IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

ТЕОРЕМА БАНАХА ОБ ОБРАТНОЙ ОПЕРАЦИИ В ПСЕВДОНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. ДЕКСНИТЕ

Наша задача – доказать теорему Банаха об обратной операции в псевдонормированных пространствах. В настоящей статье линейное множество X называется *псевдонормированным пространством* [1], если каждому $x \in X$ соответствует действительное число $\|x\|$ (называемое псевдонормой) такое, что

1) $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\|=0$ эквивалентно $x=0$;
2) $\|\lambda x\|=|\lambda| \, \|x\|$ для любых комплексных чисел λ и $x \in X$;
3) существует константа C, $C \geqslant 1$, тахая, что

$$\|x+y\| \leqslant C\left(\|x\|+\|y\|\right)$$

для любых x, $y \in X$. C назовем характеристической константой пространства X.

Определения, употребляемые при исследовании нормированных пространств, могут быть очевидным способом (заменяя слово „норма“ словом „псевдонорма“) применены и для псевдонормированных пространств [2].

1. Докажем вспомогательное неравенство. Если ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \ldots \tag{1}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\| = C\|x_1\| + C^2\|x_2\| + \cdots + C^k\|x_k\| + \cdots \tag{2}$$

сходятся, то справедливо такое неравенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|. \tag{3}$$

Действительно, если воспользоваться аксиомой 3) псевдонормированного пространства, то

$$\|x_1+x_2\| \leqslant C\|x_1\| + C\|x_2\|,$$

$$\|x_1+x_2+x_3\| \leqslant C\|x_1\| + C\|x_2+x_3\| \leqslant C\|x_1\| + C^2\|x_2\| + C^2\|x_3\|$$

и т. д. По методу полной математической индукции

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} C^k \|x_k\|.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$, получим требуемое неравенство.

В полном псевдонормированном пространстве, если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1) и справедлива оценка (3). Доказывается аналогично, как и в нормированных пространствах (см. [2], 57 стр.).

2. Пусть имеются два псевдонормированных пространства X и Y. Операция U отображает пространство X на Y. Для того, чтобы существовала линейная обратная U^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы

$$\| U(x) \| \geqslant m \| x \|, \qquad (x \in X),$$

где $m > 0$ не зависит от x (см. [2], 419 стр.)

3. Сформулируем определения фактор-пространства и гомоморфной операции для псевдонормированных пространств (см. [2], 423 стр.).

Пусть X псевдонормированное пространство, X_0 — его подпространство. Объединим элементы из X в классы, относя два элемента x' и x'' в один класс, если $x' - x'' \in X_0$.

Пусть $\bar{x}$ — один из классов и $x \in \bar{x}$, то из определения следует, что $\bar{x} = x + X_0$. Множество всех классов обозначим через X/X_0. Если положить для $\bar{x} \in X/X_0$

$$\| \bar{x} \| = \inf_{x \in \bar{x}} \| x \|,$$

то X/X_0 превращается в псевдонормированное пространство. Так построенное псевдонормированное пространство X/X_0 называется фактор-пространством пространства X по подпространству X_0.

Сопоставляя каждому $x \in X$ класс $\bar{x} = x + X_0 = \varphi(x)$, содержащий этот элемент, мы получим операцию φ, которая называется естественным гомоморфизмом пространства X на фактор-пространство X/X_0. Операция φ обладает свойством, приближающим ее к операциям, имеющим линейную обратную. Очевидно, для $\bar{x} \in X/X_0$ найдётся такой элемент $x \in X$, что

$$\bar{x} = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \| \bar{x} \| \geqslant \frac{1}{2} \| x \|. \tag{4}$$

Пусть имеются два псевдонормированных пространства X и Y и линейная операция U отображает X в Y. Множество $X_0 = U^{-1}(0)$ — подпространство пространства X. Образуем фактор-пространство $\bar{X} = X/X_0$. Пусть $\bar{x} \in \bar{X}$; положим

$$\bar{U}(\bar{x}) = U(x)$$

для произвольного $x \in \bar{x}$. Легко показать, что определение элемента $\bar{U}(\bar{x})$ не зависит от выбора элемента $x \in \bar{x}$. Так определенная операция $\bar{U}$ отображает пространство $\bar{X}$ в Y. В отличие от операции U операция $\bar{U}$ осуществляет взаимно однозначное отображение.

Когда U отображает X на Y, то $\bar{U}$ отображает $\bar{X}$ на Y. Если при этом существует линейная обратная $\bar{U}^{-1}$, то пространства X и Y называются гомоморфными, а операция U — гомоморфизмом пространства X на Y.

Лемма 1. *Для того, чтобы U было гомоморфизмом пространства X на Y, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:*

1. $U(X) = Y$;

2. *существует* $m > 0$ *такое, что для каждого* $y \in Y$ *найдется* $x \in X$ *такой, что*

$$y = U(x), \qquad \|y\| \geqslant m \|x\|.$$

Необходимость. Пусть U гомоморфизм, тогда первое условие очевидно выполнено. В соответствии с (4) можно выбрать $x \in \bar{x} = \bar{U}^{-1}(y)$ так, чтобы

$$\|x\| \leqslant 2\|\bar{x}\| \leqslant 2\|\bar{U}^{-1}\| \, \|y\|,$$

т. е.

$$\|y\| \geqslant m\|x\| \qquad \left(m = \frac{1}{2\|\bar{U}^{-1}\|}\right).$$

Достаточность. Пусть оба условия выполнены. Из первого получаем $\bar{U}(\bar{X}) = Y$.

Пусть $\bar{x} \in \bar{X}$; по элементу $y = \bar{U}(\bar{x})$ найдем элемент $x \in X$ в соответствии со вторым условием. Поскольку

$$U(x) = y = \bar{U}(\bar{x}),$$

то

$$\|\bar{U}(\bar{x})\| = \|y\| \geqslant m\|x\| \geqslant m\|\bar{x}\|.$$

Это неравенство вместе с соотношением $\bar{U}(\bar{X}) = Y$ обеспечивает существование линейной операции $\bar{U}^{-1}$.

Лемма 2. *Пусть U — линейная операция, преображающая полное псевдонормированное пространство X в псевдонормированное пространство Y. C — характеристическая константа пространства X. Тогда, если образ $U(K)$ единичной сферы K (с центром в нуле) пространства X плотен в сфере S_r радиуса r (также с центром в нуле) пространства Y, то U является гомоморфизмом пространства X на пространство Y. В частности, если отображение, осуществляемое операцией U, взаимно однозначно, то существует линейная двусторонняя обратная операция U^{-1}.*

Проверим выполнение двух условий предыдущей леммы. Очевидно, можно считать сферы K и S_r замкнутыми. Докажем, что

$$U(K) \supset S_{\frac{r}{2}}.$$

Возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} C^k \varepsilon_{k-1} \leqslant 1$. Рассмотрим $y \in S_r$. Из определения плотного множества следует, что $\overline{U(K)} \supset S_r$, то найдется $y_1 \in U(K)$ такой, что

$$\|y - y_1\| \leqslant \varepsilon_1 r. \tag{5}$$

Обозначим через x элемент из K такой, что $y_1 = U(x_1)$. Пусть K_h — замкнутая сфера пространства X радиуса h (с центром в нуле). Из условия леммы вытекает, что $\overline{U(K_h)} \supset S_{hr}$. Следовательно, поскольку элемент $y - y_1 \in S_{\varepsilon_1 r}$, то найдется элемент $x_2 \in K_{\varepsilon_1}$ такой, что

$$\|y - (y_1 + y_2)\| \leqslant \varepsilon_2 r \qquad \left(y_2 = U(x_2)\right).$$

Продолжая рассуждать, найдем две последовательности $\{y_n\} \subset Y$ и $\{x_n\} \subset X$ такие, что

$$y_n = U(x_n), \qquad x_n \in K_{\varepsilon_{n-1}} \qquad \left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| \leqslant \varepsilon_n r. \tag{6}$$

$$(n = 1,\ 2,\ \ldots; \qquad \varepsilon_0 = 1).$$

Так как $\|x_n\| \leqslant \varepsilon_{n-1}$, то

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} C^k \varepsilon_{k-1}.$$

Поскольку пространство X полное, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится. Обозначим через x сумму этого ряда, тогда

$$\|x\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} C^k \varepsilon_{k-1} \leqslant 2,$$

т. е. $x \in K_2$ и

$$U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Но из (6) ясно, что $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = y$, поэтому $y = U(x)$. Итак, доказали, что $U(K_2) \supset S_r$, что равносильно соотношению (5).

Так как из (5) следует, что $U(K_n) \supset S_{\frac{nr}{2}}$, то

$$U(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(K_n) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\frac{nr}{2}} = Y.$$

Первое условие выполнено.

Если $y \neq 0$ произвольный элемент из Y, то элемент

$$y' = \frac{r}{2\|y\|} \cdot y \in S_{\frac{r}{2}}$$

и в силу (5) можно указать элемент $x' \in K$ такой, что $y' = U(x')$. Полагая $x = \frac{2\|y\|}{r} x'$, будем иметь

$$U(x) = y, \qquad \|x\| = \frac{2}{r}\|y\| \, \|x'\| \leqslant \frac{2}{r}\|y\|.$$

Выполнено и второе условие. Лемма доказана.

Теорема Банаха. *Если множество $U(X)$ второй категории в пространстве Y, то выполнено условие леммы и, следовательно, операция U есть гомоморфизм пространства X на Y. C — характеристическая константа пространства X.*

Докажем, что если условие леммы не выполнено, то множество $U(K$ нигде не плотно. Предполагая противное, найдем сферу $S(y_0, r)$ в пространстве Y (с центром в точке $y_0 \in Y$, радиуса r) такую, что

$$\overline{U(K)} \supset S(y_0, r).$$

Множество $U(K)$ симметрично, т. е. если $y \in U(K)$, то и $-y \in U(K)$. Действительно, если $y \in U(K)$, то существует $x \in K$ такой, что $U(x) = y$. Но и элемент $-x \in K$, поэтому $U(-x) \in U(K)$, $U(-x) = -U(x) = -y$, итак, $-y \in U(K)$. Замыкание $\overline{U(K)}$ также, очевидно, симметрично, тогда и

$$\overline{U(K)} \supset S(-y_0, r).$$

Возьмем $y \in S_r$ (сфера с центром в нуле и радиусом r). Элементы

$$y_1 = y_0 + y \in S(y_0, r) \subset \overline{U(K)}$$

и

$$y_2 = y_0 + y \in S(-y_0, r) \subset \overline{U(K)}.$$

Обозначим через K_c сферу пространства X (с центром в нуле, радиуса C). Докажем, что

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \in \overline{U(K_c)}.$$

Поскольку элемент $y_1 \in U(K)$, то $y_1 = \lim\limits_{n\to\infty} y_1^{(n)} \left(y_1^{(n)} \in U(K)\right)$ и существует $x_1^{(n)} \in K$ такой, что

$$U(x_1^{(n)}) = y_1^{(n)}.$$

Итак,

$$y_1 = \lim_{n\to\infty} U(x_1^{(n)})$$

и аналогично

$$y_2 = \lim_{n\to\infty} U(x_2^{(n)}) \qquad (x_2^{(n)} \in K),$$

а

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} U(x_1^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} U(x_2^{(n)})\right] = \lim_{n\to\infty} U\left(\frac{x_1^{(n)} + x_2^{(n)}}{2}\right).$$

Но элемент $\frac{x_1^{(n)} + x_2^{(n)}}{2} \in K_C$. Действительно, если $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)} \in K$, то

$$\left\| \frac{x_1^{(n)} + x_2^{(n)}}{2} \right\| \leqslant \frac{C}{2}\left(\| x_1^{(n)} \| + \| x_2^{(n)} \|\right) < C.$$

Тогда

$$U\left(\frac{x_1^{(n)} + x_2^{(n)}}{2}\right) \in U(K_c)$$

и

$$y = \lim_{n\to\infty} U\left(\frac{x_1^{(n)} + x_2^{(n)}}{2}\right) \in \overline{U(K_c)}.$$

Таким образом $\overline{U(K_C)} \supset S_r$, следовательно, $\overline{U(K)} \supset S_{\frac{r}{c}}$. Получили, что выполнены условия леммы. Итак, доказали, что если условие леммы не выполнено, то множество $U(K)$ нигде не плотно. Таким же будет и любое из множеств $U(K_n)$. K_n – сфера пространства X с центром в нуле, радиуса n $(n = 1, 2, \ldots)$. Но

$$U(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(K_n),$$

и мы получаем, что множество $U(X)$ первой категории. Теорема доказана.

Следствие. *Если линейная операция U осуществляет взаимно однозначное отображение полного псевдонормированного пространства X на подпространство полного псевдонормированного пространства Y, то обратная операция U^{-1} линейна. Доказывается аналогично, как и в нормированных пространствах* (см. [2], 426 стр.).

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
7.XII.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Кабайла. Интерполяционные последовательности в классе H_p, $p<1$, Лит. мат. сб., 1963.
2. Л. В. Канторович и В. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Москва, 1959.

BANACHO TEOREMA APIE ATVIRKŠTINĮ OPERATORIŲ PSEUDONORMUOTOJE ERDVĖJE

M. DEKSNYTĖ

(Reziumė)

Šiame straipsnyje įrodoma pseudonormuotose erdvėse, t. y. erdvėse analogiškose normuotoms, kur trikampio nelygybė pakeičiama bendresne $\|x+y\|\leqslant C(\|x\|+\|y\|)$, $C\geqslant 1$, teorema apie atvirkštinį operatorių.

DER SATZ ÜBER DEN REZIPROKEN OPERATOR IN DEN PSEUDOGENORMTEN RÄUMEN

M. DEKSNYTĖ

(Zusammenfassung)

In diesem Artikel beweist man den Satz über den reziproken Operator in den pseudonormierten Räumen, d. h. in den Räumen, die analogisch den normierten Räumen sind, in denen die Ungleichung des Dreieckes durch die verallgemeinerte Ungleichung $\|x+y\|\leqslant C(\|x\|+\|y\|)$, $C\geqslant 1$ ersetzt ist.