) и (5.30),

$$R^{(x)}_{k,l}=\frac{(1-n)c_{kl}}{c_{ij}x^ix^j+2c_ix^i+1}-\frac{(1-n)(c_{ik}x^i+c_k)(c_{il}x^i+c_l)}{(c_{ij}x^ix^j+2c_ix^i+1)^2}, \tag{5.32}$$

а потому, рассматривая (5.31) при $x^i=0$, получаем (5.23).

Определение 30. n-мерное локально-проективное многообразие, с заданным на нем положительным относительным скаляром (a), веса $N=1$, называется пространством переменной положительной (отрицательной) кривизны, если построенная по этому скаляру квадратичная форма

$$a^{\frac{1}{(n+1)}}\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}\xi^i\xi^j \tag{5.33}$$

положительно (отрицательно) определена.

Рассмотрим в каждой точке $M_0(x_0^r)$ n-мерного пространства переменной положительной (отрицательной) кривизны соприкасающееся симметрическое проективно-евклидово пространство.

Так как тензор Риччи этого пространства

$$R_{k,l}(x_0,\ x-x_0)=$$

$$=\frac{(1-n)\dfrac{a^{\frac{2}{(n+1)}}}{2}\Big|_{x=x_0}\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^k\,\partial x^l}\Big|_{x=x_0}}{\left(\dfrac{a^{\frac{2}{(n+1)}}}{2}\Big|_{x=x_0}\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\,\partial x^j}\Big|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)-\dfrac{2}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^i}\Big|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)+1\right.}-$$

$$-\frac{(1-n)\left(\dfrac{a^{\frac{2}{(n+1)}}}{2}\Big|_{x=x_0}\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\,\partial x^k}\Big|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)-\right.}{\left(\dfrac{a^{\frac{2}{(n+1)}}}{2}\Big|_{x=x_0}\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\,\partial x^j}\Big|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)-\right.}\times \tag{5.34}$$

$$\times\frac{\left.-\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^k}\Big|_{x=x_0}\right)\left(\dfrac{a^{\frac{2}{(n+1)}}}{2}\Big|_{x=x_0}\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^j\,\partial x^l}\Big|_{x=x_0}(x^j-x_0^j)-\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^l}\Big|_{x=x_0}\right)}{\left.-\dfrac{2}{(n+1)}\dfrac{\partial \ln a}{\partial x^i}\Big|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)+1\right)^2}$$

в каждой точке $M_0(x_0^r)$ совпадает с тензором (5.3), определитель которого

$$\det\|R_{i,j}\|=(1-n)^n a^{\frac{n}{(n+1)}}\det\left\|\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\,\partial x^j}\right\|, \tag{5.35}$$

в силу невырожденности квадратичной формы (5.33), отличен от нуля, то рассматриваемое соприкасающееся пространство является римановым и, следовательно, согласно теореме 38, пространством постоянной кривизны.

Определение 31. Кривизной n-мерного пространства переменной положительной кривизны называется скаляр

$$K(x)=a(x)^{-\frac{n+2}{n(n+1)}}\sqrt[n]{\det\left\|\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\,\partial x^j}\right\|}, \tag{5.36}$$

а переменной отрицательной кривизны, — скаляр

$$K(x)=(-1)^{(n+1)}a(x)^{-\frac{n+2}{n(n+1)}}\sqrt[n]{\det\left\|\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\,\partial x^j}\right\|}. \tag{5.37}$$

Поскольку (5.36) [(5.37)] в каждой точке $M_0(x_0^r)$ удовлетворяет соотношению

$$\det\|R_{i,j}(x_0,\ x-x_0)\|=(1-n)^n K^n(x_0)\,a^2(x_0,\ x-x_0), \tag{5.38}$$

возникающему, в силу (5.31), из (5.7) и (5.34), то кривизна пространства переменной положительной (отрицательной) кривизны определяет в этой точке кривизну соответствующего соприкасающегося пространства постоянной кривизны с положительно определенным метрическим тензором

$$g_{ij}(x_0,\ x-x_0)=\frac{1}{(1-n)}\cdot\frac{1}{K(x_0)}R_{i,j}(x_0,\ x-x_0). \tag{5.39}$$

Введем теперь в рассмотрение тензор

$$g_{ij}(x)=\frac{1}{(1-n)}\cdot\frac{1}{K(x)}R_{i,j}(x)=\frac{a^{\frac{1}{(n+1)}}(x)}{K(x)}\cdot\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}(x)}{\partial x^i\,\partial x^j}, \tag{5.40}$$

значение которого в каждой точке $M_0(x_0^r)$ совпадает со значением метрического тензора (5.39) соответствующего соприкасающегося пространства.

Тензор (5.40), вообще говоря, не является ковариантно постоянным в связности (5.1), но обладает в этой связности ковариантно постоянным определителем

$$a^2 = \det \| g_{ij} \| .$$

В силу (5.2), (5.3) и (5.40), кривизна (5.36) [(5.37)] может быть представлена в виде

$$K(x) = \frac{g_{ih}(x)\, R^h_{j,\,kl}(x)}{g_{ik}(x)\, g_{jl}(x) - g_{il}(x)\, g_{jk}(x)} \tag{5.41}$$

и, следовательно, сохраняет тот же геометрический смысл, что и кривизна в пространстве постоянной кривизны, то-есть может быть определена, как кривизна в двумерном направлении, не зависящая от этого направления (но существенно зависящая от той точки, в которой она рассматривается).

Для пространств переменной отрицательной кривизны в каждой точке $M_0(x_0^r)$ можно определить длину пунктора $(x^i - x_0^i)$ и косинус угла между пункторами $(x_1^i - x_0^i)$ и $(x_2^i - x_0^i)$ с помощью формул

$$\lambda(x^i - x_0^i) =$$

$$= \frac{R(x_0)}{2} \ln \frac{-\frac{1}{(n+1)} \left.\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} (x^k - x_0^k) + 1 + \sqrt{\frac{R_{k,\,l}(x_0)}{(n-1)} (x^k - x_0^k)(x^l - x_0^l)}}{-\frac{1}{(n+1)} \left.\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} (x^k - x_0^k) + 1 - \sqrt{\frac{R_{k,\,l}(x_0)}{(n-1)} (x^k - x_0^k)(x^l - x_0^l)}}, \tag{5.42}$$

где $R(x_0)$ — положительный скаляр, определенный из условия

$$-\frac{1}{R^2(x_0)} = K(x_0), \tag{5.43}$$

и

$$\cos [(x_1^i - x_0^i), \widehat{\ } (x_2^i - x_0^i)] =$$

$$= \frac{\frac{R_{k,\,l}}{(n-1)} (x_1^k - x_0^k)(x_2^l - x_0^l)}{\sqrt{\frac{R_{k,\,l}(x_0)}{(n-1)} (x_1^k - x_0^k)(x_1^l - x_0^l)} \cdot \sqrt{\frac{R_{k,\,l}(x_0)}{(n-1)} (x_2^k - x_0^k)(x_2^l - x_0^l)}}, \tag{5.44}$$

соответствующих (4.3) и (4.4), а также ввести для каждого пунктора $(x^i - x_0^i)$ угол параллельности, исходя из формулы

$$\operatorname{tg} \frac{\Pi[\lambda(x^i - x_0^i)]}{2} = e^{-\frac{\lambda(x^i - x_0^i)}{R(x_0)}}. \tag{5.45}$$

Однако, угол $\Pi[\lambda(x^i - x_0^i)]$ будет зависеть теперь не только от длины пунктора (как это имело место в пространстве Лобачевского), но и от точки $M_0(x_0^r)$, в которой этот пунктор рассматривается.

В § 5 главы 2 было показано, что, какова бы ни была точка $M_0(x_0^r)$, всегда можно, путем надлежащих дробно-линейных преобразований, перейти к такой системе координат, в которой

$$\frac{1}{(n+1)} \delta_j^i \left.\frac{\partial \ln a}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} + \frac{1}{(n+1)} \delta_k^i \left.\frac{\partial \ln a}{\partial x^j}\right|_{x=x_0} = 0$$

и, следовательно,

$$\left.\frac{\partial a}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} = 0, \tag{5.46}$$

то-есть, в которой точка $M_0(x_0^r)$ будет стационарной для исходного относительного скаляра (a).

Теорема 39. *Какова бы ни была точка $M_0(x_0^r)$ пространства переменной положительной (отрицательной) кривизны, всегда можно, путем надлежащих дробно-линейных преобразований, перейти к такой системе координат, в которой основной относительный скаляр (a) достигает максимума (минимума) в этой точке.*

Доказательство. Перейдем к такой локально-проективной системе координат, в которой имеет место (5.46), тогда разложение (a) в точке $M_0(x_0^r)$ в ряд Тейлора примет вид

$$a(x)=a(x_0)+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 a}{\partial x^i\partial x^j}\right|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)+\ldots,$$

но, в силу тождества

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^i\partial x^j}\equiv\frac{n+2}{(n+1)}\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x^i}\frac{\partial a}{\partial x^j}-(n+1)\,a^{\frac{n+2}{(n+1)}}\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j},$$

в точке $M_0(x_0^r)$

$$\left.\frac{\partial^2 a}{\partial x^i\partial x^j}\right|_{x=x_0}=-(n+1)\,a(x_0)\cdot a^{\frac{1}{(n+1)}}(x_0)\left.\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}\right|_{x=x_0},$$

а следовательно, при $(a>0)$, из положительной (отрицательной) определенности формы (5.33) следует

$$a(x)-a(x_0)<0\ \ [a(x)-a(x_0)>0].$$

Покажем еще, что в каждой точке $M_0(x_0^r)$ пространства переменной положительной (отрицательной) кривизны всегда можно перейти к такой локально-проективной системе координат, в которой метрический тензор соприкасающегося пространства постоянной положительной (отрицательной) кривизны (5.39) примет канонический вид.

В самом деле, путем надлежащих дробно-линейных преобразований всегда можно перейти к такой системе координат, в которой имеет место (5.46), а следовательно, в силу тождества

$$\frac{1}{2}a^{\frac{2}{(n+1)}}\frac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}\equiv\frac{1}{(n+1)^2}\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}\frac{\partial\ln a}{\partial x^j}+a^{\frac{1}{(n+1)}}\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j},\tag{5.47}$$

тензор (5.34) принимает вид

$$\frac{(1-n)\,a^{\frac{1}{(n+1)}}(x_0)\left.\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^k\partial x^l}\right|_{x=x_0}}{a^{\frac{1}{(n+1)}}(x_0)\left.\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}\right|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)+1}-$$

$$-\frac{(1-n)\,a^{\frac{1}{(n+1)}}(x_0)\left.\dfrac{\partial^2 x^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^k}\right|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)\,a^{\frac{1}{(n+1)}}(x_0)\left.\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^j\partial x^l}\right|_{x=x_0}(x^j-x_0^j)}{\left(a^{\frac{1}{(n+1)}}(x_0)\left.\dfrac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}\right|_{x=x_0}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)+1\right)^2}.\tag{5.48}$$

Далее, в силу положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы (5.33), величины

$$a^{\frac{1}{(n+1)}}(x_0)\left.\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}\right|_{x=x_0}$$

могуть быть приведены, путем надлежащих линейных преобразований, к виду $\delta_{ij}[-\delta_{ij}]$ и, следовательно, тензор (5.39), при $K(x_0)>0$, примет вид

$$g_{kl}(x_0,\ x-x_0)=\frac{1}{K(x_0)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i-x_0^i)^2+1\right)}\left[\delta_{kl}-\frac{(x^k-x_0^k)(x^l-x_0^l)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i-x_0^i)^2+1}\right], \quad (5.49)$$

а, при $K(x_0)<0$, — вид

$$g_{kl}(x_0,\ x-x_0)=\frac{-1}{K(x_0)\left(-\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i-x_0^i)^2+1\right)}\left[\delta_{kl}+\frac{(x^k-x_0^k)(x^l-x_0^l)}{-\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i-x_0^i)^2+1}\right]. \quad (5.50)$$

В пространстве переменной положительной (отрицательной) кривизны, наряду с (5.20), целесообразно рассматривать центро-проективную связность дифференциальной окрестности третьего порядка, определяющую такие центро-проективные перенесения пункторов из точки $M_0(x_0^r)$ в точку $M_1(x_1^r)$, при которых гиперквадрика (5.9), соответствующая точке $M_0(x_0^r)$, переходит в гиперквадрику

$$\frac{a^{\frac{2}{(n+1)}}(x_1)}{2}\,\frac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}\Bigg|_{x=x_1}(x^i-x_1^i)(x^j-x_1^j)-\frac{2}{(n+1)}\,\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}\Bigg|_{x=x_1}(x^i-x_1^i)+1=0,$$

соответствующую точке $M_1(x_1^r)$.

Среди таких перенесений, определяемых, согласно теореме 30, объектом (3.35), при условии

$$a_i=-\frac{1}{(n+1)}\,\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}\quad\text{и}\quad g_{ij}=-a^{\frac{1}{(n+1)}}\,\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j},$$

особое место занимают перенесения, для которых тензор $D_{ijk}=0$ и, следовательно, объект (3.35) симметричен по своим нижним индексам.

Эти перенесения, согласно (4.5) и (4.6), определяются формулами

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=-u^k\,\tilde{\Gamma}^i_{kj}+u^i u^k\,\tilde{\Gamma}_{kj} \quad (5.51)$$

и

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^j}=u_k\,\tilde{\Gamma}^k_{ij}+\tilde{\Gamma}_{ij}, \quad (5.52)$$

в которых $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ — риманова связность, построенная по тензору

$$-a^{\frac{1}{(n+1)}}\,\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j},$$

а компоненты

$$\tilde{\Gamma}_{ij}=-\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial^2\ln a}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial\ln a}{\partial x^k}\,\tilde{\Gamma}^k_{ij}\right)=-\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\partial\tilde{\Gamma}^l_{li}}{\partial x^j}-\tilde{\Gamma}^l_{lk}\,\tilde{\Gamma}^k_{ij}\right)+\tilde{C}_{ij}, \quad (5.53)$$

где тензор

$$\tilde{C}_{ij}=\frac{\partial\left[\frac{1}{(n+1)}\left(\tilde{\Gamma}^l_{li}-\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}\right)\right]}{\partial x^j}-\frac{1}{(n+1)}\left(\tilde{\Gamma}^l_{lk}-\frac{\partial\ln a}{\partial x^k}\right)\tilde{\Gamma}^k_{ij}=$$

$$=\frac{n}{2(n+1)}\left(\frac{\partial^2\ln|K(x)|}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial\ln|K(x)|}{\partial x^l}\,\tilde{\Gamma}^l_{ij}\right), \quad (5.54)$$

то-есть пропорционален ковариантной производной от $\operatorname{grad}\ln|K(x)|$ в связности $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$.

§ 3. Симметрические проективно-евклидовы пространства

Если основной относительный скаляр

$$a(x)=\frac{c}{(c_{ij}x^i x^j+2c_i x^i+1)^{\frac{(n+1)}{2}}}, \tag{5.55}$$

где $c_{ij}=c_{ji}$, c_i, $c\neq 0-\text{const}$, то связность (5.1) принимает вид

$$\Gamma^i_{jk}(x)=-\frac{\delta^i_j(c_{lk}x^l+c_k)+\delta^i_k(c_{lj}x^l+c_j)}{c_{ij}x^i x^j+2c_i x^i+1} \tag{5.56}$$

и, следовательно, согласно теореме 34, определит симметрическое проективно-евклидово пространство, которое при

$$\det\|c_i c_j-c_{ij}\|\neq 0 \tag{5.57}$$

станет, согласно теореме 38, пространством постоянной кривизны K, определяемой при естественном требовании (5.22), соотношением (5.23).

Теорема 40. *Если основной относительный скаляр* $a(x)$ *определяет в локально-проективном многообразии связность симметрического проективно-евклидова пространства, то-есть имеет место* (5.55), *то поле гиперквадрик* (5.9) *вырождается в одну гиперквадрику*

$$c_{ij}x^i x^j+2c_i x^i+1=0 \tag{5.58}$$

и, следовательно, все связности (5.11) *совпадают с* (5.56).

Доказательство. Внося в левую часть уравнения (5.9) значение из (5.55), имеем

$$\frac{c_{kl}}{(c_{ij}x^i_0 x^j_0+2c_i x^i_0+1)}(x^k-x^k_0)(x^l-x^l_0)+\frac{2(c_{kl}x^k_0+c_l)}{(c_{ij}x^i_0 x^j_0+2c_i x^i_0+1)}(x^l-x^l_0)+1=$$
$$=\frac{c_{ij}x^i x^j+2c_i x^i+1}{(c_{kl}x^k_0 x^l_0+2c_k x^k_0+1)}.$$

Таким образом, какова бы ни была точка $M_0(x^r_0)$, уравнение соответствующей гиперквадрики (5.9) совпадает с уравнением (5.58).

Гиперплоскость (5.10), полярная точке $M_0(x^r_0)$ относительно гиперквадрики (5.9), становится теперь полярной гиперплоскостью относительно гиперкрадрики (5.58)

$$c_i(x_0)(x^i-x^i_0)+1=0, \tag{5.59}$$

где

$$c_i(x_0)=\frac{c_{ij}x^j_0+c_i}{c_{kl}x^k_0 x^l_0+2c_k x^k_0+1}, \tag{5.60}$$

а следовательно, формулы для операций над пункторами и копункторами (5.14)–(5.19) принимают вид:

1. *Сложение пункторов:*

$$(x^i_1-x^i_0)\oplus(x^i_2-x^i_0)=$$
$$=\frac{[c_j(x_0)(x^j_1-x^j_0)+1](x^i_2-x^i_0)+[c_j(x_0)(x^j_2-x^j_0)+1](x^i_1-x^i_0)}{[c_j(x_0)(x^j_1-x^j_0)+1]+[c_j(x_0)(x^j_2-x^j_0)+1]-[c_j(x_0)(x^j_1-x^j_0)+1][c_j(x_0)(x^j_2-x^j_0)+1]}. \tag{5.61}$$

2. *Вычитание пункторов:*

$$(x^i_1-x^i_0)\ominus(x^i_2-x^i_0)=$$
$$=\frac{[c_j(x_0)(x^j_1-x^j_0)+1](x^i_2-x^i_0)-[c_j(x_0)(x^j_2-x^j_0)+1](x^i_1-x^i_0)}{[c_j(x_0)(x^j_1-x^j_0)+1]-[c_j(x_0)(x^j_2-x^j_0)+1]-[c_j(x_0)(x^j_1-x^j_0)+1][c_j(x_0)(x^j_2-x^j_0)+1]}. \tag{5.62}$$

3. Умножение пунктора на скаляр

$$\lambda\odot(x^i-x_0^i)=\frac{\lambda(x^i-x_0^i)}{(1-\lambda)\,c_j(x_0)(x^j-x_0^j)+1}. \tag{5.63}$$

4. Сложение копункторов

$$u_i\oplus v_i=u_i+v_i=c_i(x_0). \tag{5.64}$$

5. Вычитание копункторов

$$u_i\ominus v_i=u_i-v_i+c_i(x_0). \tag{5.65}$$

6. Умножение копунктора на скаляр

$$\lambda\odot u_i=\lambda\cdot u_i+(1-\lambda)\,c_i(x_0). \tag{5.66}$$

Внося (5.55) в (5.20), получаем объект центро-проективной связности дифференциальной окрестности третьего порядка в виде

$$\begin{cases}\Gamma^i_{jk}=-\dfrac{\delta^i_j(c_{lk}x^l+c_k)+\delta^i_k(c_{lj}x^l+c_j)}{c_{ij}x^ix^j+2c_ix^i+1}\\[2ex] \Gamma_{jk}=\dfrac{c_{jk}}{c_{ij}x^ix^j+2c_ix^i+1}.\end{cases} \tag{5.67}$$

Далее, если основной относительный скаляр (5.55) удовлетворяет условию (5.57), то при любом выборе точки $M_0(x_0^r)$ тензор (5.39) совпадает с тензором (5.40), а перенесения [16]

$$\frac{\partial u^q}{\partial x^k}=\frac{u^j\left[\delta^q_j(c_{lk}x^l+c_k)+\delta^q_k(c_{lj}x^l+c_j)+c_{jk}u^q\right]}{c_{il}x^ix^l+2c_ix^i+1} \tag{5.68}$$

и

$$\frac{\partial u_j}{\partial x^k}=\frac{-u_j(c_{kl}x^l+c_k)-u_k(c_{jl}x^l+c_j)+c_{jk}}{c_{il}x^ix^l+2c_ix^i+1}, \tag{5.69}$$

определяемые объектом (5.67), совпадают с перенесениями (5.51) и (5.52).

Заметим еще, что, в силу совпадения (5.39) и (5.40), длина (5.42) пунктора $(x^i-x_0^i)$ должна совпадать теперь с длиной

$$l(M_0,\ M_1)=\int_0^1\sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dx^j}{dt}}\,dt \tag{5.70}$$

соответствующего отрезка геодезической

$$x^i=x_0^i+t\,(x^i-x_0^i), \tag{5.71}$$

измеренного в метрике (5.40).

Определение 32. Поступательным движением симметрического проективно-евклидова пространства из точки $M_0(x_0^r)$ вдоль кривой

$$x^i=x^i(t)-x^i(0)+x_0^i \tag{5.72}$$

называется преобразование

$$\tilde{x}^i=u^i(x^r-x_0^r,\ t)+x^i(t), \tag{5.73}$$

где $u^i=u^i(x^r-x_0^r,\ t)$ — решение системы (5.68) вдоль кривой (5.72), удовлетворяющее условию

$$t=0\Big|_{u^i=x^i-x_0^i}. \tag{5.74}$$

Проективно-метрические перенесения, определяемые теоремой 30, являются обобщением поступательных движений пространств постоянной кривизны, подобно тому как метрические перенесения являются обобщением поступательных движений евклидова пространства.

Для определения поступательных движений пространств постоянной кривизны, рассматриваемых в канонических координатах, из (5.68) получаем системы:

$$\frac{\partial u^q}{\partial x^k}=\frac{u^q(x^k+u^k)+\delta^q_k\sum\limits_{i=1}^{n}x^i u^i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i)^2+1}, \tag{5.75}$$

для $K>0$ (пространство Римана), и

$$\frac{\partial u^q}{\partial x^k}=\frac{u^q(x^k+u^k)+\delta^q_k\sum\limits_{i=1}^{n}x^i u^i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i)^2-1}, \tag{5.76}$$

для $K<0$ (пространство Лобачевского).

Пусть тензор Риччи

$$R_{i,j}=(1-n)a^{\frac{1}{(n+1)}}\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}=0, \tag{5.77}$$

тогда, согласно (5.2), обращается в нуль и тензор кривизны. Далее, поле гиперквадрик (5.9) вырождается, в силу тождества

$$\frac{1}{2}a^{\frac{2}{(n+1)}}\frac{\partial^2 a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j}=\frac{1}{(n+1)^2}\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}\frac{\partial\ln a}{\partial x^j}+a^{\frac{1}{(n+1)}}\frac{\partial^2 a^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^i\partial x^j},$$

в поле сдвоенных гиперплоскостей (5.10). Однако, из (5.77) имеем

$$a=\frac{c}{(c_i x^i+1)^{(n+1)}} \tag{5.78}$$

и, следовательно, внося (5.78) в левую часть (5.10), получаем

$$\frac{c_k}{(c_i x^i_0+1)}(x^k-x^k_0)+1=\frac{c_k x^k+1}{c_k x^k_0+1},$$

то-есть все гиперплоскости (5.10) $\Big($при любом выборе точки $M_0(x^r_0)\Big)$ совпадают с гиперплоскостью

$$c_k x^k+1=0. \tag{5.79}$$

Заметим еще, что формула (5.55), определяющая относительный скаляр симметрического проективно-евклидова пространства, при условии

$$c_{ij}=c_i\cdot c_j, \tag{5.80}$$

совпадает с (5.78) и потому будет определять относительный скаляр плоского пространства.

Если, наконец, перейти к аффинным координатам, совершая дробно-линейное преобразование, переводящее гиперплоскость (5.79) в бесконечно удаленную, то пункторы и копункторы можно будет рассматривать, как векторы и ковекторы, а операции (5.61)—(5.66),—как обычные операции (сложение, вычитание и умножение на скаляр) с векторами и ковекторами.

§ 4. Геодезические линии. Уравнения инфинитезимальных аффинных коллинеаций и движений эквиаффинных проективно-евклидовых пространств

Теорема 41. *Если пространство эквиаффинной проективно-евклидовой связности рассматривается в локально-проективных координатах* [Γ^i_{jk} *задана в форме* (5.1)], *то решение системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{d^2 x^i}{d\sigma^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\sigma}\frac{dx^k}{d\sigma}=0, \tag{5.81}$$

определяющей геодезические линии, отнесенные к каноническому параметру (σ), *имеет вид*

$$x^i=l^i\Phi(\sigma)+x^i_0, \tag{5.82}$$

где l^i, x^i_0 — const, *а функция* Φ *находится из условия*

$$\int a^{\frac{2}{(n+1)}}\left(l^1\Phi(\sigma)+x^1_0,\ \ l^2\Phi+x^2_0,\ \ \ldots,\ \ l^n\Phi+x^n_0\right)d\Phi=\sigma. \tag{5.83}$$

Доказательство. Внося в (5.81) значение Γ^i_{jk} из (5.1), получаем

$$\frac{d^2 x^i}{d\sigma^2}=\frac{d\ln a^{-\frac{2}{(n+1)}}}{d\sigma}\,\frac{dx^i}{d\sigma}$$

или

$$\frac{dx^i}{d\sigma}=l^i a^{-\frac{2}{(n+1)}}(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n), \tag{5.84}$$

где $l^i=\text{const}$, не равные нулю одновременно.

Согласно (5.84), $l^i dx^j=l^j dx^i$ и, следовательно,

$$l^i(x^j-x^j_0)-l^j(x^i-x^i_0),$$

то-есть

$$\frac{x^1-x^1_0}{l^1}=\frac{x^2-x^2_0}{l^2}=\ldots=\frac{x^n-x^n_0}{l^n}=\Phi \tag{5.85}$$

(если $l^k=0$, то $x^k=x^k_0$).

Подставляя в (5.84) значение $x^i=l^i\Phi+x^i_0$, найденное из (5.85), и, сокращая на l^i, будем иметь

$$\frac{d\Phi}{d\sigma}=a^{-\frac{2}{(n+1)}}\left(l^1\Phi+x^1_0,\ \ l^2\Phi+x^2_0,\ \ \ldots,\ \ l^n\Phi+x^n_0),\right), \tag{5.86}$$

а отсюда и (5.83).

Теорема 42. *Для того чтобы векторное поле*

$$\xi^i(x)=\alpha^i+\alpha^i_j x^j+\alpha_j x^j x^i, \tag{5.87}$$

наиболее общего инфинитезимального преобразования локально-проективного многообразия, определяло инфинитезимальную аффинную коллинеацию относительно связности (5.1) (*то-есть коллинеацию, отображающую инфинитезимально каждую геодезическую* (5.82) *снова в геодезическую, при дополнительном условии аффинного преобразования параметра* σ), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\alpha^i+\alpha^i_j x^j+\alpha_j x^j x^i)\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}+(n+1)(\alpha_j x^j+\alpha)=0, \tag{5.88}$$

где

$$\alpha=\alpha(\alpha^k,\ \alpha^k_l,\ \alpha_l).$$

Доказательство. Приравнивая нулю производную Ли коэффициентов аффинной связности (5.1) относительно векторного поля (5.87), имеем

$$L(\Gamma^i_{jk}) \equiv \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} + \xi^l \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \Gamma^l_{jk} + \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \Gamma^i_{lk} + \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} \Gamma^i_{jl} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{1}{(n+1)} \delta^i_j \xi^l \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{1}{(n+1)} \delta^i_k \xi^l \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^j \partial x^l} +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)} \delta^i_j \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} \frac{\partial \ln a}{\partial x^l} + \frac{1}{(n+1)} \delta^i_k \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \frac{\partial \ln a}{\partial x^l} = 0. \tag{5.89}$$

Далее, очевидно, система (5.89) может быть переписана в виде

$$(n+1) \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} + \delta^i_j \frac{\delta\left(\xi^l \frac{\partial \ln a}{\partial x^l}\right)}{\partial x^k} + \delta^i_k \frac{\partial\left(\xi^l \frac{\partial \ln a}{\partial x^l}\right)}{\partial x^j} = 0$$

и, следовательно, в силу (5.87), эквивалентна системе

$$\delta^i_j \frac{\partial\left(\xi^l \frac{\partial \ln a}{\partial x^l} + (n+1)\alpha_l x^l\right)}{\partial x^k} + \delta^i_k \frac{\delta\left(\xi^l \frac{\partial \ln a}{\partial x^l} + (n+1)\alpha_l x^l\right)}{\partial x^j} = 0,$$

которая, в свою очередь, равносильна

$$\frac{\partial\left(\xi^l \frac{\partial \ln a}{\partial x^l} + (n+1)\alpha_j x^j\right)}{\partial x^k} = 0,$$

а следовательно, и (5.88).

Уравнение (5.88) позволяет, в частности, определить инфинитезимальные аффинные коллинеации симметрических проективно-евклидовых пространств.

Действительно, при переходе к каноническим координатам, в которых гиперквадрика (5.58) принимает вид

$$c_{st} x^s x^t + 1 = 0, \tag{5.90}$$

где $s,\ t = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \leqslant n,\ c_{st} = \varepsilon_s \delta_{st},\ \varepsilon_s^2 = 1$, уравнение (5.88) дает

$$-(\alpha^r + \alpha^r_j x^j + \alpha_j x^j x^r) \frac{c_{sr} x^s}{c_{st} x^s x^t + 1} + \alpha_j x^j + \alpha = 0,$$

где $r,\ s,\ t = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \leqslant n,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, или

$$\left(\alpha c_{st} - \frac{1}{2} c_{sr} \alpha^r_t - \frac{1}{2} c_{tr} \alpha^r_s\right) x^s x^t - c_{sr} \alpha^r_p x^s x^p + (\alpha_s - c_{sr} \alpha^r) x^s + \alpha_p x^p + \alpha = 0,$$

где $r,\ s,\ t = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ p = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n$.

Таким образом, $\alpha = 0$, а

$$\left\{\begin{array}{ll} \varepsilon_s \alpha^s_t + \varepsilon_t \alpha^t_s = 0 & \\ \alpha_s - \varepsilon_s \alpha^s = 0 & (\text{по } s \text{ и } t \text{ суммирования нет!}) \\ \alpha_p = 0 & s,\ t = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \leqslant n, \\ \alpha^s_p = 0 & p = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n. \end{array}\right. \tag{5.91}$$

Соотношения (5.91), определяющие инфинитезимальные аффинные коллинеации симметрических проективно-евклидовых пространств, были ранее получены П. А. Широковым и опубликованы в статье [26], где дополнительно показано совпадение условий (5.91) с теми условиями на (5.87), которые вытекают из требования инвариантности абсолюта (5.90) относительно соответствующих (5.87) проективных преобразований.

Заметим, однако, что вывод (5.91), предложенный П. А. Широковым, опирается на довольно громоздкие выкладки, тогда как предложенный выше вывод сравнительно прост.

Определение 33. Инфинитезимальное преобразование

$$\tilde{x}^i = x^i + \xi^i \delta t, \tag{5.92}$$

где $\xi^i = \alpha^i + \alpha^i_j x^j + \alpha_j x^j x^i$, а α^i, α^i_j, α^i_j, α_j — const, называется инфинитезимальной эквиаффинной коллинеацией или инфинитезимальным движением локально-проективного многообразия со связностью (5.1), если производная Ли основного относительного скаляра $a(x)$, взятая относительно (5.92), обращается в нуль.

Теорема 43. *Инфинитезимальные движения локально-проективного многообразия со связностью* (5.1) *являются его инфинитезимальными аффинными коллинеациями.*

Доказательство. Исходя из общего определения производной Ли $L\Omega$ геометрического объекта Ω относительно векторного поля ξ^i [28], со гласно которому

$$\Omega(\tilde{x}) - \tilde{\Omega}(\tilde{x}) \cong (L\Omega)\delta t,$$

где величины $\tilde{\Omega}(\tilde{x})$ являются компонентами геометрического объекта Ω в координатной системе $(\tilde{x}^i)$, определяемой в рассматриваемом случае преобразованиями (5.92), имеем

$$La(x) = \frac{\partial a}{\partial x^k} \xi^k + a \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k}.$$

Таким образом, требование $La(x) = 0$ оказывается равносильным условию

$$\operatorname{div}(\xi^k) \equiv \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} + \xi^i \frac{\partial \ln a}{\partial x^i} = 0 \tag{5.93}$$

или

$$(\alpha^i + \alpha^i_j x^j + \alpha_j x^j x^i) \frac{\partial \ln a}{dx^i} + (n+1)\left[\alpha_j x^j + \frac{\alpha^i_i}{(n+1)}\right] = 0 \tag{5.94}$$

и для доказательства теоремы остается только заметить, что при

$$\alpha = \frac{\alpha^i_i}{(n+1)} \tag{5.95}$$

соотношение (5.88) совпадает с (5.94).

В частности, инфинитезимальные движения симметрических проективно-евклидовых пространств выделяются из инфинитезимальных аффинных коллинеаций этих пространств, определяемых условиями (5.91), дополнительным требованием

$$\alpha^{m+1}_{m+1} + \alpha^{m+2}_{m+2} + \ldots + \alpha^n_n = 0, \tag{5.96}$$

а, следовательно, для пространств постоянной кривизны инфинитезимальные движения и инфинитезимальные аффинные коллинеации просто совпадают.

Здесь целесообразно отметить, что движения и аффинные коллинеации всегда совпадают в компактных и ориентируемых римановых многообразиях [37], [28].

Среди локально-проективных многообразий со связностью (5.1) особое место занимают пространства, движения которых, в надлежащим образом подобранных координатах, определяются преобразованиями вида

$$x^{i'} = \frac{x^i}{b_j x^j + 1}. \tag{5.97}$$

Так как для (5.97) вектор (5.87) принимает вид

$$\xi^i(x) = \alpha_j x^j x^i,$$

а, следовательно, уравнение (5.94) дает

$$\alpha_j x^j x^i \frac{\partial \ln a}{\partial x^i} + (n+1)\alpha_j x^j = 0$$

или

$$\frac{\partial a}{\partial x^i} x^i = -(n+1)a,$$

то основной относительный скаляр рассматриваемых пространств определяется в указанных выше координатах просто произвольной функцией $-(n+ +1)$-ой степени однородности.

Решение общей задачи определения всех относительных скаляров $a(x)$, для которых связности (5.1) допускают данное инфинитезимальное преобразование

$$\tilde{x}^i = x^i + (\alpha^i + \alpha^i_j x^j + \alpha_j x^j x^i)\,\delta t,$$

где α^i, α^i_j, α_j — const, в качестве инфинитезимальной аффинной коллинеации или инфинитезимального движения, может быть сведено, как показывает следующая ниже теорема, к решению (выражающемуся в квадратурах) вполне определенной системы Коши.

Теорема 44. *Если уравнение* (5.88) *существенно содержит производную* $\frac{\partial \ln a}{\partial x^m}$, *то его общее решение может быть определено формулой*

$$a = \Psi\left\{x^m,\ \Phi^{t^{-1}}(x^i),\quad \varphi\left[\Phi^{s^{-1}}(x^i)\right]\right\}, \tag{5.98}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ s,\ t = 1,\ \ldots,\ m-1,\ m+1,\ \ldots,\ n)$$

в которой функции $\Phi^{t^{-1}}$ *таковы, что*

$$x^t = \Phi^t(x^m,\ x_0^s) \tag{5.99}$$

является решением системы

$$\frac{dx^t}{dx^m} = \frac{\alpha^t + \alpha^t_i x^i + \alpha_i x^i x^t}{\alpha^m + \alpha^m_i x^i + \alpha_i x^i x^m} \tag{5.100}$$

при наиболее общих начальных условиях

$$x^t\Big|_{x^m = x_0^m} = x_0^t, \tag{5.101}$$

а функция Ψ *такова, что*

$$a = \Psi\left[x^m,\ x_0^t,\ \varphi(x_0^s)\right] \tag{5.102}$$

является решением уравнения

$$\frac{da}{dx^m} = \frac{-[(n+1)\alpha + (n+1)\alpha_m x^m + (n+1)\alpha_t \Phi^t(x^m,\ x_0^s)]\,a}{\alpha^m + \alpha^m_m x^m + \alpha^m_t \Phi^t(x^m,\ x_0^s) + \alpha_m (x^m)^2 + \alpha_t \Phi^t(x^m,\ x_0^s)\,x^m} \tag{5.103}$$

при начальном условии

$$a\Big|_{x^m = x_0^m} = \varphi(x_0^t) \tag{5.104}$$

определяемом произвольной функцией φ.

Доказательство. Воспользуемся методом характеристик Коши [23]. Перепишем уравнение (5.88) в виде

$$p_m + H(x^i,\ p_j,\ a) = 0, \tag{5.105}$$

где

$$H(x^i,\ p_j,\ a) = \frac{(n+1)(\alpha_j x^j + \alpha)\, a + (\alpha^t + \alpha_j^t x^j + \alpha_j x^j x^t)\, p_t}{\alpha^m + \alpha_j^m x^j + \alpha_j x^j x^m}, \tag{5.106}$$

а

$$p_i = \frac{\partial a}{\partial x^i} \tag{5.107}$$

и будем разыскивать такие интегральные поверхности уравнения Пфаффа

$$da - p_i\, dx^i = 0, \tag{5.108}$$

которые отнесены к параметрам $(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n)$ и лежат на поверхности (5.105), расположенной в $(2n+1)$-мерном пространстве переменных $(x^i\ p_j,\ a)$.

Дифференциальные уравнения характеристик (5.108) на поверхности (5.105) примут вид

$$\frac{dx^1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx^{m-1}}{\frac{\partial H}{\partial p_{m-1}}} = dx^m = \frac{dx^{m+1}}{\frac{\partial H}{\partial p_{m+1}}} = \ldots = \frac{dx^n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} =$$

$$= -\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1} + p^1 \frac{\partial H}{\partial a}} = \ldots = -\frac{dp_m}{\frac{\partial H}{\partial x^m} + p_m \frac{\partial H}{\partial a}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x^n} + p_n \frac{\partial H}{\partial a}} =$$

$$= \frac{da}{\frac{\partial H}{\partial p_1} p_1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_{m-1}} p_{m-1} + p_m + \frac{\partial H}{\partial p_{m+1}} p_{m+1} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_n} p_n}. \tag{5.109}$$

Так как уравнения (5.109) рассматриваются на поверхности (5.105), то в них можно заменить p_m на $-H$, в результате чего уравнения будут связывать лишь переменные

$$x^1,\ \ldots,\ x^n,\ p_1,\ \ldots,\ p_{m-1},\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_n,\ a$$

(к которым поверхность (5.105) отнесена как к параметрам).

Член, содержащий в числителе dp_m, можно совсем вычеркнуть из (5.109), так как его равенство другим членам будет (после замены p_m на $-H$) простым следствием оставшейся системы.

Теперь систему (5.109) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx^t}{dx^m} = \dfrac{\partial H}{\partial p_t} & (5.110) \\[2mm] \dfrac{dp_t}{dx^m} = -\dfrac{\partial H}{dx^t} - p_t \dfrac{\partial H}{\partial a} & (5.111) \\[2mm] \dfrac{da}{dx^m} = -H + \dfrac{\partial H}{\partial p_1} p_1 + \ldots + \dfrac{\partial H}{\partial p_{m-1}} p_{m-1} + \dfrac{\partial H}{\partial p_{m+1}} p_{m+1} + \ldots + \dfrac{\partial H}{\partial p_n} p_n. & (5.112) \end{cases}$$

Система (5.110) может быть проинтегрирована самостоятельно, так как она не содержит p_t и a, ибо принимает, согласно (5.106), вид (5.100).

Аналогично, система (5.112) не зависит от p_i, ибо принимает, в силу того же (5.106), вид

$$\frac{da}{dx^m}=\frac{-(n+1)(\alpha+\alpha_j x^j)\,a}{\alpha^m+\alpha_j^m x^j+\alpha_j x^j x^m}. \tag{5.113}$$

Внося в (5.113) вместо (x^t) решение (5.99) системы (5.100) при начальных условиях (5.101), получаем систему (5.103), решение которой при начальном условии (5.104) имеет вид (5.102).

Разрешая теперь (5.99) относительно (x_0^s) и внося в (5.102), получаем (5.98).

Локально-проективное многообразие со связностью (5.1), определенной по относительному скаляру $a(x)$, найденному, согласно доказанной выше теореме, при произвольном $\alpha=\alpha(\alpha^i,\ \alpha_j^i,\ \alpha_j)$, будет допускать данное инфинитезимальное преобразование в качестве инфинитезимальной аффинной коллинеации, а при $\alpha=\dfrac{\alpha_i^i}{(n+1)}$ — в качестве инфинитезимального движения.

В заключение приведем простейший пример, иллюстрирующий применение теоремы 44. А именно, определим все относительные скаляры $a(x)$, для которых связность (5.1) допускает инфинитезимальное преобразование

$$\tilde{x}^i=x^i+\alpha_j x^j x^i\,\delta t \tag{5.114}$$

в качестве инфинитезимальной аффинной коллинеации.

Система (5.100) теперь дает

$$\frac{dx^t}{dx^m}=\frac{x^t}{x^m} \tag{5.115}$$

и, следовательно, ее решение (5.99), удовлетворяющее начальным условиям (5.101), имеет вид

$$x^t=\frac{x_0^t}{x_0^m}\,x^m. \tag{5.116}$$

Далее, так как уравнение (5.113) записывается в виде

$$\frac{da}{dx^m}=-\frac{(n+1)\,a}{x^m}\left(\frac{\alpha}{\alpha_j x^j}+1\right), \tag{5.117}$$

то, согласно (5.106), уравнение (5.103) превращается в

$$\frac{da}{dx^m}=-\frac{(n+1)\,a}{x^m}\left(\frac{\alpha x_0^m}{\alpha_j x_0^j x^m}+1\right), \tag{5.118}$$

а его решение (5.102), удовлетворяющее условию (5.104), принимает вид

$$a=\left(\frac{x^m}{x_0^m}\right)^{-(n+1)}\cdot\varphi(x_0^t)\cdot e^{-\frac{(n+1)(x^m-x_0^m)\,\alpha}{\alpha_j x_0^j x^m}}. \tag{5.119}$$

Разрешая (5.116) относительно x_0^t и внося в (5.119), получаем

$$a=\left(\frac{x^m}{x_0^m}\right)^{-(n+1)}\cdot\varphi\left(x_0^m\frac{x^t}{x^m}\right)\cdot e^{-\frac{(n+1)\left(\frac{x^m}{x_0^m}-1\right)\alpha}{\alpha_j x^j}}. \tag{5.120}$$

Замечая, наконец, что функцию

$$F(x^i)=\left(\frac{x^m}{x_0^m}\right)^{-(n+1)}\cdot\varphi\left(x_0^m\,\frac{x^i}{x^m}\right)\cdot e^{-\frac{(n+1)\,\alpha x^m}{\alpha_j\,x^j x_0^m}} \tag{5.121}$$

можно считать произвольной функцией $-(n+1)$-ой степени однородности, получаем окончательно

$$a(x^i)=F(x^i)\cdot e^{\frac{(n+1)\,\alpha}{\alpha_j\,x^j}}. \tag{5.122}$$

§ 5. Локально-проективные многообразия с симметричной почти симплектической связностью

Симметричная почти симплектическая связность [10]*

$$\Gamma^l_{jk}=\frac{1}{3}\,a^{li}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}-\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}+\gamma_{ijk}\right),\qquad (i,\,j,\,k,\,l=1,\,2,\,\ldots,\,2n) \tag{5.123}$$

выделяемая требованием

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}-a_{il}\,\Gamma^l_{jk}-a_{lj}\,\Gamma^l_{ik}=T_{ijk}, \tag{5.124}$$

где (a_{ij}) — невырожденный кососимметрический тензор, а

$$T_{ijk}=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\right) \tag{5.125}$$

может быть определена однозначно при дополнительном выборе величин (γ_{ijk}), симметричных по любой паре своих индексов и преобразующихся при преобразовании локальных координатных систем по транзитивному закону

$$\gamma_{i'j'k'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\gamma_{ijk}+a_{pq}\,\frac{\partial x^p}{\partial x^{(i'}}\,\frac{\partial^2 x^q}{\partial x^{j'}\partial x^{k')}}. \tag{5.126}$$

Теорема 45. *В локально-проективном многообразии к данному невырожденному кососимметрическому тензору (a_{ij}) инвариантно присоединяется симметричная почти симплектическая связность, компоненты которой определяются по формуле*

$$\Gamma^l_{jk}=\frac{1}{3}\,a^{li}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}-\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\right). \tag{5.127}$$

Доказательство. В локально-проективном многообразии, в силу системы дифференциальных уравнений псевдогруппы дробно-линейных преобразований (1.4), выражение

$$a_{pq}\,\frac{\partial x^p}{\partial x^{(i'}}\,\frac{\partial^2 x^q}{\partial x^{j'}\partial x^{k')}},$$

входящее в правую часть формулы (5.126), тождественно обращается в нуль, а следовательно, величины (γ_{ijk}) преобразуются по тензорному закону.

Таким образом, в локально-проективном многообразии условие

$$\gamma_{ijk}=0 \tag{5.128}$$

---

* В настоящее время уже разработаны основы теории пространств почти симплектической связности с кручением [7], [9].

Заметим еще, что пространства симметричной почти симплектической связности являются пространствами Кавагучи [21].

имеет инвариантный смысл, а формула (5.127) дает выражение для компонент симметричной почти симплектической связности, инвариантно присоединенной к невырожденному кососимметрическому тензору. Эта связность, очевидно, удовлетворяет условию

$$a_{l(i}\Gamma^l_{jk)}=0. \tag{5.129}$$

В силу (5.128), тензор кривизны [11] пространства симметричной почти симплектической связности

$$B_{ij,kl}=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 a_{jl}}{\partial x^k\partial x^i}-\frac{\partial^2 a_{il}}{\partial x^k\partial x^j}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\gamma_{lik}}{\partial x^j}-\frac{\partial\gamma_{ljk}}{\partial x^i}\right)+$$
$$+a_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{ki}\Gamma^\beta_{lj}-\Gamma^\alpha_{kj}\Gamma^\beta_{li})-T_{l\alpha j}\Gamma^\alpha_{ik}+T_{l\alpha i}\Gamma^\alpha_{jk} \tag{5.130}$$

принимает вид

$$B_{ij,kl}=-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x^k\partial x^l}+a_{pq}(\Gamma^p_{ki}\Gamma^q_{lj}-\Gamma^p_{kj}\Gamma^q_{li})+T_{ijp}\Gamma^p_{lk}+\nabla_k T_{ijl}, \tag{5.131}$$

а в случае симметричной симплектической связности, возникающей при условии замкнутости основного кососимметрического тензора, вид

$$B_{ij,kl}=-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x^k\partial x^l}+a_{pq}(\Gamma^p_{ki}\Gamma^q_{lj}-\Gamma^p_{kj}\Gamma^q_{li}). \tag{5.132}$$

Важно, однако, заметить, что в локально-проективном многообразии из условия

$$B_{ij,kl}=0,$$

вообще говоря, не вытекает возможность перехода к такой системе координат, в которой

$$\Gamma^i_{jk}=0,$$

ибо этот переход, как правило, не будет определяться дробно-линейными преобразованиями координат.

Если же указанный выше переход окажется возможным, то в соответствующих координатах T_{ijk} — const и

$$a_{ij}=T_{ijk}x^k+c_{ij},$$

где $c_{ij}=-c_{ij}$ — const и $\det\|c_{ij}\|\neq 0$.

В случае замкнутости основного тензора $a_{ij}(T_{ijk}=0)$ получаем локально-плоское симплектическое многообразие и тогда, путем надлежащих линейных преобразований, тензор (a_{ij}) приводится к виду

$$\|a_{ij}\|=\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & & 0 & & & 1 & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & & 1 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -1 & & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & & 0 & \\ 0 & & & -1 & & & & \end{array}\right). \tag{5.133}$$

Определение 34. Четномерные поверхности симплектического пространства называются симплектически развертывающимися, если геометрия, индуцируемая на них объемлющим пространством — симплектическая.

Существование симплектически развертывающихся поверхностей, отличных от четномерных плоскостей, непосредственно следует из приведенной ниже теоремы [18].

Теорема 46. *На* $2m$*-мерной поверхности*

$$\begin{cases} x^{\sigma}=y^{\sigma} \\ x^{m+\sigma}=\varphi^{\sigma}(p^{\rho},\ y^{m+\rho}) \\ x^{2m+\sigma}=y^{m+\sigma} \\ x^{3m+\sigma}=\varphi^{\sigma}(y^{\rho},\ y^{m+\rho}) \end{cases} \qquad (\sigma,\ \rho=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{5.134}$$

$4m$*-мерного симплектического пространства естественным образом индуцируется симплектическая геометрия, причем* $(y^1,\ y^2,\ \ldots,\ y^{2m})$ *— играют роль канонических координат.*

Доказательство. На $2m$-мерной поверхности (5.134) индуцируется тензор

$$a_{\alpha\beta}=\frac{\partial x^i}{\partial y^{\alpha}}\frac{\partial x^j}{\partial y^{\beta}}a_{ij} \qquad (\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ 2m) \tag{5.135}$$

и величины

$$\gamma_{\alpha\beta\gamma}=a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial y^{(\alpha}}\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^{\beta}\partial y^{\gamma)}}. \tag{5.136}$$

Внося в (5.135) и (5.136) значение тензора (a_{ij}) из (5.133), получаем

$$a_{\alpha\beta}=\sum_{s=1}^{2m}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^s}{\partial y^{\alpha}} & \dfrac{\partial x^{2m+s}}{\partial y^{\alpha}} \\ \dfrac{\partial x^s}{\partial y^{\beta}} & \dfrac{\partial x^{2m+s}}{\partial y^{\beta}} \end{vmatrix} \tag{5.137}$$

и, следовательно,

$$\gamma_{\alpha\beta\gamma}=\sum_{s=1}^{2m}\left(\frac{\partial x^s}{\partial y^{(\alpha}}\frac{\partial^2 x^{2m+s}}{\partial y^{\beta}\partial y^{\gamma)}}-\frac{\partial x^{2m+s}}{\partial y^{(\alpha}}\frac{\partial^2 x^s}{\partial y^{\beta}\partial y^{\gamma)}}\right). \tag{5.138}$$

Для доказательства теоремы теперь достаточно заметить, что (5.137) и (5.138), в силу уравнений $2m$-мерной поверхности (5.134), принимают тот же вид

$$\|a_{\alpha\beta}\|=\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right) \quad \text{и} \quad \gamma_{\alpha\beta\gamma}=0,$$

что и в обычном симплектическом пространстве, отнесенном к каноническим координатам, в качестве которых, в данном случае, выступают параметры $(y^1,\ y^2,\ \ldots,\ y^{2m})$.

В заключение заметим, что, как показано в [8], всякое проективно-евклидово пространство почти симплектической связности непременно является эквиаффинным и всегда может быть задано в некоторй системе координат в виде

$$a_{ij}=e^{\sigma}(\alpha_{ijk}x^{k}+\beta_{ij}), \quad \gamma_{ijk}=0, \tag{5.139}$$

где

$$\alpha_{ijk}, \quad \beta_{ij}-\text{const.}, \quad \alpha_{ijk}=-\alpha_{jik}=\alpha_{jki}, \quad \beta_{ij}=-\beta_{ji}$$

и

$$\det \| \beta_{ij} \| \neq 0.$$

При $n>2$ такое пространство выделяется инвариантным условием

$$B_{ij,\,kl}=\frac{1}{(n-1)}\,a_{l[i}R_{j],\,k},$$

где

$$R_{j,\,k}=a^{il}R_{ij,\,kl}.$$

Более того, в [8] показано, что во всякое четномерное эквиаффинное проективно-евклидово пространство всегда можно так ввести кососимметрическую метрику (a_{ij}), что оно станет пространством почти симплектической связности.

Именно, в некоторой системе координат достаточно определить (a_{ij}) и (γ_{ijk}) формулами (5.139).

ГЛАВА 6

(приложение)

ПРОСТРАНСТВА С ЦЕНТРО-ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{lm})$ ИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОКРЕСТНОСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА КАК МНОГООБРАЗИЯ, ПОГРУЖЕННЫЕ В ПРОСТРАНСТВО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОДОЛЖЕННОЙ ПСЕВДОГРУППЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В этой главе дается инвариантное построение пространства с центро-проективной связностью $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{lm})$ из дифференциальной окрестности третьего порядка, исходя из системы внешних дифференциальных уравнений Э. Картана для продолженной псевдогруппы аналитических преобразований [29], [30], [31]:

$$\begin{cases} D\omega^i = [\omega^l \omega^i_l] \\ D\omega^i_j = [\omega^m_j \omega^i_m] + [\omega^i_{jm} \omega^m] \\ D\omega^i_{jk} = [\omega^m_{jk} \omega^i_m] - [\omega^i_{km} \omega^m_j] - [\omega^i_{jm} \omega^m_k] + [\omega^i_{jkm} \omega^m] \end{cases} \tag{6.1}$$

$$(i, j, k, l, m = 1, 2, \ldots, n).$$

Все, встречающиеся здесь, формы предполагаются симметричными по любой паре своих нижних индексов.

Основы применяемого алгебраического метода, базирующегося на теории последовательных продолжений и охватов одних геометрических объектов другими, разработаны Г. Ф. Лаптевым и А. М. Васильевым и изложены в статьях [6] и [3].

Локальные координаты исходного многообразия $\{V^n\}$ задаются первыми интегралами вполне интегрируемой системы Пфаффа

$$\omega^i = 0,$$

а псевдогруппа их аналитических преобразований $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ определяется уравнениями

$$\Omega^i = \omega^i.$$

Здесь и в дальнейшем изложении большими буквами обозначаются формы, которые получаются из форм, обозначенных соответствующими малыми буквамы, простой заменой преобразуемых переменных на преобразованные.

Свертывая в соотношениях (6.1) формы ω^i_j и ω^i_{jk} по верхнему и нижнему индексам, получаем:

$$\begin{cases} D\omega^l_l = (\omega^l_{lm} \omega^m] \\ D\omega^l_{lk} = [\omega^m_k \omega^l_{lm}] + [\omega^l_{lkm} \omega^m]. \end{cases} \tag{6.2}$$

Вводя теперь в рассмотрение, наряду с формами аффинной связности

$$\tilde{\omega}^k_i = \omega^k_i + \Gamma^k_{im} \omega^m, \tag{6.3}$$

формы

$$\tilde{\omega}^l_{lk} = \omega^l_{lk} + (n+1)\ \Gamma_{km} \omega^m, \tag{6.4}$$

будем иметь

$$D\tilde{\omega}_i^k-[\tilde{\omega}_i^m\,\tilde{\omega}_m^k]=[\vartheta_{im}^k\,\omega^m], \tag{6.5}$$

где

$$\vartheta_{im}^k\equiv d\Gamma_{im}^k-\Gamma_{ij}^k\,\omega_m^j-\Gamma_{jm}^k\,\omega_i^j+\Gamma_{im}^j\,\omega_j^k+\omega_{im}^k-\Gamma_{il}^j\,\Gamma_{jm}^k\,\omega^l,$$

и

$$D\tilde{\omega}_{lk}^l-[\tilde{\omega}_k^m\,\tilde{\omega}_{lm}^l]=(n+1)\,[\vartheta_{km}\,\omega^m], \tag{6.6}$$

где

$$\vartheta_{km}\equiv d\Gamma_{km}-\Gamma_{kj}\,\omega_m^j-\Gamma_{jm}\,\omega_k^j+\frac{1}{(n+1)}\,\Gamma_{km}^j\,\omega_{aj}^a+\frac{1}{(n+1)}\,\omega_{a\,km}^a-\Gamma_{jm}\,\Gamma_{kl}^j\,\omega^l.$$

Рассмотрим $(n+n^2+n^3)$-мерное пространство представления такого продолжения псевдогруппы аналитических преобразований, которое показывает, как преобразуется объект центро-проективной связности.

Точки такого пространства $(x^i,\ \Gamma_{jk}^i,\ \Gamma_{lm})$ задаются первыми интегралами вполне интегрируемой системы Пфаффа

$$\begin{cases}\omega^i=0\\ \vartheta_{jk}^i=0\\ \vartheta_{lm}=0,\end{cases}$$

а псевдогруппа, преобразующая их,

$$\begin{cases}x^{i'}=x^{i'}(x^i)\\ \Gamma_{j'k'}^{i'}=\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\Gamma_{jk}^i+\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\,\partial x^{k'}}\\ \Gamma_{l'm'}=\dfrac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\,\dfrac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\left[\Gamma_{lm}-\left(\dfrac{\partial^2\ln\det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^l\,\partial x^m}-\dfrac{\partial\ln\det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^k}\,\Gamma_{lm}^k\right)\right],\end{cases}$$

определяется уравнениями

$$\begin{cases}\Omega^i=\omega^i\\ \Theta_{jk}^i=\vartheta_{jk}^i\\ \Theta_{lm}=\vartheta_{lm}.\end{cases}$$

Пространство с центро-проективной связностью $(\Gamma_{jk}^i,\ \Gamma_{lm})$ из дифференциальной окрестности третьего порядка определяется теперь как n-мерная поверхность

$$\begin{cases}\Gamma_{jk}^i=\Gamma_{jk}^i(x^m)\\ \Gamma_{kl}=\Gamma_{kl}(x^m),\end{cases} \tag{6.7}$$

погруженная в рассматриваемое $(n+n^2+n^3)$-мерное пространство [19].

Вместо того, чтобы задавать n-мерную поверхность уравнениями (6.7), очевидно, можно просто задать формы ϑ_{jk}^i и ϑ_{kl} в виде линейных комбинаций форм ω^m:

$$\begin{cases}\vartheta_{jk}^i=\Lambda_{j,\,km}^i\,\omega^m\\ \vartheta_{kl}=\Lambda_{k,\,lm}\,\omega^m.\end{cases} \tag{6.8}$$

Внося (6.3) и (6.4) в первые уравнения систем (6.1) и (6.2), а (6.8) в (6.5) и (6.6), получаем уравнения структуры изучаемого пространства в виде:

$$\begin{cases}D\omega^i=[\omega^k\,\tilde{\omega}_k^i]-R_{km}^i\,[\omega^k\,\omega^m]\\ D\omega_l^l=[\tilde{\omega}_{lm}^l\,\omega^m]+(n+1)\,R_{km}\,[\omega^k\,\omega^m],\end{cases} \tag{6.9}$$

где

$$\left\{\begin{aligned} R^i_{km} &= \frac{1}{2}\,(\Gamma^i_{km} - \Gamma^i_{mk}) \\ R_{km} &= \frac{1}{2}\,(\Gamma_{km} - \Gamma_{mk}) \end{aligned}\right. \tag{6.10}$$

и

$$\left\{\begin{aligned} D\tilde{\omega}^i_j &= [\tilde{\omega}^m_j\,\tilde{\omega}^i_m] - \frac{1}{2}\,R^i_{j,km}\,[\omega^k\,\omega^m] \\ D\tilde{\omega}^l_{li} &= [\tilde{\omega}^m_i\,\tilde{\omega}^l_{lm}] - \frac{(n+1)}{2}\,R_{i,km}\,[\omega^k\,\omega^m], \end{aligned}\right. \tag{6.11}$$

где

$$\left\{\begin{aligned} R^i_{j,km} &= \Lambda^i_{j,km} - \Lambda^i_{j,mk} \\ R_{i,km} &= \Lambda_{i,km} - \Lambda_{i,mk}. \end{aligned}\right. \tag{6.12}$$

Величины (6.10) и (6.12) удовлетворяют при $\omega^i = 0$ уравнениям:

$$\left\{\begin{aligned} &dR^i_{km} - R^i_{lm}\,\omega^l_k - R^i_{kl}\,\omega^l_m + R^l_{km}\,\omega^i_l = 0 \\ &dR_{km} - R_{ml}\,\omega^l_k - R_{kl}\,\omega^l_m + \frac{1}{(n+1)}\,R^l_{km}\,\omega^i_{il} = 0 \end{aligned}\right. \tag{6.13}$$

и

$$\left\{\begin{aligned} &dR^i_{j,km} - R^i_{j,kl}\,\omega^l_m - R^i_{j,lm}\,\omega^l_k - R^i_{l,km}\,\omega^l_j + R^l_{j,km}\,\omega^i_l = 0 \\ &dR_{i,km} - R_{i,kl}\,\omega^l_m - R_{i,lm}\,\omega^l_k - R_{l,km}\,\omega^l_i + \frac{1}{(n+1)}\,R^l_{i,km}\,\omega^j_{jl} = 0, \end{aligned}\right. \tag{6.14}$$

образующим вполне интегрируемые системы и, следовательно, являются геометрическими объектами.

Первые уравнения систем (6.10) и (6.12) определяют, в силу (6.13) и (6.14), тензоры кручения и кривизны пространства аффинной связности, задаваемого первыми уравнениями системы (6.8). Уравнения структуры этого пространства определяются первыми уравнениями систем (6.9) и (6.11).

Заметим, что при $R^i_{km} = 0$ и $R^i_{j,km} = 0$ вторые уравнения (6.10) и (6.12) дают, как непосредственно видно из систем (6.13) и (6.14), тензоры.

Геометрические объекты (6.10) и (6.12) являются, соответственно, полным объектом кручения и полным объектом кривизны [19].

При преобразовании координат эти объекты преобразуются по законам:

$$\left\{\begin{aligned} R^{i'}_{k'm'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\,R^i_{km} \\ R_{k'm'} &= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\left(R_{km} + \frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^l}\,R^l_{km}\right) \end{aligned}\right.$$

и

$$\left\{\begin{aligned} R^{i'}_{j',k'm'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\,R^i_{j,km} \\ R_{i',k'm'} &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\left(R_{i,km} + \frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{(n+1)}}}{\partial x^l}\,R^l_{i,km}\right). \end{aligned}\right.$$

Поскольку величины

$$a_i = -\frac{1}{(n+1)}\,\Gamma^a_{ai} \tag{6.15}$$

образуют поле копунктора, уравнения которого

$$da_k - a_l\,\omega_k^l - \frac{1}{(n+1)}\,\omega_{ak}^a = -\frac{1}{(n+1)}\,\tilde{\Lambda}_{km}\,\omega^m\ (\tilde{\Lambda}_{km} = \Lambda_{a,\,km}^a + \Gamma_{bk}^a\,\Gamma_{am}^b) \tag{6.16}$$

следуют, в силу (6.15), из первых уравнений системы (6.8), то точки (u_l) общего линейного пространства копункторов $\{Q^n\}$, которые могут рассматриваться как гиперплоскости в пространстве пункторов $\{P^n\}$, не проходящие через центральную точку $(u^i = 0)$, определяются вполне интегрируемой системой

$$\begin{cases} \omega^i = 0 \\ \vartheta_i \equiv du_i - u_l\,\omega_i^l - \frac{1}{(n+1)}\,\omega_{mi}^m = 0. \end{cases} \tag{6.17}$$

Интегрируя систему

$$\begin{cases} \Omega^i = \omega^i \\ \Theta_i = \vartheta_i\,, \end{cases} \tag{6.18}$$

получаем закон преобразования копунктора (u_i) в конечном виде

$$u_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,u_i - \frac{1}{(n+1)}\,\frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{i'}}\,.$$

Далее, если величины (ξ^i) образуют произвольное векторное поле, то-есть

$$\begin{cases} \omega^i = 0 \\ d\xi^i + \xi^l\,\omega_l^i = 0\,, \end{cases} \tag{6.19}$$

то величины

$$u^i = \frac{\xi^i}{-a_l\,\xi^l + 1} \tag{6.20}$$

образуют, согласно теореме 18, произвольное поле пунктора.

Дифференцируя (6.20) и используя (6.19) и (6.17), при $\omega^i = 0$, получаем

$$du^i = \frac{d\xi^i + u^i\,\xi^l\,da_l + u^i\,a_l\,d\xi^l}{-a_p\,\xi^p + 1} = \frac{-\xi^l\,\omega_l^i + u^i\left(a_p\,\omega_l^p + \dfrac{1}{(n+1)}\,\omega_{al}^a\right)\xi^l - u^i\,a_p\,\omega_l^p\,\xi^l}{-a_p\,\xi^p + 1} =$$

$$= -u^l\,\omega_l^i + \frac{1}{(n+1)}\,u^l\,u^i\,\omega_{al}^a\,.$$

Таким образом, точки (u^i) локального центро-проективного пространства пункторов $\{P^n\}$ определяются вполне интегрируемой системой

$$\begin{cases} \omega^i = 0 \\ \vartheta^i \equiv du^i + u^l\,\omega_l^i - \frac{1}{(n+1)}\,u^i\,u^l\,\omega_{ml}^m = 0\,. \end{cases} \tag{6.21}$$

Интегрируя систему

$$\begin{cases} \Omega^i = \omega^i \\ \Theta^i = \vartheta^i\,, \end{cases} \tag{6.22}$$

получаем закон преобразования пунктора (u^i) в конечном виде

$$u^{i'} = \frac{\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,u^i}{-\dfrac{1}{(n+1)}\,\dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^k}\,u^k + 1}\,.$$

Пространство с центро-проективной связностью $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{lm})$ из дифференциальной окрестности третьего порядка, уравнения структуры которого имеют вид (6.9) и (6.11), обладает по сравнению с общим пространством проективной связности Э. Картана [34] и И. А. Схоутена [39] тем преимуществом, что оно наиболее тесно связано с базисным дифферецируемым многообразием $\{V^n\}$, ибо его локальные пространства $\{P^n\}$ являются пространствами пункторов (u^i), которые удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\bigg|_{u^k=0}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\bigg|_{M_0} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \det\left\|\dfrac{\partial u^{r'}}{\partial u^r}\right\|}{\partial u^i}\Bigg|_{u^k=0}=\frac{\partial \det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^i}\Bigg|_{M_0},$$

а потому, как показано в § 1 главы 2, наиболее близко примыкают к дифференцируемому многообразию $\{V^n\}$.

Дифференцируя внешним образом (6.16) и раскрывая по лемме Э. Картана [25], будем иметь при $\omega^i=0$

$$d\left(-\frac{1}{(n+1)}\tilde{\Lambda}_{km}\right)+\frac{1}{(n+1)}\tilde{\Lambda}_{lm}\,\omega^l_k+$$
$$+\frac{1}{(n+1)}\tilde{\Lambda}_{kl}\,\omega^l_m-\frac{1}{(n+1)}\Gamma^a_{al}\,\omega^l_{km}+\frac{1}{(n+1)}\omega^a_{a\,km}=0. \qquad (6.23)$$

Далее, при $\omega^i=0$, согласно (6.8) и (6.16), получаем

$$a_l\,d\Gamma^l_{km}-a_l\,\Gamma^l_{kj}\,\omega^j_m-a_l\,\Gamma^l_{jm}\,\omega^j_k+a_p\,\Gamma^l_{km}\,\omega^p_l+a_l\,\omega^l_{km}=0$$

и

$$\Gamma^l_{km}\,da_l-\Gamma^l_{km}\,a_p\,\omega^p_l-\frac{1}{(n+1)}\Gamma^l_{km}\,\omega^a_{al}=0,$$

а следовательно,

$$-d(a_j\Gamma^j_{km})+a_j\,\Gamma^j_{kl}\,\omega^l_m+a_j\,\Gamma^j_{lm}\,\omega^l_k+\frac{1}{(n+1)}\Gamma^l_{km}\,\omega^a_{al}+\frac{1}{(n+1)}\Gamma^a_{al}\,\omega^l_{km}=0. \qquad (6.24)$$

Складывая теперь (6.23) с (6.24), имеем

$$d\left(-\frac{1}{(n+1)}\tilde{\Lambda}_{km}+\frac{1}{(n+1)}\Gamma^a_{aj}\,\Gamma^j_{km}\right)-\left(-\frac{1}{(n+1)}\tilde{\Lambda}_{lm}+\frac{1}{(n+1)}\Gamma^a_{aj}\,\Gamma^j_{lm}\right)\omega^l_k-$$
$$-\left(-\frac{1}{(n+1)}\tilde{\Lambda}_{kl}+\frac{1}{(n+1)}\Gamma^a_{aj}\,\Gamma^j_{kl}\right)\omega^l_m+\frac{1}{(n+1)}\Gamma^l_{km}\,\omega^a_{al}+$$
$$+\frac{1}{(n+1)}\omega^a_{a\,km}=0. \qquad (6.25)$$

Таким образом, величины

$$\tilde{c}_{km}=\Gamma_{km}+\frac{1}{(n+1)}(\tilde{\Lambda}_{km}-\Gamma^a_{al}\,\Gamma^l_{km}) \qquad (6.26)$$

удовлетворяют при $\omega^i=0$ уравнениям

$$d\tilde{c}_{km}-\tilde{c}_{lm}\,\omega^l_k-c_{kl}\,\omega^l_m=0$$

и, следовательно, определяют тензор.

Обращение тензора (6.26) в нуль приводит к центро-проективной связности

$$\left(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{lm}=-\frac{1}{(n+1)}\tilde{\Lambda}_{lm}+\frac{1}{(n+1)}\Gamma^a_{ak}\,\Gamma^k_{lm}\right),$$

инвариантно присоединенной к аффинной связности (Γ^i_{jk}).

Для получения объекта (γ^i_{jk}), определяющего инвариантное дифференцирование относительно псевдогруппы дробно-линейных преобразований [12], рассматривается поле относительного скаляра (a) веса $N=1$, которое может быть задано уравнением

$$da - a\omega_k^k = a\Lambda_l\,\omega^l. \tag{6.27}$$

Деля обе части (6.27) на (a), а затем дифференцируя внешним образом и расскрывая по лемме Э. Картана, получаем

$$d\Lambda_i - \Lambda_l\,\omega_i^l + \omega_{ki}^k = \Lambda_{im}\,\omega^m \quad (\Lambda_{im} = \Lambda_{mi}).$$

Таким образом, для определения объекта

$$\gamma_{jk}^i = \frac{1}{(n+1)}\,\delta_j^i\,\Lambda_k + \frac{1}{(n+1)}\,\delta_k^i\,\Lambda_j$$

будем иметь

$$d\gamma_{jk}^i - \gamma_{lk}^i\,\omega_j^l - \gamma_{jl}^i\,\omega_k^l + \gamma_{jk}^l\,\omega_l^i + (\delta_j^i\,\omega_{mk}^m + \delta_k^i\,\omega_{mj}^m)\,\frac{1}{(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{(n+1)}\,(\delta_j^i\,\Lambda_{km} + \delta_k^i\,\Lambda_{jm})\,\omega^m. \tag{6.28}$$

В силу (6.28) и первых уравнений (6.8), поле связующего объекта

$$G_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \gamma_{jk}^i$$

определяется системой

$$dG_{il}^k - G_{ij}^k\,\omega_l^j - G_{jl}^k\,\omega_i^j + G_{il}^j\,\omega_j^k + \omega_{il}^k - \frac{1}{(n+1)}\,(\delta_i^k\,\omega_{ml}^m + \delta_l^k\,\omega_{mi}^m) = H_{i,lm}^k\,\omega^m, \tag{6.29}$$

где

$$H_{i,lm}^k = \Lambda_{i,lm}^k + \Gamma_{jl}^k\,\Gamma_{im}^j - \frac{1}{(n+1)}\,(\delta_i^k\,\Lambda_{lm} + \delta_l^k\,\Lambda_{im}). \tag{6.30}$$

Производя в (6.29) свертывание по индексам k и i, получаем систему, определяющую поле связующего ковектора (G_l)

$$dG_l - G_j\,\omega_l^j = H_{k,lm}^k\,\omega^m, \tag{6.31}$$

где

$$H_{k,lm}^k = \Lambda_{k,lm}^k + \Gamma_{jl}^k\,\Gamma_{km}^j - \Lambda_{lm} = \tilde{\Lambda}_{lm} - \Lambda_{lm}.$$

Проективные параметры Томаса

$$\Pi_{il}^k = G_{il}^k - \frac{1}{(n+1)}\,(\delta_i^k\,G_l + \delta_l^k\,G_i) \tag{6.32}$$

определяются системой

$$d\Pi_{il}^k - \Pi_{ij}^k\,\omega_l^j - \Pi_{jl}^k\,\omega_i^j + \Pi_{il}^j\,\omega_j^k + \omega_{il}^k - \frac{1}{(n+1)}\,(\delta_i^k\,\omega_{jl}^j + \delta_l^k\,\omega_{ji}^j) = L_{i,lm}^k\,\omega^m, \tag{6.33}$$

в которой

$$L_{i,lm}^k = H_{i,lm}^k - \frac{1}{(n+1)}\,(\delta_i^k\,H_{j,lm}^j + \delta_l^k\,H_{j,im}^j) =$$
$$= \Lambda_{i,lm}^k + \Gamma_{jl}^k\,\Gamma_{im}^j - \frac{1}{(n+1)}\,(\delta_i^k\,\tilde{\Lambda}_{lm} + \delta_l^k\,\tilde{\Lambda}_{im}). \tag{6.34}$$

Далее, согласно (6.32),

$$\Gamma_{il}^k = \Pi_{il}^k + \left(\gamma_{il}^k + \frac{1}{(n+1)}\,\delta_i^k\,G_l + \frac{1}{(n+1)}\,\delta_l^k\,G_i\right).$$

Учитывая теперь, что

$$\Gamma_{jk}^j = \Lambda_k + G_k\,, \tag{6.35}$$

получаем формулу расщепления Томаса

$$\Gamma^i_{jk} = \Pi^i_{jk} + \frac{1}{(n+1)} \cdot (\delta^i_j \Gamma^l_{lk} + \delta^i_k \Gamma^l_{lj}). \tag{6.36}$$

Величины

$$V_{lm} = H^k_{k,lm} - H^k_{k,ml} \tag{6.37}$$

удовлетворяют, при $\omega^i = 0$, уравнению

$$dV_{lm} - V_{im}\,\omega^i_l - V_{li}\,\omega^i_m = 0$$

и, следовательно, определяют тензор, который является, согласно

$$H^k_{k,lm} - H^k_{k,ml} = \Lambda^k_{k,lm} - \Lambda^k_{k,ml} = R^k_{k,lm},$$

тензором эквиаффинности.

Составляя теперь тензор эквиаффинной кривизны

$$Q^h_{k,ji} = \frac{3}{2(n+1)} \left(V_{(ji}\,\delta^h_{k)} - V_{ji}\,\delta^h_k\right) \tag{6.38}$$

и представляя тензор проективной кривизны в виде

$$P^h_{k,ji} = R^h_{k,ji} - \frac{1}{(1-n)} (\delta^h_j\,\sigma_{ik} - \delta^h_i\,\sigma_{jk}) + \frac{3}{2(n+1)} \left(V_{(ji}\,\delta^h_{k)} - V_{ji}\,\delta^h_k\right), \tag{6.39}$$

где

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (R^l_{i,jl} + R^l_{j,il}), \tag{6.40}$$

получаем для тензора эквипроективной кривизны

$$T^h_{k,ji} = P^h_{k,ji} - Q^h_{k,ji} \tag{6.41}$$

выражение

$$T^h_{k,ji} = R^h_{k,ji} - \frac{1}{(1-n)} (\delta^h_j\,\sigma_{ik} - \delta^h_i\,\sigma_{jk}). \tag{6.42}$$

Перейдем теперь к введению связности $(\tilde{\Gamma}^i_{jk})$ в локальных центро-проективных пространствах $\{P^n\}$ и к выводу уравнений структуры этих пространств.

Дифференцируя внешним образом формы

$$\vartheta^i = du^i + u^l\,\tilde{\omega}^i_l - \frac{1}{(n+1)}\, u^i u^l\,\tilde{\omega}^m_{ml}, \tag{6.43}$$

первые интегралы которых определяют точку в $\{P^n\}$, и используя формулы (6.11) при $\omega^i = 0$, получаем

$$D\vartheta^i = [\vartheta^l\,\vartheta^i_l], \tag{6.44}$$

где

$$\vartheta^i_l \equiv \tilde{\omega}^i_l - \frac{1}{(n+1)}\, u^k (\delta^i_k\,\tilde{\omega}^m_{ml} + \delta^i_l\,\tilde{\omega}^m_{mk}). \tag{6.45}$$

Далее, дифференцируя внешним образом формы (6.45) и снова используя (6.11) при $\omega^i = 0$, имеем

$$D\vartheta^i_l = [\vartheta^m_l\,\vartheta^i_m] + [\vartheta^i_{lm}\,\vartheta^m], \tag{6.46}$$

где

$$\vartheta^i_{lm} \equiv \frac{1}{(n+1)} (\delta^i_l\,\tilde{\omega}^a_{am} + \delta^i_m\,\tilde{\omega}^a_{al}). \tag{6.47}$$

Из (6.45) и (6.47) легко получить

$$\vartheta^a_a \equiv \tilde{\omega}^a_a - u^k \tilde{\omega}^a_{ak} \tag{6.48}$$

и

$$\vartheta^a_{am} \equiv \tilde{\omega}^a_{am}, \tag{6.49}$$

а следовательно,

$$\vartheta^i_{lm} \equiv \frac{1}{(n+1)} (\delta^i_l \vartheta^a_{am} + \delta^i_m \vartheta^a_{al}). \tag{6.50}$$

Вводя теперь в локальном центро-проективном пространстве $\{P^n\}$ формы аффинной связности

$$\tilde{\vartheta}^k_i = \vartheta^k_i + \tilde{\Gamma}^k_{im} \vartheta^m, \tag{6.51}$$

будем иметь

$$D\tilde{\vartheta}^k_i - [\tilde{\vartheta}^m_i \tilde{\vartheta}^k_m] = [\varphi^k_{im} \vartheta^m], \tag{6.52}$$

где

$$\varphi^k_{im} \equiv d\tilde{\Gamma}^k_{im} - \tilde{\Gamma}^k_{ij} \vartheta^j_m - \tilde{\Gamma}^k_{jm} \vartheta^j_i + \tilde{\Gamma}^j_{im} \vartheta^k_j + \vartheta^k_{im} - \tilde{\Gamma}^j_{il} \tilde{\Gamma}^k_{jm} \vartheta^l. \tag{6.53}$$

Уравнения, определяющие в пространстве $\{P^n\}$ объект аффинной связности $(\tilde{\Gamma}^k_{im})$, записываются в виде

$$d\tilde{\Gamma}^k_{im} - \tilde{\Gamma}^k_{ij} \tilde{\vartheta}^j_m - \tilde{\Gamma}^k_{jm} \tilde{\vartheta}^j_i + \tilde{\Gamma}^j_{im} \tilde{\vartheta}^k_j + \tilde{\vartheta}^k_{im} = 0 \tag{6.54}$$

и, следовательно, в силу (6.50), совпадают с уравнениями

$$d\tilde{\gamma}^k_{im} - \tilde{\gamma}^k_{ij} \tilde{\vartheta}^j_m - \tilde{\gamma}^k_{jm} \tilde{\vartheta}^j_i + \tilde{\gamma}^j_{im} \tilde{\vartheta}^k_j + \frac{1}{(n+1)} (\delta^k_i \tilde{\vartheta}^l_{lm} + \delta^k_m \tilde{\vartheta}^l_{li}) = 0, \tag{6.55}$$

определяющими в том же пространстве объект $(\tilde{\gamma}^k_{im})$.

Таким образом, в локальном центро-проективном пространстве $\{P^n\}$ всегда можно написать тождество

$$\tilde{\Gamma}^k_{im} \equiv \tilde{\gamma}^k_{im}, \tag{6.56}$$

возникающее в силу дробно-линейного характера преобразований, действующих в этом пространстве.

Далее, комбинируя (6.43) с уравнениями

$$da_i - a_l \tilde{\omega}^l_i - \frac{1}{(n+1)} \tilde{\omega}^a_{ai} = 0 \tag{6.57}$$

и

$$d\sigma_{ij} - \sigma_{il} \tilde{\omega}^l_j - \sigma_{lj} \tilde{\omega}^l_i = 0, \tag{6.58}$$

написанными для копунктора (6.15) и тензора (6.40), и учитывая соотношения (6.45) и (6.49), получаем

$$d\underset{(0)}{\tilde{a}_i} - \underset{(0)}{\tilde{a}_l} \vartheta^l_i - \frac{1}{(n+1)} \vartheta^a_{ai} = \frac{\partial \underset{(0)}{\tilde{a}_i}}{\partial u^m} \vartheta^m, \tag{6.59}$$

где

$$\underset{(0)}{\tilde{a}_l} = \frac{a_l}{(a_j u^j + 1)} \tag{6.60}$$

и

$$d\underset{(1)}{\tilde{a}_i} - \underset{(1)}{\tilde{a}_l} \vartheta^l_i - \frac{1}{(n+1)} \vartheta^a_{ai} = \frac{\partial \underset{(1)}{\tilde{a}_i}}{\partial u^m} \vartheta^m, \tag{6.61}$$

где

$$\underset{(1)}{\tilde{a}_l} = \frac{\left(a_l a_k - \frac{\sigma_{lk}}{(n-1)}\right) u^k + a_l}{\left(a_j a_k - \frac{\sigma_{jk}}{(n-1)}\right) u^j u^k + 2a_j u^j + 1}. \tag{6.62}$$

В силу (6.59) и (6.61), величины (6.60) и (6.62) определяют в пространстве $\{P^n\}$ поля копункторов, а следовательно, согласно (6.56)

$$\underset{(0)}{\tilde{\Gamma}^i_{jk}} = -\delta^i_j \underset{(0)}{\tilde{a}_k} - \delta^i_k \underset{(0)}{\tilde{a}_j} \tag{6.63}$$

и

$$\underset{(1)}{\tilde{\Gamma}^i_{jk}} = -\delta^i_j \underset{(1)}{\tilde{a}_k} - \delta^i_k \underset{(1)}{\tilde{a}_j} \tag{6.64}$$

могут быть приняты в этом пространстве за компоненты аффинных связностей.

Формы (6.53) принимают для связностей (6.63) и (6.64) вид

$$\underset{(0)}{\varphi^i_{jk}} = \left(\frac{\partial \underset{(0)}{\tilde{\Gamma}^i_{jk}}}{\partial u^m} - \underset{(0)}{\tilde{\Gamma}^a_{jm}} \underset{(0)}{\tilde{\Gamma}^i_{ak}} \right) \vartheta^m \tag{6.65}$$

и, соответственно,

$$\underset{(1)}{\varphi^i_{jk}} = \left(\frac{\partial \underset{(1)}{\tilde{\Gamma}^i_{jk}}}{\partial u^m} - \underset{(1)}{\tilde{\Gamma}^a_{jm}} \underset{(1)}{\tilde{\Gamma}^i_{ak}} \right) \vartheta^m. \tag{6.66}$$

При $u^l = 0$

$$\underset{(0)}{\tilde{\Gamma}^i_{jk}} \Big|_{u^l=0} = \underset{(1)}{\tilde{\Gamma}^i_{jk}} \Big|_{u^l=0} = -\delta^i_j a_k - \delta^i_k a_j = \gamma^i_{jk}, \tag{6.67}$$

а уравнения (6.65) и (6.66) переходят в

$$d\gamma^i_{jk} - \gamma^i_{jl}\, \tilde{\omega}^l_k - \gamma^i_{lk}\, \tilde{\omega}^l_j + \gamma^l_{jk}\, \tilde{\omega}^i_l + \frac{1}{(n+1)} (\delta^i_j\, \tilde{\omega}^m_{mk} + \delta^i_k\, \tilde{\omega}^m_{mj}) = 0. \tag{6.68}$$

Связность (6.63) превращает пространство $\{P^n\}$ в аффинное пространство, уравнения структуры которого

$$\begin{cases} D\vartheta^i = [\vartheta^l\, \tilde{\vartheta}^i_l] \\ D\tilde{\vartheta}^i_j = [\tilde{\vartheta}^l_j\, \tilde{\vartheta}^i_l] \end{cases} \tag{6.69}$$

получаются внесением

$$\vartheta^i_l = \tilde{\vartheta}^i_l - \underset{(0)}{\tilde{\Gamma}^i_{lm}}\, \vartheta^m$$

в (6.44) и (6.65) в (6.52).

Связность (6.64) превращает пространство $\{P^n\}$ в симметрическое проективно-евклидово пространство.

Внося

$$\vartheta^i_l = \tilde{\vartheta}^i_l - \underset{(1)}{\tilde{\Gamma}^i_{lm}}\, \vartheta^m$$

в (6.44) и (6.66) в (6.52), получаем уравнения структуры этого пространства в виде

$$D\vartheta^i = [\vartheta^l\, \tilde{\vartheta}^i_l] \tag{6.70}$$

$$D\tilde{\vartheta}^i_j = [\tilde{\vartheta}^l_j\, \tilde{\vartheta}^i_l] - \frac{1}{2} \tilde{R}^i_{j,\,km} [\vartheta^k\, \vartheta^m], \tag{6.71}$$

где компоненты

$$\tilde{R}^i_{j,\,km} = \frac{\partial \underset{(1)}{\tilde{\Gamma}^i_{mj}}}{\partial u^k} - \frac{\partial \underset{(1)}{\tilde{\Gamma}^i_{kj}}}{\partial u^m} + \underset{(1)}{\tilde{\Gamma}^\alpha_{mj}} \underset{(1)}{\tilde{\Gamma}^i_{\alpha k}} - \underset{(1)}{\tilde{\Gamma}^\alpha_{kj}} \underset{(1)}{\tilde{\Gamma}^i_{\alpha m}} \tag{6.72}$$

образуют тензор кривизны.

Внося (6.62) в (6.64), а (6.64) в (6.72), получаем

$$\tilde{R}^i_{j,\,km} = \frac{1}{(n-1)} (\delta^i_k\, \tilde{R}_{m,\,j} - \delta^i_m\, \tilde{R}_{k,\,j}) \tag{6.73}$$

и

$$\tilde{R}_{k,l}=(1-n)\frac{a_k a_l-\dfrac{\sigma_{kl}}{(n-1)}}{\left(a_i a_j-\dfrac{\sigma_{ij}}{(n-1)}\right)u^i u^j+2a_i u^i+1}-$$

$$-\frac{(1-n)\left[\left(a_i a_k-\dfrac{\sigma_{ik}}{(n-1)}\right)u^i+a_k\right]\left[\left(a_i a_l-\dfrac{\sigma_{il}}{(n-1)}\right)u^i+a_l\right]}{\left[\left(a_i a_j-\dfrac{\sigma_{ij}}{(n-1)}\right)u^i u^j+2a_i u^i+1\right]^2}. \quad (6.74)$$

Так как, в силу (6.74),

$$\tilde{R}_{k,l}\Big|_{u=0}=\sigma_{kl} \quad (6.75)$$

и, следовательно,

$$\tilde{R}^i_{j,km}\Big|_{u=0}=\frac{1}{(1-n)}\left(\delta^i_k\,\sigma_{mj}-\delta^i_m\,\sigma_{kj}\right), \quad (6.76)$$

то, согласно (6.42),

$$T^h_{k,ji}=R^h_{k,ji}-\tilde{R}^h_{k,ji}\Big|_{u=0}. \quad (6.77)$$

Формула (6.77) выясняет геометрический смысл тензора эквипроективной кривизны.

В заключение, рассмотрим еще пространство переменной кривизны, которое возникает при условии

$$T^h_{k,ji}=0 \quad (6.78)$$

и

$$\det\|R_{i,j}\|\neq 0. \quad (6.79)$$

В этом пространстве можно ввести скаляр

$$K(x)=\frac{\varepsilon}{(1-n)}\sqrt[n]{\frac{\det\|R_{ij}\|}{a^2}}, \quad (6.80)$$

где ε — корень n-ой степени из единицы, а (a) — относительный скаляр единичного веса, определенный с точностью до постоянного множителя из условия

$$\Gamma^k_{ki}=\frac{\partial\ln a}{\partial x^i}. \quad (6.81)$$

Если ввести в рассмотрение метрику с помощью тензора

$$g_{ij}=\bar{\varepsilon}R_{ij}\sqrt[n]{\frac{a^2}{\det\|R_{k,l}\|}}, \quad (6.82)$$

который, вообще говоря, не является ковариантно постоянным в нашей связности, то скаляр (6.80) может быть определен как кривизна в двумерном направлении, не зависящая от выбора этого направления.

В силу (6.79), локальные пространства $\{P^n\}$ с уравнениями структуры (6.70) и (6.71) становятся пространствами постоянной кривизны, которая определяется формулой (6.80), причем, согласно (6.78) и (6.77), получаем

$$R^h_{k,ji}=\tilde{R}^h_{k,ji}\Big|_{u=0}.$$

Поступила в редакцию
1.VI.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Буземан и П. Келли. „Проективная геометрия и проективные метрики".
2. В. В. Вагнер. „Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии". (Приложение к [5]).
3. А. М. Васильев. „Инвариантные общие методы в дифференциальной геометрии", ДАН СССР, т. 79, № 1, стр. 5 (1951).
4. О. Веблен. „Инварианты дифференциальных квадратичных форм".
5. О. Веблен и Дж. Уайтхед. „Основания дифференциальной геометрии".
6. Г. Ф. Лаптев. „Дифференциальная геометрия погруженных многообразий", Труды Моск. матем. о-ва, т. 2 (1953).
7. Ю. И. Левин. „Об аффинных связностях, присоединенных к кососимметрическому тензору", ДАН СССР, т. 128, № 4, стр. 668 (1959).
8. Ю. И. Левин. „О проективно плоских пространствах почти симплектической связности", Научные доклады высшей шк. № 1, стр. 42 (1959).
9. Ю. И. Левин. „О пространствах аффинной связности, присоединенных к кососимметрическому тензору" (Диссертация).
10. В. Г. Лемлейн. „О пространствах симметрической почти симплектической связности", ДАН СССР, т. 115, № 4 (1957).
11. В. Г. Лемлейн. „Тензор кривизны и некоторые типы пространств симметричной почти симплектической связности", ДАН СССР, т. 117, № 5 (1957).
12. В. Г. Лемлейн. „Инвариантное дифференцирование в псевдогруппе дробно-линейных преобразований", УМН, т. 14, вып. 5 (89), стр. 161 (1957).
13. В. Г. Лемлейн. „Обобщение инвариантного дифференцирования в дробно-линейной псевдогруппе и расщепление объекта аффинной связности", ДАН СССР, т. 128, № 4 (1959).
14. В. Г. Лемлейн. „Локальные центро-проективные пространства дифференцируемого многообразия и объект γ^i_{jk}, определяющий инвариантное дифференцирование в дробно-линейной псевдогруппе", ДАН СССР, т. 129, № 2 (1959).
15. В. Г. Лемлейн. „Об индуцировании связности постоянной кривизны в ассоциированных центро-проективных пространствах локально-проективного многообразия", ДАН СССР, т. 131, № 1, стр. 17 (1960).
16. В. Г. Лемлейн. „Проективные и проективно-метрические перенесения в многообразиях с аффинной связностью и в римановых пространствах", ДАН СССР, т. 132, № 6 (1960).
17. В. Г. Лемлейн. „О геометрическом смысле тензора проективной кривизны в многообразиях с аффинной связностью", ДАН СССР, т. 133, № 6, стр. 1287 (1960).
18. В. Г. Лемлейн. „Локально-проективные многообразия с симметричной почти симплектической связностью", УМН, т. 15, вып. 5 (95) (1960).
19. В. Г. Лемлейн. „Пространства с центро-проективной связностью как многообразия, погруженные в пространство представления продолженной псевдогруппы аналитических преобразований", ДАН СССР, т. 138, № 6, стр. 1291 (1961).
20. А. Лихнерович. „Теория связностей в целом и группы голономии".
21. М. В. Лосик. „О некотором классе пространств Кавагучи", ДАН СССР, т. 134, № 6, стр. 1299 (1960).
22. А. П. Норден. „Аффинная связность на поверхностях проективного пространства" (Матем. сборник, т. 20, вып. 2).
23. П. К. Рашевский. „Геометрическая теория уравнений с частными производными".
24. И. А. Схоутен и Д. Дж. Стройк. „Введение в новые методы дифференциальной геометрии", т. 2.
25. С. П. Фиников. „Метод внешних форм Картана".
26. П. А. Широков. „Проективно-евклидовы симметрические пространства" (Труды семинара по векторному и тензорному анализу, в 8, стр. 73).
27. Л. Эйзенхарт. „Непрерывные группы преобразований".
28. К. Яно и С. Бохнер. „Кривизна и числа Бетти".

29. E. C a r t a n. „Sur la structure des groupes infinis de transformations", Ann. Ec. Norm. Sup. 21 (1904).
30. E. C a r t a n. „Sur la structure des groupes infinis de transformations", Ann. Ec. Norm. Sup. 22 (1905).
31. E. C a r t a n. „Sur la structure des groupes infinis de transformations", Ann. Ec. Norm. Sup. 25 (1908).
32. E. C a r t a n. „Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée", Ann. Ec. Norm. Sup. 40 (1923).
33. E. C a r t a n. „Des espaces à connexion conforme", Annales de la Soc. Polonaise de Math. (1923).
34. E. C a r t a n. „Sur les variétés à connexion projective", Bull. de la Soc. Math. de France, 42 (1924).
35. Z. E i s e n h a r t. „Non-Riemannien Geometry".
36. S t. G o l a b. „Über den Begriff der Pseudogruppe von Transformationen", Math. Ann., 116 (1939).
37. K. Y a n o. „On harmonie and Killing vector Fields", Ann. of Math., 55 (1952).
38. A. Z i c h n e r o w i c z. „Sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes et kähleriennes".
39. J. I c h o u t e n. „On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear displacement", Proc. Acad. von Weten te Amsterdam, 27 (1924).
40. J. I c h o u t e n. „Erlanger Programm und Uebertragungslehre", Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 50 (1926).
41. T. T h o m a s. „On the projective and equi-projective geometries of paths", Proc. Not. Acad. Sci. U.S.A., 11 (1925).
42. O. V e b l e n. „Differential Invariants and Geometry", Atti del Congresso Internationale dei Matematici, Bologna 1 (1928).
43. J. A. S c h o u t e n und v a n D. D a n t z i g. „Generalle Feldtheorie", III, 7 Zs. f. Phys. 78, стр. 639—667 (1932).
44. J. A. S c h o u t e n und J. H a a t j e s. „Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie", Compositio Math. 3, стр. 1—51 (1932).
45. T. J. T h o m a s. „The differential invariants of generalized spaces", Cambr. Univ. Press., стр. 251 (1934).
46. V a n D. D a n t z i g. „Theorie des projektiven Zusammenhangs n-dimensionaler Räume", Math. Ann. 106, стр. 400—454 (1936).
47. O. V e b l e n and J. M. T h o m a s. „Projective invariants of affine geometry of path.", Ann. of Math., 27, стр. 278—296 (1926).
48. O. V e b l e n. „A generalization of the quadratic differential form", The Quarterly J. of Math. Oxford Series., 60—76 (1930).
49. O. V e b l e n. „Projektive Relativitätstheorie" (1931).
50. H. W e y l. „On the foundations of general infinitesimal geometry". Bull. Amer. Math. Soc., 35, стр. 716—725 (1929).

LOKALINĖS CENTRO-PROJEKTYVINĖS ERDVĖS IR DIFERENCIJUOTINĖS DAUGDAROS SĄRYŠIAI

V. G. LEMLEINAS

(R e z i u m ė)

Šiame straipsnyje konstruojama bendroji centro-projektyvinių transformacijų teorija punktorių $\{P^n\}$ erdvėse išilgai (pagal) bet kokios diferencijuotinės daugdaros kreivės.

Straipsnis susideda iš šešių dalių. Pirmoje dalyje duodama invariantinio diferencijavimo tiesinių trupmeninių transformacijų pseudogrupės atžvilgiu aparato konstrukcija ir įvedami geometriniai objektai, surišti su projektyvinėmis ir ekviprojektyvinėmis Vebleno — Uaithedo erdvėmis.

Antroje dalyje nagrinėjamos punktorių $\{P^n\}$ erdvės ir visų dualinių kopunktorių $\{Q^n\}$ erdvės.

Trečioje dalyje konstruojamas centroprojektyvinio sąryšio objektas (Γ^i_{jk}, Γ_{lm}), susietas su punktorių erdvių centro-projektyvinių transformacijų trečios eilės diferencialine aplinka.

Ketvirtoje dalyje yra įvedama projektyvinė metrika lokalinėse punktorių erdvėse. Tos metrikos dėka jos tampa simetrinėmis projektyviniai-euklidinėmis erdvėmis. Tai duoda galimybę pilnai išsiaiškinti ekviprojektyvinio kreivumo tenzoriaus geometrinę reikšmę.

Penktoji dalis yra skirta nagrinėjimui kai kurių afininio sąryšio erdvių specialiose lokaliniai-projektyvinėse koordinatėse. Tarp kitko, čia yra nagrinėjamos kintamo kreivumo (teigiamo ar neigiamo) erdvės, į kurias lokaliniai gali būti žiūrima kaip į klasikines Rymano ir Lobačevskio erdves.

Šeštoje dalyje kalbama apie erdvės su centro-projektyviniu sąryšiu, priklausančiu nuo trečios eilės diferencialinės aplinkos konstruavimą, pasinaudojant invariantiniu algebriniu metodu, kuris remiasi nuoseklių pratęsimų ir vienų geometrinių objektų apgaubimo kitais, teorija. Šiuo atveju nagrinėjamoji erdvė laikoma daugdara panardinta įvaizdinėje, pratęstos analizinių transformacijų pseudogrupės, erdvėje.

Pirmos šešios dalys yra parašytos tenzorinio metodo pagalba (nors yra būtina nagrinėti geometrinius objektus dar sudėtingesnės prigimties).

Šeštoji dalis parašyta išorinių diferencialinių formų metodo pagalba.

LOCAL CENTER-PROJECTIVE SPACES AND CONNECTIVITIES OF A DIFFERENTIABLE MANIFOLD

V. G. LEMLEIN

(*Summary*)

This article contains the construction of the general theory of the center-projective transfers of the spaces of punktors $\{P^n\}$ along any curve of the differentiable manifold.

The article consist of six chapters. The first chapter gives the construction of the apparatus of invariant differentiation with respect to a pseudogroup of fractional linear transformations and introduces the number of geometric object connected with the projective and equiprojective spaces of Veblen—Whitehead.

The second chapter is concerped with the consideration of the spaces of punctors $\{P^n\}$ and dual spaces of copunctors $\{Q^n\}$.

The object of the third chapter is the construction of the object of centreprojective connectivity (Γ^i_{jk}, Γ_{lm}) from the differential neighbourhood of the III order defining the center-projective transfers of the spaces of punctors.

In the fourth chapter into the local spaces of punctors is introduced a projective metric. It convers the minto simmetrical projectively-euclidean spaces. This gives possibility to completely explain the geometric meanino of the equiprojective curvature tensor.

The fifth chapter is devoted to consideration of certain types of affinely connected spaces in the special locally projective coordinates. In particular the spaces of variable (positive and negative) curvature which are established locally as the classical spaces of Riemann and Lobachevsky are considered here.

The sixth chapter deals with the construction of a space with centroprojective connectivity from the differential neighbourhood of the III-order by means of the invariant algebraic method based on the theory of the consecutive continuations and enveloppments of one geometric objects by others. In this case the investigating space appears to be a manifold immersed in the space of representation of a continued pseudogroup of analytic transformations.

First five chapters are written by means of the tensor method (though it is necessary to consider the geometric objects of a more complex nature).

The sixth chapter is written by means of the metbod of exterior differential forms.