IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1964

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Н. КАЛИНАУСКАЙТЕ

Пусть имеется устойчивый процесс, т. е. однородный случайный процесс $\{\xi(t),\ 0<t<\infty\}$ с независимыми приращениями $\xi(t)-\xi(s)$, $(0\leqslant s\leqslant t<\infty)$, характеристическая функция которого имеет вид

$$f\Big(u,\quad \xi(t)-\xi(s)\Big)=\exp\left\{-(t-s)\,|u|^{\alpha}\left[1+i\beta\frac{u}{|u|}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}\,\alpha\right]\right\}, \tag{1}$$

где постоянные $\alpha$ и $\beta$ такие, что $0<\alpha<2$, $\alpha\neq 1$, $-1\leqslant\beta\leqslant 1$.

А. Я. Хинчин рассматривал верхние и нижние функции устойчивого случайного процесса в том случае, когда плотность устойчивого закона (1) $p(x,\ \alpha,\ \beta)$ убывает как $\frac{1}{|x|^{\alpha}}$ при $x\to\pm\infty$, т. е. в случае $-1<\beta<1$ (см. 2). Приведем результаты А. Я. Хинчина. Через $g(t)$ обозначим положительную неубывающую функцию.

1. Пусть при $t\to 0$ монотонно $g(t)\to 0$ и $t^{-\frac{1}{\alpha}}g(t)\to+\infty$. Тогда для того, чтобы вероятность выполнения неравенства $|\xi(t)|\leqslant g(t)$ для всех $t\in(0,\ \tau)$ стремилась к 1 при $\tau\to 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_0^1\frac{dt}{g^{\alpha}(t)}<\infty.$$

2. Пусть при $t\to\infty$ монотонно $t^{-\frac{1}{\alpha}}g(t)\to\infty$. Тогда для того, чтобы вероятность выполнения неравенства $|\xi(t)|\leqslant g(t)$ для всех $t>\tau$ стремилась к 1 при $\tau\to\infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dt}{g^{\alpha}(t)}<\infty.$$

В. Феллер (см. 4) показал, что соответствующий критерий имеет место и в случае сумм независимых случайных величин, имеющих конечную дисперсию. Т. Сирао (см. 6) обобщил результат В. Феллера на случай однородных случайных процессов с независимыми приращениями и с конечной дисперсией. Мириам Липшутц (см. 5) получила некоторые критерии для положительных независимых одинаково распределенных случайных величин.

Таким образом, отсутствует критерий для верхних и нижних функций как в интегральной, так и в локальной постановке вопроса, для устойчивых процессов в случае $1<\alpha<2$, $\beta=-1$ и $0<\alpha<1$, $\beta=1$, т. е., когда плотность приращения имеет показательный порядок убывания.

Заполнению этих пробелов и посвящается наша заметка.

**Теорема 1.** *Пусть имеется устойчивый процесс с характеристической функцией* (1) *и с* $1<\alpha<2$, $\beta=-1$, *и* $\psi(t)$ *монотонно возрастающая положительная функция. Тогда:*

а) *с вероятностью* 1 *множество* $\left\{t:\xi(t)>t^{\frac{1}{\alpha}}\psi\left(\frac{1}{t}\right)\right\}$ *тогда и только тогда ограничено, когда*

$$I_1(\psi)=\int_0^{\infty}\frac{1}{t}\psi^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}(t)\exp\left[-B'(\alpha)\psi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t)\right]dt<\infty;$$

б) *с вероятностью* 1 *множество* $\left\{t:\xi(t)>t^{\frac{1}{\alpha}}\psi\left(\frac{1}{t}\right),\ 0<t\leqslant 1\right\}$ *отделено от нуля* (т. е. замыкание этого множества не содержит нуля), *если интеграл*

$$I_2(\psi)=\int_0^1\frac{\psi^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\exp\left[-B'(\alpha)\psi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(\frac{1}{t}\right)\right]dt<\infty$$

*и неотделено, если* $I_2(\varphi)=\infty$.

**Теорема 2.** *Пусть имеется устойчивый процесс с параметрами* $0<\alpha<1$, $\beta=1$ *и* $\varphi(t)$ *монотонно убывающая положительная функция. Тогда:*

а) *с вероятностью* 1 *множество* $\left\{t:\xi(t)<t^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t)\right\}$ *ограничено или неограничено в зависимости от сходимости или расходимости интеграла*

$$I_3(\varphi)=\int_1^{\infty}\frac{1}{t}\varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t)\exp\left[-B(\alpha)\varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t)\right]dt;$$

б) *с вероятностью* 1 *множество* $\left\{t:\xi(t)<t^{\frac{1}{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{t}\right),\ 0<t<1\right\}$ *отделёно или неотделено от нуля в зависимости от сходимости или расходимости интеграла*

$$I_4(\varphi)=\int_0^1\frac{1}{t}\varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(\frac{1}{t}\right)\exp\left[-B(\alpha)\varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(\frac{1}{t}\right)\right]\cdot dt.$$

Метод доказательства основан на применении обобщенной К. Л. Чжуном и П. Эрдешом леммы Бореля — Кантелли (см. 3) и использовании некоторых идей Т. Сирао, В. Феллера, М. Липшутц.

Автор приносит глубокую благодарность В. М. Золотареву и В. А. Статулявичюсу за ценные указания при решении данной задачи.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
18.IV.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин. Две теоремы о стохастических процессах с однотипными приращениями, Матем. сб., Н. С., Т. **3**, 1938, 577—584.
2. А. В. Скороход. Асимптотические формулы для устойчивых законов распределения, ДАН СССР, Т. **98**, № 5, 1954, 731—734.
3. K. L. Chung, P. Erdos. On the application of the Borel—Cantelli lemma. Trans. Amer. Math. Soc., vol. **72**, 1952, p. 179.

4. W. Feller. The general form of the so called law of the iterated logarithm, Trans• Amer. Math. Soc., vol. 54, 1943, p. 373.
5. M. Lipschutz. On strong bounds for sums of independen random variables which tend to a stable distribution, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 81, 1956, pp. 153–154.
6. T. Sirao. On some asymptotic properties concerning homogeneous differential processes. Nagoya Math. J. B. vol. 6, 1953, pp. 95–107.

## KAI KURIOS ATSITIKTINIŲ STABILIŲ PROCESŲ SAVYBĖS

N. KALINAUSKAITĖ

*(Reziumė)*

Straipsnyje pateikiami kriterijai atsitiktinių stabilių procesų viršutinėms. ir apatinėms funkcijoms.

## ON SOME PROPERTIES OF THE STABLE STOCHASTIC PROCESSES

N. KALINAUSKAITĖ

*(Summary)*

The paper presents the upper bounds for stable process with parameters $1<\alpha<2$, $\beta=-1$ and lower bounds for process with $0<\alpha<1$, $\beta=1$.