V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1

1965

К ТЕОРИИ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВА ОПОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. И. БЛИЗНИКАС

Ковариантное дифференцирование, начало которого разработано ещё в работах Риччи и Леви—Чивита, послужило основой в развитии тензорных методов дифференциальной геометрии. В начале эти методы применялись только в римановых пространствах, а затем в пространствах аффинной, проективной, конформной и иных связностей.

Аппарат ковариантного дифференцирования для пространств линейных элементов, пространств Финслера, пространств Схоутена—Хантьеса и пространств Картана был построен в работах Тейлора, Синга, Бервальда, Э. Картана, В. В. Вагнера, А. Кавагути и др.

В 1946 г. Б. Л. Лаптев ввёл понятие пространства опорных элементов [3], частными случаями которого являются пространства Финслера, Э. Картана, Кавагути и др. Б. Л. Лаптев построил операцию дифференцирования Ли в общем пространстве опорных элементов и изучил основные свойства этой операции [3], [4], [5]. В работах Б. Л. Лаптева введена аффинная связность в пространстве тензорных опорных элементов (см. [4], [5]).

В заметке [1] введена центро-проективная связность в пространство центральных копункторов.

В этой статье вводится аффинная связность в произвольное пространство опорных элементов, рассматривается инвариантное дифференцирование для тензоров первого и второго рода, а также и различные тензоры кривизны.

Основные результаты этой статьи доложены автором на научно-исследовательском семинаре при кафедре геометрии Казанского Государственного университета и на научно-исследовательском семинаре при кафедре дифференциальной геометрии Московского Государственного университета.

§ 1. Пространство опорных элементов

Пусть V_n есть некоторое n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^r, которое мы будем в дальнейшем называть базой (или базисным пространством). Допустимые преобразования координат многообразия V_n

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i) \tag{1}$$

$(i, j, k = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, N; \quad a, b, c = 1, 2, \ldots, p)$

образуют псевдогруппу класса C^r. С каждой точкой (x^i) базы V_n мы можем ассоциировать касательное пространство p-го порядка $T_{np}(x)$, где $r-p>0$ и $\dim T_{np}(x)=np$. Координаты элементов пространства $T^*_{np}(x)$, т. е. пространства, дуального к $T_{np}(x)$, или пространства дифференциалов $(dx^i,\ d^2x^i,\ \ldots,\ d^px^i)$, преобразуются следующим образом [2]:

$$d^a x^{i'} = a! \sum_{s=1}^{a} \frac{1}{s!} x^{i'}_{i_1\ldots i_s} \sum_{(a_1+a_2+\ldots+a_s=a)} \frac{1}{a_1!\ldots a_s!} d^{a_1}x^{i_1}\ldots d^{a_s}x^{i_s}, \tag{2}$$

где

$$x^{i'}_{i_1\ldots i_a} = \frac{\partial^a x^{i'}}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_a}}, \qquad x^{i}_{i'_1\ldots i'_a} = \frac{\partial^a x^{i}}{\partial x^{i'_1}\ldots\partial x^{i'_a}}.$$

Фундаментальная группа пространства $T_{np}(x)$ является $R_p = n\binom{n+p}{n} - n$-параметрической группой Ли, т. е. дифференциальной группой $D^{(n,p)}_{R_p}$ порядка p.

Каждой точке (x^i) пространства V_n ассоциируем пространство значений дифференциально-геометрического объекта

$$y^{\alpha'} = y^{\alpha'}(y^\alpha,\ x^{i'}_{i_1},\ \ldots,\ x^{i'}_{i_1\ldots i_p}), \tag{3}$$

гомеоморфное N-мерной области евклидова пространства. Множество всех этих пространств V_n, ассоциированных точкам пространства V_n, называется пространством опорных элементов $V_{n,N}$ [4]. Пространство $V_{n,N}$ можно рассматривать и как составное многообразие $V_N(V_n)$ в смысле В. В. Вагнера [2], допустимые преобразования координат которого имеют вид (1) и (2), т. е. псевдогруппа преобразований координат пространства $V_{n,N}$ содержит в качестве псевдоподгруппы псевдогруппу преобразований координат базы V_n.

С каждым опорным элементом $(x,\ y)$, т. е. с каждой точкой пространства $V_{n,N}$, ассоциируются два векторные пространства:

1. Касательное векторное пространство $T_{n+N}(x,\ y)$, изоморфное пространству операторов $\{X_i,\ Y_\alpha\}$, где

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}. \tag{4}$$

2. Касательное дуальное векторное пространство $T^*_{n+N}(x,\ y)$, натуральный корепер (или натуральный дуальный базис) которого $\{dx^i,\ dy^\alpha\}$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
y^{\alpha'}_{\alpha_1\ldots\alpha_a} = \frac{\partial^a y^{\alpha'}}{\partial y^{\alpha_1}\ldots\partial y^{\alpha_a}}, \qquad y^{\alpha}_{\alpha'_1\ldots\alpha'_a} = \frac{\partial^a y^{\alpha}}{\partial y^{\alpha'_1}\ldots\partial y^{\alpha'_a}},\\
y^{\alpha'}_k = \sum_{a=1}^{p} \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial x^{i'}_{i_1\ldots i_a}} x^{i'}_{i_1\ldots i_a k}, \qquad y^{\alpha}_{k'} = \sum_{a=1}^{p} \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}_{i'_1\ldots i'_a}} x^{i}_{i'_1\ldots i'_a k'},\\
y^{\alpha'}_{\beta k} = \sum_{a=1}^{p} \frac{\partial^2 y^{\alpha}}{\partial y^{\beta}\,\partial x^{i'}_{i_1\ldots i_a}} x^{i'}_{i_1\ldots i_a k}, \qquad y^{\alpha}_{\beta' k'} = \sum_{a=1}^{p} \frac{\partial^2 y^{\alpha}}{\partial y^{\beta'}\,\partial x^{i}_{i'_1\ldots i'_a}} x^{i}_{i'_1\ldots i'_a k'}.
\end{gathered} \tag{5}$$

Оказывается, что

$$\begin{gathered}
x^{i'}_j x^i_{i'} = \delta^i_j, \qquad x^{i'}_i x^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'},\\
y^{\alpha'}_\beta y^\alpha_{\alpha'} = \delta^\alpha_\beta, \qquad y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'},\\
x^{k'}_{ij} = -x^{k'}_k x^{i'}_i x^{j'}_j x^k_{i'j'}, \qquad x^k_{i'j'} = -x^k_{k'} x^i_{i'} x^j_{j'} x^{k'}_{ij},
\end{gathered} \tag{6}$$

$$y^{\alpha'}_{\beta\gamma} = -y^{\alpha'}_{\alpha} y^{\beta'}_{\beta} y^{\gamma'}_{\gamma} y^{\alpha}_{\beta'\gamma'}, \qquad y^{\alpha}_{\beta'\gamma'} = -y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\beta}_{\beta'} y^{\gamma}_{\gamma'} y^{\alpha'}_{\beta\gamma},$$
$$y^{\alpha}_{i'} = -y^{\alpha}_{\alpha'} x^{i}_{i'} y^{\alpha'}_{i}, \qquad y^{\alpha'}_{i} = -y^{\alpha'}_{\alpha} x^{i'}_{i} y^{\alpha}_{i'},$$
$$y^{\alpha}_{\beta' i'} = -x^{i}_{i'} (y^{\alpha}_{\alpha'\beta'} y^{\alpha'}_{i} + y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{\beta i} y^{\beta}_{\beta'}).$$

Группа $g(x, y)$ преобразований пространства $T^*_{n+N}(x, y)$ является подгруппой группы $GL(n+N)$, т. е. прямому и обратному преобразованию соответствуют матрицы A и A^{-1}:

$$A = \begin{Vmatrix} x^{i'}_{i} & 0 \\ y^{\alpha'}_{i} & y^{\alpha'}_{\alpha} \end{Vmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{Vmatrix} x^{i}_{i'} & 0 \\ y^{\alpha}_{i'} & y^{\alpha}_{\alpha'} \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Если (e_i, e_α) — натуральный репер пространства $T_{n+N}(x, y)$, то его векторы при преобразованиях группы $g(x, y)$ преобразуются по закону:

$$e_{i'} = x^{i}_{i'} e_i + y^{\alpha}_{i'} e_\alpha, \qquad e_{\alpha'} = y^{\alpha}_{\alpha'} e_\alpha, \tag{8}$$

т. е. векторы e_α образуют натуральный репер инвариантного подпространства $T_N(x, y)$ пространства $T_{n+N}(x, y)$. Подпространство $T^*_n(x, y)$, натуральный корепер которого имеет вид (dx^i), является инвариантным подпространством пространства $T^*_{n+N}(x, y)$.

Пространство опорных элементов можно рассматривать как расслоенное многообразие $E(V_n, F, G^*, p, H)$ в смысле А. Лихнеровича [7] (или как произведение в смысле Эресмана—Фельдбау [9]), где V_n — база, F — стандартный слой ($F = V_N|_{x=x_0}$), G^* — структурная псевдогруппа слоя F, преобразования которой имеют вид

$$y^{\alpha'} \doteq y^{\alpha'}(y^\alpha, x^{i'}_{i_1}, \ldots, x^{i'}_{i_1 \ldots i_p})|_{x=x_0},$$

p — каноническая проекция:

$$p: E \to V_n$$

и H — семейство гомеоморфизмов:

$$h \in H, \quad h: F \leftrightarrow F_{x_1}, \quad F_{x_1} = V_n|_{x=x_1}.$$

Пространство $T_N(x, y)$ является касательным пространством слоя F_x расслоенного пространства E, т. е. N-мерным инволютивным распределением касательного пространства $T_{n+N}(x, y)$. Через $T_n(x)$ и $T^*_n(x)$ обозначим касательное векторное пространство и дуальное касательное векторное пространство точки (x^i) базы V_n.

§ 2. Линейная дифференциально-геометрическая связность составного многообразия $V_N(V_n)$

Касательное пространство $T_{n+N}(x, y)$ будем называть оснащенным, если в нем задано подпространство $T_n(x, y)$, инвариантное относительно преобразований группы $g(x, y)$. Пространство $T_{n+N}(x, y)$ является оснащенным тогда и только тогда, когда систему линейных дифференциальных операторов $\{Y_\alpha\}$ можно дополнить такими n линейно независимыми дифференциальными операторами

$$Z_i = X_i - \Gamma^\alpha_i Y_\alpha,$$

чтобы коммутаторы $[Z_i, Y_\alpha]$ разлагались только по операторам Z_i. Векторы E_i:

$$E_i = e_i - \Gamma^\alpha_i e_\alpha, \tag{9}$$

соответствующие операторам Z_i, образуют базис n-мерного инвариантного подпространства $T_n(x, y)$ пространства $T_{n+N}(x, y)$ тогда и только тогда, когда функции $\Gamma^\alpha_i(x, y)$ при преобразованиях группы $g(x, y)$ преобразуются по транзитивному закону

$$\Gamma^{\alpha'}_{i'} = x^i_{i'}(-y^{\alpha'}_i + y^{\alpha'}_\alpha \Gamma^\alpha_i). \tag{10}$$

Очевидно, что

$$T_{n+N}(x, y) = T_n(x, y) \dot{+} T_N(x, y). \tag{11}$$

Таким образом касательные пространства $\{T_{n+N}(x, y)\}$ являются оснащенными тогда и только тогда, когда на многообразии $V_{n,N}$ задано поле дифференциально-геометрического объекта Γ^α_i, компоненты которого при преобразованиях (1) и (3) преобразуются по закону (10). Этот объект является объектом линейной дифференциально-геометрической связности [2] составного многообразия $V_N(V_n)$, а также и объектом инфинитезимальной связности на расслоенном пространстве [7].

Если $T_{n+N}(x, y)$ – оснащенное пространство, то дуальное пространство $T^*_{n+N}(x, y)$ также является оснащенным, т. е. в нем существует линейно независимая система пфаффовых форм

$$\Theta^\alpha = dy^\alpha + \Gamma^\alpha_k dx^k, \tag{12}$$

которая и определяет базис пространства $T^*_N(x, y)$. Таким образом оснащение пространства $T_{n+N}(x, y)$ индуцирует вполне определенное оснащение дуального пространства $T^*_{n+N}(x, y)$ и наоборот. Это оснащение так же индуцирует вполне определенные оснащения и в произвольные тензорные степени касательных пространств $T_{n+N}(x, y)$ и $T^*_{n+N}(x, y)$. В этом случае вектор первого рода в смысле Б. Л. Лаптева [5] является горизонтальным вектором, т. е. вектором горизонтального касательного пространотва $T_n(x, y)$, а вектор второго рода – вертикальным вектором, т. е. вектором вертикального пространства $T_N(x, y)$.

Так как $p^i(x, y) = x^i$, то каноническая проекция p определяет линейное отображение (изоморфизм) пространства $T_n(x, y)$ на $T_n(x)$.

§ 3. Горизонтальные и вертикальные связности пространства опорных элементов

Если пространства $\{T_{n+N}(x, y)\}$ оснащенны, то составное многообразие $T_{n+N}(V_{n,N})$ является прямой суммой составных многообразий $T_n(V_{n,N})$ и $T_N(V_{n,N})$:

$$T_{n+N}(V_{n,N}) = T_n(V_{n,N}) \dot{+} T_n(V_{n,N}). \tag{13}$$

Составное многообразие $T_n(V_{n,N})$ будем называть горизонтальным составным многообразием пространства опорных элементов $V_{n,N}$, а $T_N(V_{n,N})$ – вертикальным составным многообразием этого же пространства. Многообразия $T^*_n(V_{n,N})$ и $T^*_N(V_{n,N})$ являются расслоенными дифференциальными структурами, присоединенными к пространству опорных элементов $V_{n,N}$ в смысле Г. Ф. Лаптева [6].

Б. Л. Лаптев доказал [5], что в случае пространства тензорных опорных элементов отображение касательного пространства бесконечно близкого опорного элемента $(x+dx, y+dy)$ на касательное пространство исходного элемента (x, y), т. е. аффинная связность в пространстве опорных тензорных элементов, может быть установлена, если построить ковариантный дифференциал поля тензора первого рода. Такая связность определяется при помощи объекта аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x, y)$ и тензора $C^{ii_1\ldots i_r}_{jj_1\ldots j_s}$, если опорный объект является r-раз ковариантным и s-раз контравариантным тензором. В этом случае связность, определяемая объектами Γ^i_{jk} и $C^{ii_1\ldots i_r}_{jj_1\ldots j_s}$, порождает оснащение пространства дифференциалов (dx, dy), где y — тензор. Если y — произвольный дифференциально-геометрический объект, то векторы второго рода не являются тензорами первого рода и задание отображении касательного пространства $T_{n+N}(x, y)$ не индуцирует оснащения пространств $T_{n+N}(x, y)$.

Определим инвариантное дифференцирование векторных полей, определенных на $V_{n,N}$, таким образом, чтобы инвариантный дифференциал горизонтального (вертикального) векторного поля был бы горизонтальным (вертикальным) вектором. Дифференциально-геометрический объект $\Gamma^i_{kp}(x, y)$ и $C^i_{k\alpha}(x, y)$, при помощи которого определяется инвариантный дифференциал горизонтального векторного поля $\xi^i(x, y)$ следующим образом

$$D\xi^i = d\xi^i + \xi^k(\Gamma^i_{kp}\,dx^p + C^i_{k\alpha}\,\Theta^\alpha), \qquad (14)$$

будем называть объектом горизонтальной аффинной связности пространства опорных элементов $V_{n,N}$. Если $\xi^i(x, y)$ горизонтальное векторное поле, то $D\xi^i$ является горизонтальным вектором тогда и только тогда, когда

$$D\xi^{i'} = x^{i'}_i\,D\xi^i, \qquad (15)$$

т. е., когда дифференциально-геометрический объект $\Gamma^i_{kp}(x, y)$ и $C^i_{k\alpha}(x, y)$ имеет следующую структуру:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = x^{i'}_i\,(x^i_{j'k'} + x^j_{j'}\,x^k_{k'}\,\Gamma^i_{jk}) \qquad (16)$$

и

$$C^{i'}_{j'\alpha'} = x^{i'}_i\,x^j_{j'}\,y^\alpha_{\alpha'}\,C^i_{j\alpha}, \qquad (17)$$

т. е. Γ^i_{jk} — объект аффинной связности и C^i_{jk} — обобщенный тензор.

Инвариантный дифференциал вертикального векторного поля $\xi^\alpha(x, y)$ определим следующим образом:

$$D\xi^\alpha = d\xi^\alpha + \xi^\beta(\Gamma^\alpha_{\beta k}\,dx^k + C^\alpha_{\beta\gamma}\,\Theta^\gamma). \qquad (18)$$

Величины $D\xi^\alpha$ являются вертикальным вектором тогда и только тогда, когда

$$D\xi^{\alpha'} = y^{\alpha'}_\alpha\,D\xi^\alpha, \qquad (19)$$

т. е., когда система величин $\Gamma^\alpha_{\beta i}(x, y)$ и $C^\alpha_{\beta\gamma}(x, y)$ преобразуется по следующему закону:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'k'} = y^{\alpha'}_\alpha\,y^\alpha_{\beta'k'} + y^{\alpha'}_\alpha\,y^\beta_{\beta'}\,x^k_{k'}\,\Gamma^\alpha_{\beta k} + y^{\alpha'}_\alpha\,y^\alpha_{\beta'\gamma'}\,x^k_{k'}\,(y^{\gamma'}_k - y^{\gamma'}_\gamma\,\Gamma^\gamma_k) \qquad (20)$$

и

$$C^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = y^{\alpha'}_\alpha\,(y^\alpha_{\beta'\gamma'} + y^\beta_{\beta'}\,y^\gamma_{\gamma'}\,C^\alpha_{\beta\gamma}). \qquad (21)$$

Дифференциально-геометрический объект $\Gamma^\alpha_i(x, y)$, $\Gamma^\alpha_{\beta k}(x, y)$ и $C^\alpha_{\beta\gamma}(x, y)$ будем называть объектом вертикальной аффинной связности пространства $V_{n,N}$. Дифференциально-геометрический объект $\Gamma^\alpha_i(x, y)$, $\Gamma^i_{jk}(x, y)$, $\Gamma^\alpha_{\beta k}(x, y)$, $C^i_{j\alpha}(x, y)$ и $C^\alpha_{\beta\gamma}(x, y)$ будем называть объектом расщепленной аффинной связности пространства $V_{n,N}$. Если $C^i_{j\alpha} = 0$, то объект расщепленной аффинной связности будем называть объектом усеченной связности пространства $V_{n,N}$.

Если ввести формы

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k + C_{j\alpha}^i \Theta^\alpha \tag{22}$$

и

$$\omega_\beta^\alpha = \Gamma_{\beta k}^\alpha dx^k + C_{\beta\gamma}^\alpha \Theta^\gamma, \tag{23}$$

то инвариантный дифференциал любого тензорного поля $T^{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\beta_r}(x,\ y)$ можно представить в виде

$$DT^{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\beta_r} = dT^{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\beta_r} + \sum_{a=1}^{p} T^{i_1\ldots k\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\beta_r}\omega_k^{i_a} +$$

$$+ \ldots - \sum_{a=1}^{r} T^{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_r}\omega_{\beta_a}^{\sigma}. \tag{24}$$

Если $T^{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\beta_r}(x,\ y)$ является относительным тензором двойного веса, т. е. его компоненты преобразуются по закону

$$T^{i_1'\ldots i_p'\alpha_1'\ldots\alpha_s'}_{j_1'\ldots j_q'\beta_1'\ldots\beta_r'} = (\det\|x_i^{i'}\|)^P(\det\|y_\alpha^{\alpha'}\|)^Q \times$$

$$\times x_{i_1}^{i_1'}\ldots x_{i_p}^{i_p'}x_{j_1'}^{j_1}\ldots x_{j_q'}^{j_q}y_{\alpha_1}^{\alpha_1'}\ldots y_{\beta_r'}^{\beta_r}T^{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\beta_r},$$

где P и Q — целые числа, то инвариантный дифференциал имеет вид

$$DT^{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\beta_r} = dT^{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\beta_r} + \sum_{a=1}^{p} T^{i_1\ldots k\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\beta_r}\omega_k^{i_a} +$$

$$+ \ldots - \sum_{a=1}^{r} T^{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_r}\omega_{\beta_a}^{\sigma} + (P\omega_k^k + Q\omega_\alpha^\alpha)T^{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\beta_r}. \tag{24'}$$

Дифференцируя (10), в силу (5) и (6) мы получим, что величины $\partial_\beta\Gamma_i^\alpha$ $\left(\partial_\beta = \frac{\partial}{\partial y^\beta},\ \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ преобразуются по закону (20), т. е. Γ_i^α и $\partial_\beta\Gamma_i^\alpha$ образуют такой же дифференциально-геометрический объект как и величины Γ_i^α и $\Gamma_{\beta i}^\alpha$. Объект Γ_i^α и $\partial_\beta\Gamma_i^\alpha$ будем называть объектом индуцированной вертикальной аффинной связности пространства $V_{n,N}$.

§ 4. Лифты и геодезические кривые

Так как между касательными пространствами $T_n(x)$ и $T_n(x,\ y)$ каноническая проекция p устанавливает изоморфизм, то любому векторному полю $X^i(x)$ многообразия $T_n(V_n)$ соответствует единственное векторное поле $^*X^i(x,\ y)$ многообразия $T_n(V_{n,N})$. В этом случае векторное поле $^*X^i(x,\ y)$ называется лифтом векторного поля $X^i(x)$. Лифтом кривой $K: x^i = x^i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, базы V_n называется такая кривая $K^*: x^i = x^i(t)$, $y^\alpha = y^\alpha(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, пространства* $V_{n,N}$, касательный вектор которой горизонтальный [8]. Так как касательный вектор τ произвольной кривой $K_y: x^i = x^i(t)$, $y^\alpha = y^\alpha(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, пространства $V_{n,N}$ (однопараметрического семейства опорных элементов многообразия $V_{n,N}$) имеет вид

$$\tau = \tau^i \mathbf{E}_i + \tau^\alpha \mathbf{e}_\alpha,$$

где

$$\tau^i = \frac{dx^i}{dt}, \qquad \tau^\alpha = \frac{dy^\alpha}{dt} + \Gamma_k^\alpha\left(x(t),\ y\right)\frac{dx^k}{dt},$$

* Пространство $V_{n,N}$ рассматривается как расслоенное многообразие E. В. В. Вагнер лифт называет постоянным полем локальных точек [2].

то кривая K_y будет горизонтальной тогда и только тогда, когда

$$\frac{dy^\alpha}{dt}+\Gamma^\alpha_k\frac{dx^k}{dt}=0, \tag{25}$$

т.е., когда функции $y^\alpha(t)$ являются решением системы (25) (считаем, что функции $x^i(t)$ известны). Таким образом, любая кривая $K\subset V_n$ имеет единственный лифт K^*, проходящий через данный опорный элемент $(x^i_0,\ y^\alpha_0)$, где $x^i_0=x^i(0),\ y^\alpha_0=y^\alpha(0)$.

Кривую K_y пространства опорных элементов $V_{n,N}$ назовем вертикальной геодезической кривой пространства $V_{n,N}$, если инвариантный дифференциал вертикальной части касательного вектора равен нулю, т. е.

$$\frac{d\tau^\alpha}{dt}+\Gamma^\alpha_{\beta i}\tau^\beta\frac{dx^i}{dt}+C^\alpha_{\beta\gamma}\tau^\beta\tau^\gamma=0. \tag{26}$$

Вертикальным геодезическим лифтом кривой $K\subset V_n$ назовем такую кривую $K^*_y\subset V_{n,N}$, инвариантный дифференциал вертикальной части касательного вектора которой равен нулю. Систему дифференциальных уравненый (26) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2y^\alpha}{dt^2}+C^\alpha_{(\beta\gamma)}\frac{dy^\beta}{dt}\frac{dy^\gamma}{dt}+(\partial_\beta\Gamma^\alpha_k+\Gamma^\alpha_{\beta k}+C^\alpha_{(\beta\gamma)}\Gamma^\gamma_k)\frac{dy^\beta}{dt}\frac{dx^k}{dt}+$$
$$+(\partial_{(k}\Gamma^\alpha_{p)}+\Gamma^\alpha_{\beta(k}\Gamma^\beta_{p)}+C^\alpha_{(\beta\gamma)}\Gamma^\beta_k\Gamma^\gamma_p)\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^p}{dt}+\Gamma^\alpha_k\frac{d^2x^k}{dt^2}=0. \tag{27}$$

Отсюда следует, что для любой кривой базы V_n, принадлежащей классу C^3, существует единственный вертикальный геодезический лифт K^*_y, проходящий через опорный элемент $(x^i_0,\ y^\alpha_0)$ в вертикальном направлении τ^α_0. Очевидно, что вертикальный геодезический лифт точки x^i_0 (предполагается, что базисная кривая стягивается в точку) является геодезической кривой слоя V_N, проходящей через опорный элемент $(x^i_0,\ y^\alpha_0)$ в направлении $\left.\frac{dy^\alpha}{dt}\right|_0=\tau^\alpha_0$. Любой лифт кривой K является её вертикальным геодезическим лифтом, ибо уравнения (26) имеют и нулевое решение.

Кривую K_y пространства $V_{n,N}$ будем называть горизонтальной геодезической кривой, если она горизонтальна и если её касательный вектор инвариантно постоянный. Эти кривые являются аналогами квазигеодезических кривых пространства Финслера [10]. Очевидно, что геодезические кривые пространства $V_{n,N}$ являются решением системы

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{(kp)}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^p}{dt}=0,\\&\frac{dy^\alpha}{dt}+\Gamma^\alpha_k\frac{dx^k}{dt}=0.\end{aligned} \tag{28}$$

Отсюда следует, что через данный опорный элемент $(x^i_0,\ y^\alpha_0)$ по данному горизонтальному направлению τ^i_0 проходит единственная геодезическая кривая. Отметим, что система дифференциальных уравнений (28) зависит только от симметрической части объекта аффинной связности Γ^i_{jk} и не зависит от тензора $C^i_{j\alpha}$. Кроме того, эта система инвариантна относительно преобразований (1), (3) и относительно линейного преобразования параметра t с постоянными коэффициентами a и b:

$$\tilde t=at+b.$$

Если все рассматриваемые функции класса C^{ω}, то решение системы (28), подчиненное начальным условиям

$$t=0, \quad x^i=x_0^i, \quad y^\alpha=y_0^\alpha, \quad \frac{dx^i}{dt}=\tau_0^i,$$

можно представить в виде степенных рядов. Для получения этих рядов, мы постепенно продифференцируем по t уравнения (28). Тогда получим следующую последовательность уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d^a x^i}{dt^a}+\Gamma^i_{i_1\ldots i_a}\frac{dx^{i_1}}{dt}\cdots\frac{dx^{i_a}}{dt}=0,\\ &\frac{d^{a-1}y^\alpha}{dt^{a-1}}+\Gamma^\alpha_{i_1\ldots i_{a-1}}\frac{dx^{i_1}}{dt}\cdots\frac{dx^{i_{a-1}}}{dt}=0, \qquad (a=3,\ 4,\ \ldots), \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} &\Gamma^i_{i_1\ldots i_{a+1}}=\partial_{(i_1}\Gamma^i_{i_2\ldots i_{a+1})}-a\Gamma^i_{k(i_1\ldots i_{a-1}}\Gamma^k_{i_a i_{a+1})}-\partial_\beta\Gamma^i_{(i_1\ldots i_a}\Gamma^\beta_{i_{a+1})},\\ &\Gamma^\alpha_{i_1\ldots i_{a+1}}=\partial_{(i_1}\Gamma^\alpha_{i_2\ldots i_{a+1})}-a\Gamma^\alpha_{k(i_1\ldots i_{a-1}}\Gamma^k_{i_a i_{a+1})}-\partial_\beta\Gamma^\alpha_{(i_1\ldots i_a}\Gamma^\beta_{i_{a+1})}. \end{aligned} \tag{30}$$

Таким образом, решение системы (28) имеет вид:

$$\begin{aligned} &x^i=x_0^i+\tau_0^i t-\sum_{a=2}^{\infty}\frac{1}{a!}(\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{i_1\ldots i_a}\tau_0^{i_1}\cdots\tau_0^{i_a})\,t^a,\\ &y^\alpha=y_0^\alpha-\sum_{a=0}^{\infty}\frac{1}{a!}(\overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{i_1\ldots i_a}\tau_0^{i_1}\cdots\tau_0^{i_a})\,t^a, \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{i_1\ldots i_a}=\Gamma^i_{i_1\ldots i_a}\Big|_{t=0}, \qquad \overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{i_1\ldots i_a}=\Gamma^\alpha_{i_1\ldots i_a}\Big|_{t=0}.$$

В базисном пространстве V_n выполним следующее преобразование координат $x\to\bar{x}$:

$$x^i=x_0^i+\bar{x}^i-\sum_{a=2}^{\infty}\frac{1}{a!}\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{i_1\ldots i_a}\bar{x}^{i_1}\cdots\bar{x}^{i_a}. \tag{32}$$

В новой системе координат $\bar{x}$ конечные уравнения (31) примут следующий простой вид:

$$\bar{x}^i=\tau_0^i t. \tag{33}$$

Итак, в области сходимости ряда (32) и ряда

$$y^\alpha=y_0^\alpha-\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a!}\overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{i_1\ldots i_a}\bar{x}^{i_1}\cdots\bar{x}^{i_a}, \tag{34}$$

через заданный опорный элемент $(x_0^i,\ y_0^\alpha)$ и произвольную точку (x^i) базы V_n проходит только одна горизонтальная геодезическая кривая. Полученная система координат является аналогом аффинно-нормальной системы координат пространства опорных тензорных элементов [5]. Систему координат, в которой решение системы (28) имеет вид (33) и (34), назовем горизонтальной аффинно-нормальной системой координат, соответствующей исходной системе координат и данному опорному элементу. В горизонтальной аффинно-нормальной системе координат компоненты симметрической части объекта Γ^i_{jk} равны нулю. При этих координат можно ввести понятие горизонтально-аффинных расширений и горизонтально-аффинных тензоров пространства $V_{n,N}$.

Кривую K_y пространства $V_{n,N}$ будем называть геодезической кривой, если её касательный вектор τ обладает свойствами

$$D\tau^i=0, \qquad D\tau^\alpha=0, \tag{35}$$

т. е.

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{(jk)}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}+C^i_{j\alpha}\tau^\alpha\frac{dx^j}{dt}=0 \tag{36}$$

и

$$\frac{d\tau^\alpha}{dt}+\Gamma^\alpha_{\beta k}\tau^\beta\frac{dx^k}{dt}+C^\alpha_{(\beta\gamma)}\tau^\beta\tau^\gamma=0. \tag{37}$$

Таким образом, любая горизонтальная геодезическая кривая является геодезической кривой. Уравнения (36) и (37) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d^2 x^i}{dx^2}+\{\Gamma^i_{(jk)}+C^i_{(j|\alpha|}\Gamma^\alpha_{k)}\}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}+C^i_{j\alpha}\frac{dy^\alpha}{dt}\frac{dx^j}{dt}=0 \tag{38}$$

и

$$\frac{d^2 y^\alpha}{dt^2}+C^\alpha_{(\beta\gamma)}\frac{dy^\beta}{dt}\frac{dy^\gamma}{dt}+\{\partial_\beta\Gamma^\alpha_k+\Gamma^\alpha_{\beta k}+C^\alpha_{(\beta\gamma)}\Gamma^\gamma_k-\Gamma^\alpha_s C^s_{k\beta}\}\frac{dy^\beta}{dt}\frac{dx^k}{dt}+$$

$$+\{\partial_{(k}\Gamma^\alpha_{p)}+\Gamma^\alpha_{\beta(k}\Gamma^\beta_{p)}+C^\alpha_{(\beta\gamma)}\Gamma^\beta_k\Gamma^\gamma_p-\Gamma^\alpha_s\Gamma^s_{(kp)}-\Gamma^\alpha_s C^s_{(k|\beta|}\Gamma^\beta_{p)}\}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^p}{dt}=0. \tag{39}$$

Отсюда следует, что через заданный опорный элемент (x^i_0, y^α_0) по заданному невырожденному направлению τ_0 проходит единственная геодезическая кривая пространства $V_{n,N}$. Система дифференциальных уравнений (38) и (39) инвариантна относительно преобразований (1), (3) и линейной замены параметра: $\bar t=at+b$.

При помощи усеченного объекта индуцированной вертикальной связности можно установить инвариантное дифференцирование вертикальных векторных полей, определенных вдоль лифтов базисных кривых. Дифференциально-геометрический объект Γ^α_i, $\Gamma^\alpha_{\beta k}$, $C^\alpha_{\beta\gamma}$ (или Γ^α_i, $\partial_\beta\Gamma^\alpha_i$, $C^\alpha_{\beta\gamma}$) устанавливает в вертикальном составном многообразии инвариантное дифференцирование векторных полей, заданных вдоль произвольных кривых многообразия $V_{n,N}$.

§ 5. Пфаффовые производные

Если $f(x, y)$ скалярная функция класса C^2, определенная на $V_{n,N}$, то коэффициенты линейного разложения дифференциала этой функции через формы dx^i и Θ^α:

$$df=\overset{\Gamma}{\partial}_i f dx^i+\overset{\Gamma}{\partial}_\alpha f\Theta^\alpha, \tag{40}$$

где

$$\overset{\Gamma}{\partial}_i f=\frac{\partial f}{dx^i}-\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\Gamma^\alpha_i, \qquad \overset{\Gamma}{\partial}_\alpha f=\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}, \tag{41}$$

называются пфаффовыми производными рассматриваемой функции. Пфаффовые производные (как первого, так и второго рода) скалярной функции являются тензорами. В нашем случае кратные пфаффовые производные второго рода всегда симметричны. Для кососимметрической части вторых пфаффовых производных первого рода имеет место следующая формула:

$$\overset{\Gamma}{\partial}_{[i}\overset{\Gamma}{\partial}_{j]}f=\overset{\Gamma}{\partial}_\alpha f R^\alpha_{ij}, \tag{42}$$

$$R^\alpha_{ij}=2\{\partial_{[i}\Gamma^\alpha_{j]}-\partial_\beta\Gamma^\alpha_{[i}\Gamma^\beta_{j]}\}. \tag{43}$$

Из формулы (42) следует, что величины R^{α}_{ij} образуют тензор. Этот тензор будем называть тензором кривизны связности Γ^{α}_{i}. Если $R^{\alpha}_{ij}=0$, то вторые пфаффовые производные первого рода симметричны (для любой скалярной функции). Следует заметить, что пфаффовые производные тензорных полей не всегда являются тензорами. Если $R^{\alpha}_{ij}=0$, то существует такая система координат, в которой $\Gamma^{\alpha}_{i}=0$. В этом случае линейная дифференциально-геометрическая связность называется плоской связностью (связностью нулевой кривизны).

§ 6. Инвариантные производные и тождества Риччи

Формулы (14) и (18) можно переписать следующим образом

$$D\xi^{i}=\nabla_{k}\xi^{i}\,dx^{k}+\nabla_{\alpha}\xi^{i}\,\Theta^{\alpha} \tag{44}$$

и

$$D\xi^{\alpha}=\nabla_{k}\xi^{\alpha}\,dx^{k}+\nabla_{\beta}\xi^{\alpha}\,\Theta^{\beta}, \tag{45}$$

где

$$\nabla_{k}\xi^{i}=\overset{\Gamma}{\partial}_{k}\xi^{i}+\xi^{p}\,\Gamma^{i}_{pk},\qquad \nabla_{\alpha}\xi^{i}=\overset{\Gamma}{\partial}_{\alpha}\xi^{i}+\xi^{p}\,C^{i}_{p\alpha}, \tag{46}$$

$$\nabla_{k}\xi^{\alpha}=\overset{\Gamma}{\partial}_{k}\xi^{\alpha}+\xi^{\beta}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta k},\qquad \nabla_{\beta}\xi^{\alpha}=\overset{\Gamma}{\partial}_{\beta}\xi^{\alpha}+\xi^{\gamma}\,C^{\alpha}_{\gamma\beta}. \tag{47}$$

Так как $D\xi^{i}$, $D\xi^{\alpha}$, dx^{i} и Θ^{α} являются тензорами, то величины $\nabla_{k}\xi^{i}$, $\nabla_{\alpha}\xi^{i}$, $\nabla_{k}\xi^{\alpha}$ и $\nabla_{\beta}\xi^{\alpha}$ — тоже являются тензорами, и их будем называть инвариантными производными первого и второго рода рассматриваемых векторов. Аналогично определяются и инвариантные производные тензорного поля (произвольной валентности и произвольного веса).

Альтернирование инвариантных производных второго порядка и первого рода горизонтального векторного поля приводит к следующим тождествам:

$$2\nabla_{[p}\nabla_{k]}\xi^{i}=\xi^{q}R^{i}_{qpk}-\partial_{\sigma}\xi^{i}R^{\sigma}_{pk}-2\nabla_{q}\xi^{i}R^{q}_{kp}, \tag{48}$$

где

$$R^{q}_{kp}=\Gamma^{q}_{[kp]} \tag{49}$$

и

$$R^{i}_{qpk}=2\,(\overset{\Gamma}{\partial}_{[p}\Gamma^{i}_{|q|k]}-\Gamma^{i}_{s[k}\Gamma^{s}_{|q|p]}). \tag{50}$$

Тензор R^{i}_{kp} будем называть тензором горизонтального кручения пространства $V_{n,N}$, а тензор R^{i}_{qpk} — первым тензором горизонтальной кривизны этого же пространства. Тождества (48) будем называть обобщенными тождествами Риччи для альтернирования инвариантных производных первого рода (горизонтальных векторов). Эти тождества для горизонтального тензорного поля $T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}$ имеют вид:

$$2\nabla_{[p}\nabla_{k]}T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}=-\sum_{a=1}^{r}T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots l\ldots i_r}R^{l}_{i_a pk}+$$

$$+\sum_{a=1}^{s}T^{j_1\ldots l\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}R^{j_a}_{lpk}-\partial_{\sigma}T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}R^{\sigma}_{pk}-2\nabla_{q}T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}R^{q}_{kp}. \tag{51}$$

Тождества (48) можно представить в виде:

$$2\nabla_{[p}\nabla_{k]}\xi^{i}=\xi^{q}K^{i}_{qpk}-\nabla_{\sigma}\xi^{i}R^{\sigma}_{pk}+2\nabla_{q}\xi^{i}R^{q}_{pk}, \tag{52}$$

где

$$K^{i}_{qpk}=R^{i}_{qpk}+C^{i}_{q\sigma}R^{\sigma}_{pk}. \tag{53}$$

Тензор K^i_{qpk}, придерживаясь терминологии Б. Л. Лаптева для случая пространств тензорных опорных элементов [5], будем называть первым картановым тензором горизонтальной кривизны пространства $V_{n,N}$.

Вторую группу обобщенных тождеств Риччи мы получим, рассматривая инвариантные производные $\nabla_\beta \nabla_\alpha \xi^i$. В этом случае мы имеем

$$2\nabla_{[\beta}\nabla_{\alpha]}\xi^i = \xi^q R^i_{q\beta\alpha} + 2\partial_\sigma \xi^i R^\sigma_{\beta\alpha}, \tag{54}$$

где

$$R^\gamma_{\alpha\beta} = C^\gamma_{[\alpha\beta]}, \tag{55}$$

$$R^i_{q\alpha\beta} = 2\{\partial_{[\alpha} C^i_{|q|\beta]} + C_{r[\alpha} C^r{}_{q|\beta]} + C^i_{q\gamma} R^\gamma_{\alpha\beta}\}. \tag{56}$$

Тензор $R^\gamma_{\alpha\beta}$ будем называть тензором вертикального кручения пространства $V_{n,N}$, а тензор $R^i_{q\alpha\beta}$ — вторым тензором горизонтальной кривизны. Тождества (54) можно переписать в следующем виде:

$$2\nabla_{[\beta}\nabla_{\alpha]}\xi^i = \xi^q K^i_{q\beta\alpha} - 2\nabla_\gamma \xi^i R^\gamma_{\alpha\beta}, \tag{57}$$

где

$$K^i_{q\alpha\beta} = R^i_{q\alpha\beta} + 2C^i_{q\sigma} R^\sigma_{\alpha\beta} \tag{58}$$

и этот тензор назовем вторым картановым тензором горизонтальной кривизны пространства $V_{n,N}$.

Третью группу обобщенных тождеств Риччи мы получим, рассматривая изменения порядка инвариантного дифференцирования первого рода и частного дифференцирования по опорному объекту (для горизонтальных векторов или тензоров):

$$\partial_\alpha \nabla_k \xi^i - \nabla_k \partial_\alpha \xi^i = -\xi^q L^i_{qk\alpha} + \partial_\gamma \xi^i L^\gamma_{\alpha k}, \tag{59}$$

где

$$L^i_{qk\alpha} = \partial_\alpha \Gamma^i_{qk} \tag{60}$$

и

$$L^\gamma_{\alpha k} = \Gamma^\gamma_{\alpha k} - \partial_\alpha \Gamma^\gamma_k. \tag{61}$$

Тензор $L^\gamma_{\alpha k}$ назовем простейшим тензором кручения пространства $V_{n,N}$, а $L^i_{qk\alpha}$ — простейшим тензором кривизны.

Другой вид третьей группы обобщенных тождеств Риччи мы получим, рассматривая $\nabla_\alpha \nabla_k \xi^i$, т. е.

$$\nabla_\alpha \nabla_k \xi^i - \nabla_k \nabla_\alpha \xi^i = \xi^q R^i_{qk\alpha} + \nabla_q \xi^i C^q_{k\alpha} - \nabla_\sigma \xi^i L^\sigma_{\alpha k}, \tag{62}$$

где

$$R^i_{qk\alpha} = L^i_{qk\alpha} - C^i_{q\sigma} L^\sigma_{k\alpha} - \nabla_k C^i_{q\alpha}, \tag{63}$$

Тензор $R^i_{qk\alpha}$ будем называть третьим картановым тензором горизонтальной кривизны пространства $V_{n,N}$, а $C^i_{k\alpha}$ — тензором кручения этого пространства.

Аналогичные обобщенные тождества Риччи мы получим, рассматривая вторые инвариантные производные вертикального векторного поля ξ^α. Эти тождества имеют вид:

$$2\nabla_{[p}\nabla_{k]}\xi^\alpha = \xi^\sigma R^\alpha_{\sigma pk} - \nabla_\rho \xi^\alpha R^\rho_{pk} + \nabla_q \xi^\alpha R^q_{pk}, \tag{64}$$

$$2\nabla_{[\gamma}\nabla_{\beta]}\xi^\alpha = \xi^\sigma R^\alpha_{\sigma\beta\gamma} - 2\nabla_\sigma \xi^\alpha R^\sigma_{\beta\gamma}, \tag{65}$$

$$\nabla_k \nabla_\beta \xi^\alpha - \nabla_\beta \nabla_k \xi^\alpha = \xi^\sigma R^\alpha_{\sigma k\beta} - \nabla_\sigma \xi^\alpha L^\sigma_{\beta k} + \nabla_q \xi^\alpha C^q_{k\beta}, \tag{66}$$

где

$$R^\alpha_{\sigma pk} = 2\{\overset{\Gamma}{\partial}_{[p} \Gamma^\alpha_{|\sigma|k]} + \Gamma^\alpha_{\rho[p} \Gamma^\rho_{|\sigma|k]} + C^\alpha_{\sigma\rho} R^\rho_{pk}\}, \tag{67}$$

$$R^\alpha_{\sigma\beta\gamma} = 2\{\partial_{[\beta} C^\alpha_{|\sigma|\gamma]} + C^\alpha_{\rho[\beta} C^\rho_{|\sigma|\gamma]}\}, \tag{68}$$

$$R^\alpha_{\sigma k\beta} = \overset{\Gamma}{\partial}_k C^\alpha_{\sigma\beta} + \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\sigma k} + C^\rho_{\sigma\beta} \Gamma^\alpha_{\rho k} - \Gamma^\rho_{\sigma k} C^\alpha_{\rho\beta} + C^\alpha_{\sigma\rho} \partial_\beta \Gamma^\rho_k. \tag{69}$$

Тензор $R^{\alpha}_{\beta pk}$ будем называть первым тензором вертикальной кривизны пространства $V_{n,N}$, $R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}$ — вторым тензором вертикальной кривизны, $R^{\alpha}_{\beta k\varepsilon}$ — третьим тензором вертикальной кривизны. Аналогичные обобщенные тождества Риччи справедливы и для любого тензорного поля произвольной валентности и произвольного веса.

§ 7. Обобщенные тождества Бианки

Рассмотрим вывод аналогов тождеств Бианки для горизонтальных и вертикальных тензоров кривизны. Для этого построим карту пространства опорных элементов с объектом расщепленной аффинной связности, определяя развертку однопараметрического множества опорных элементов

$$x^i = x^i(t), \qquad y^\alpha = y^\alpha(t), \tag{70}$$

т. е. кривой расслоенного пространства E, на $n+N$-мерное аффинное пространство следующими дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} dA &= dx^i E_i + \Theta^\alpha e_\alpha, \\ dE_i &= \omega_i^k E_k, \\ de_\alpha &= \omega_\alpha^\beta e_\beta, \end{aligned} \tag{71}$$

где $\{A, E_i, e_\alpha\}$ — подвижный репер аффинного пространства, изоморфного оснащенному касательному пространству $T_{n,N}(x, y)$ $\big($формы ω_j^i и ω_β^α определены равенствами (22) и (23)$\big)$. При этом отображении горизонтальная часть касательного вектора кривой (71) отображается на вектор, который разлагается только по векторам E_i, а вертикальная часть — на вектор, который разлагается только по векторам e_α.

Если мы рассмотрим бесконечно малый параллелограм опорных элементов (цикл), определенный на двумерном многообразии опорных элементов

$$x^i = x^i(t_1, t_2), \qquad y^\alpha = y^\alpha(t_1, t_2) \tag{72}$$

следующими значениями параметров

$$(t_1, t_2), \quad (t_1+\Delta t_1, t_2), \quad (t_1+\Delta t_1, t_2+\Delta t_2), \quad (t_1, t_2+\Delta t_2),$$

то при его развертывании на аффинное пространство, мы придем к численным значениям следующих внешних форм

$$[\omega_k^i, dx^k], \quad D\Theta^\alpha - [\Theta^\beta, \Theta_\beta^\alpha],$$
$$D\omega_j^i - [\omega_j^k, \omega_k^i], \quad D\Theta_\beta^\alpha - [\Theta_\beta^\gamma, \Theta_\gamma^\alpha].$$

Эти внешние формы характеризуют кручение и кривизну пространства $V_{n,N}$. Выполнив вычисления, мы получим структурные уравнения пространства $V_{n,N}$ с расщепленным объектом аффинной связности

$$\begin{aligned} [dx^k, \omega_k^i] &= \Omega^i, \\ D\Theta^\alpha - [\Theta^\beta, \Theta_\beta^\alpha] &= \Omega^\alpha, \\ D\omega_j^i - [\omega_j^k, \omega_k^i] &= \Omega_j^i, \\ D\Theta_\beta^\alpha - [\Theta_\beta^\gamma, \Theta_\gamma^\alpha] &= \Omega_\beta^\alpha, \end{aligned} \tag{73}$$

где

$$\Omega^i = R^i_{kp}[dx^k, dx^p] + C^i_{k\alpha}[dx^k, \Theta^\alpha],$$

$$\Omega^\alpha = \frac{1}{2} R^\alpha_{kp}[dx^k, dx^p] + L^\alpha_{\beta k}[dx^k, \Theta^\beta] + R^\alpha_{\beta\gamma}[\Theta^\gamma, \Theta^\beta], \tag{74}$$

$$\Omega^i_j=\frac{1}{2}K^i_{jkp}[dx^k,\ dx^p]+R^i_{qk\alpha}[\Theta^\alpha,\ dx^k]+\frac{1}{2}K^i_{j\alpha\beta}[\Theta^\alpha,\ \Theta^\beta],$$

$$\Omega^\alpha_\beta=\frac{1}{2}R^\alpha_{\beta kp}[dx^k,\ dx^p]+R^\alpha_{\beta k\gamma}[\Theta^\gamma,\ dx^k]+\frac{1}{2}R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}[\Theta^\gamma,\ \Theta^\varepsilon].$$

Дифференцируя уравнения (72) внешним образом, мы получим обобщенные тождества Бианки:

$$\begin{aligned}
&D\Omega^i=[\omega^i_p,\ \Omega^p]+[\Omega^i_k,\ dx^k],\\
&D\Omega^\alpha=[\Theta^\beta,\ \Omega^\alpha_\beta]-[\Omega^\beta,\ \Theta^\alpha_\beta],\\
&D\Omega^i_j=[\omega^k_j,\ \Omega^i_k]-[\Omega^k_j,\ \omega^i_k],\\
&D\Omega^\alpha_\beta=[\Theta^\gamma_\beta,\ \Omega^\alpha_\gamma]-[\Omega^\gamma_\beta,\ \Theta^\alpha_\gamma].
\end{aligned}\qquad (75$$

Если мы вдоль цикла выполним последовательное отображение репера $\mathfrak{R}$ пространства $T_{n+N}(x,\ y)$, то в этом же пространстве мы получим образ $\tilde{\mathfrak{R}}$ репера $\mathfrak{R}$. Таким образом, бесконечно малому циклу опорных элементов, проходящему через опорный элемент $(x,\ y)$, соответствует аффинное перемещение пространства $T_{n+N}(x,\ y)$, определенное формами кручения-кривизны:

$$\Omega^i,\ \Omega^\alpha,\ \Omega^i_j\ \text{ и }\ \Omega^\alpha_\beta.$$

Если $\Omega^i=0$ $(\Omega^\alpha=0)$, то вектор, соединяющий вершины реперов $\tilde{\mathfrak{R}}$ и $\mathfrak{R}$, является вертикальным (горизонтальным) вектором. Если $\Omega^i_j=0$ $(\Omega^\alpha_\beta=0)$, то при обходе по любому циклу не меняется оснащение пространства $T_{n+N}(x,\ y)$ $\Big($вертикальное пространство $T_N(x,\ y)$ пространства $T_{n+N}(x,\ y)\Big)$.

Рассмотрим специальные циклы: цикл-лифт, т. е. цикл, образованный из лифта базисного цикла, и слоевой цикл, т. е. цикл, базисная часть которого состоить только из одной точки. В первом случае мы получим репер $\tilde{\mathfrak{R}}^*$, аффинное смещение которого характеризуется следующими значениями форм кручения кривизны:

$$^*\Omega^i=R^i_{kp}[dx^k,\ dx^p],\qquad {}^*\Omega^\alpha=\frac{1}{2}R^\alpha_{kp}[dx^k,\ dx^p],$$

$$^*\Omega^i_j=\frac{1}{2}K^i_{jkp}[dx^k,\ dx^p],\qquad {}^*\Omega^\alpha_\beta=\frac{1}{2}R^\alpha_{\beta kp}[dx^k,\ dx^p].$$

Таким образом, начала реперов $\tilde{\mathfrak{R}}^*$ и $\mathfrak{R}$ совпадают тогда и только тогда, когда $R^i_{kp}=0$, $R^\alpha_{kp}=0$, т. е. когда объект аффинной связности объекта горизонтальной аффинной связности является симметрическим, а линейная дифференциально-геометрическая связность – плоской. Вдоль произвольного цикла-лифта не меняется оснащение пространства $T_{n+N}(x,\ y)$ тогда и только тогда, когда первый картанов тензор горизонтальной кривизны пространства $V_{n,N}$ равен нулю. Вертикальное пространство $T_N(x,\ y)$ пространства $T_{n+N}(x,\ y)$ вдоль цикла-лифта не меняется тогда и только тогда, когда первый тензор вертикальной кривизны равен нулю.

Рассматривая второй случай, т. е. слоевой цикл, мы получим репер $\tilde{\mathfrak{R}}'$, аффинное смещение которого характеризуется следующими значениями форм кручения – кривизны:

$$'\Omega^i=0,\qquad '\Omega^\alpha=-R^\alpha_{\beta\gamma}[\Theta^\beta,\ \Theta^\gamma],$$

$$'\Omega^i_j=\frac{1}{2}K^i_{j\alpha\beta}[\Theta^\alpha,\ \Theta^\beta],\qquad '\Omega^\alpha_\beta=\frac{1}{2}R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}[\Theta^\gamma,\ \Theta^\varepsilon].$$

Отсюда следует, что начала реперов $\tilde{\mathfrak{R}}$ и $\mathfrak{R}$ совпадают тогда и только тогда, когда тензор вертикального кручения пространства $V_{n,N}$ равен нулю. Вдоль слоевого цикла не меняется оснащение пространства $T_{n+N}(x, y)$ тогда и только тогда, когда второй картанов тензор горизонтальной кривизны равен нулю, а вертикальное пространство – когда второй тензор вертикальной кривизны равен нулю.

Аффинное смещение репера $\tilde{\mathfrak{R}}$ является прямым произведением аффинных смещений реперов $\tilde{\mathfrak{R}}^*$ и $\tilde{\mathfrak{R}}'$ тогда и только тогда, когда тензор кручения, тензор простейшего кручения, третий картанов тензор горизонтальной кривизны и третий тензор вертикальной кривизны равны нулю. Если мы рассмотрим аффинное смещение как произведение параллельного переноса, состоящего из горизонтальной и вертикальной части, и аффинного поворота, состоящего так же из горизонтальной и вертикальной части, то получим геометрическую интерпретацию упомянутых тензоров.

Вильнюсский Государственный педагогический институт

Поступило в редакцию 1.VI.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас, О некоторых многообразиях опорных элементов, Лит. мат. сб., 1963, т. 3, № 2, 231–232.
2. В. В. Вагнер, Теория составного многообразия, Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу, 1950, вып. 8, 11–72.
3. Б. Л. Лаптев, Производная Ли в обобщенных пространствах, Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу, 1949, вып. 7, 10.
4. Б. Л. Лаптев, Производная Ли в пространстве опорных элементов, Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу, 1956, вып. 10, 227–248.
5. Б. Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов, Учен. зап. Казанского гос. ун-та, 1958, т. 118, кн. 4, 75–147.
6. Г. Ф. Лаптев, Многообразия, погруженные в обобщенные пространства, Труды Четвертого всесоюзн. мат. съезда, 1964, т. 2, 226–233.
7. А. Лихнерович, Теория связностей в целом и группы голономии, ИИЛ, Москва, 1960.
8. К. Номидзу, Группы Ли и дифференциальная геометрия, ИИЛ, Москва, 1960.
9. C. Ehresmann, J. Feldbau, Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés, C. R. Acad. Sci. Paris, 1941, 212, 948–956.
10. O. Varga, Normálkoordináták általános differenciálgeometiai terekben és ezek alkalmazása a differenciálinvariánsok teljes rendszerének meghatározására, Az első Magyar Matematikai Kongreszus Közleményei, Budapest, 1952, 131–162.

ATRAMINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖS KREIVUMO TEORIJOS KLAUSIMU

V. BLIZNIKAS

(Reziumė)

Diferencijuojamos n-matės daugdaros V_n ir p-tos eilės diferencialinio geometrinio objekto y^α, kurio komponenčių transformacijos dėsnis yra (3) pavidalo, reikšmių erdvės topologinė sandauga vadinama atraminių elementų erdve $V_{n,N}$ [4].

Jeigu $T_{n+N}(x, y)$ – daugdaros $V_{n,N}$ liečiamoji vektorinė erdvė, o $T_N(x, y)$ – erdvės $T_{n+N}(x, y)$ invariantinis poerdvis, tai erdvė $T_{n+N}(x, y)$ bus normalizuota tada ir tik tada, kai ant daugdaros $V_{n,N}$ yra apibrėžtas diferencialinis geometrinis objektas Γ^α_i, kurio kompo-

nenčių transformacijos dėsnis yra (10) pavidalo. Jeigu $T_n(x, y)$-erdvės $T_{n+N}(x, y)$ normalinė erdvė (horizontalinis poerdvis), tai

$$T_{n+N}(x, y) = T_n(x, y) \dotplus T_N(x, y).$$

Erdvės $T_N(x, y)$ vektoriai yra vadinami vertikaliniais, o $T_n(x, y)$ – horizontaliniais vektoriais. Struktūra diferencialinių geometrinių objektų (16), (17), (20), (21) yra tokia, kad jais naudojantis galima apibrėžti invariantinius diferencialus (14) ir (18) horizontalinių bei vertikalinių vektorių.

Išnagrinėtos kai kurios daugdaros $V_{n,N}$ bazinės erdvės kreivių liftų (25) bei vertikalinių liftų (27) savybės. Įvestos horizontalinių ir vertikalinių geodezinių kreivių sąvokos. Įrodyta afininių normalinių koordinačių egzistencija erdvėje $V_{n,N}$.

Surastos apibendrintos Ričio tapatybės (48), (51), (54), (57), (59), (62), (64), (65), (66) pirmos ir antros rūšies invariantinėms išvestinėms. Duotos daugdaros $V_{n,N}$ kreivumo tenzorių (43), (50), (53), (56), (58), (60), (63), (67), (68), (69) ir sukimosi tenzorių (49), (55), (61), (62) geometrinės interpretacijos.

Darbas atliktas tenzoriniu metodu ir yra ankstesnio autoriaus darbo [1] tęsinys.

ZUR KRÜMMUNGSTHEORIE IM STÜTZELEMENTENRAUM

V. BLIZNIKAS

(Zusammenfassung)

Wir legen eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse m zugrunde, die wir noch zu einer Mannigfaltigkeit von Stützelementen erweitern, indem wir in jedem Punkt derselben sämtliche differentialgeometrische Objekte hinzunehmen. Die Koordinaten eines Punktes mögen mit x^i bezeichnet werden, während ein differentialgeometrischer Objekt y^α durch Transformationsgesetz (3) bestimmt ist. Ein Punkt samt einem differentialgeometrischen Objekt (oder kurz Stützelement) soll mit (x^i, y^α) bezeichnet werden. Die Mannigfaltigkeit $V_{n,N}$ von Stützelementen (x^i, y^α) ist eine $(n+N)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Der kontravariante Tangentialraum $T_{n+N}(x, y)$ des Stützelementenraumes $V_{n,N}$ hat einen invarianten Unterraum $T_N(x, y)$ (oder Vertikalraum der Mannigfaltigkeit $V_{n,N}$). Ein Raum $T_{n+N}(x, y)$ ist dann und nur dann normalisierbar, falls in $V_{n,N}$ ein solches Objekt Γ_i^α existiert, dessen Komponenten bei einer zulässigen Koordinatentransformationen (1) und (3) mit Hilfe von Transformationsgesetz (10) transformiert werden. Jede Normalisierung $T_n(x, y)$ von $T_{n+N}(x, y)$, dass die Bedingung

$$T_{n+N}(x, y) = T_n(x, y) \dotplus T_N(x, y)$$

erfühlt ist, heisst Horizontalraum von $V_{n,N}$.

Das invariante Differential eines Horizontalvektors ξ^i ist durch (14) festgelegt, wo Γ_{jk}^i das Objekt von affinen Zusammenhangs und $C_{j\alpha}^i$ das verallgemeinerte Tensor sind. Das invariante Differential eines Vertikalvektors ξ^α ist durch (18) eingeführt, wo $\Gamma_{\beta k}^\alpha$ und $C_{\beta\gamma}^\alpha$ die Transformationsgesetzen (20) und (21) genügen.

Der Begriff der Parallelverschiebung horizontaler und vertikaler Vektoren in Stützelementenraum $V_{n,N}$ mit Zusammenhangsobjekte $(\Gamma_i^\alpha, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{\beta i}^\alpha, C_{j\alpha}^i, C_{\beta\gamma}^\alpha)$ erlaubt die Betrachtung vertikalgeodätischer (oder horizontalgeodätischer) Kurven in diesem Stützelementenraum, deren Vertikaltangentialsvektoren (oder Horizontaltangentialsvektoren) die Gleichung (26) (oder (28)) befriedigen. Die regulären Lösungen der Gleichungen (28) werden, auf Grund dieser Gleichungen selbst, bei Beachtung von Anfangsbedingungen $t=0$, $x^i = x_0^i$, $y^\alpha = y_0^\alpha$ und $\frac{dx^i}{dt} = \tau_0^i$ explizit durch die Reihenentwicklungen (32) und (34) dargestellt. Die durch (33) eingeführten Koordinaten $\bar{x}^i$, die durch Angabe des Stützelementes (x_0^i, y_0^α) eindeutig in einer gewissen Umgebung von x_0^i bestimmt sind, mögen als die zum Stützelement (x_0^i, y_0^α) gehörigen horizontalaffinen Normalkoordinaten bezeichnet werden. Die geodätischen Kurven in dem Stützelementenraum $V_{n,N}$ sind diejenige Kurven, die die Differentialgleichungen (36) und (37) befriedigen.

Die invarianten Ableitungen erster und zweiter Gattung von horizontalen und vertikalen Vektoren sind mit Hilfe der Formeln (46) und (47) bestimmt. Die Identitäten (48), (51), (52), (54), (57), (59), (62), (64), (65) und (66) für Horizontal- und Vertikalvektoren sind die verallgemeinerten Identitäten von Ricci. Die Horizontalkrümmungstensoren des Stützelementenraumes $V_{n,N}$ werden durch die Formeln (43), (50), (56) und (58) eingeführt. Die Einfachrotations- und Einfachkrümmungstensor haben die Form (60) und (61). Die Horizontalrotations- und Vertikalrotationstensoren werden durch die Gleichungen (40) und (55) definiert. Die Vertikalkrümmungstensoren kann man durch die Formeln (67), (68) und (69) bestimmen. Die verallgemeinerten Bianchischen Identitäten (75) für Rotations- und Krümmungsformen des Stützelementenraumes $V_{n,N}$ sind mit Hilfe der Cartanischen Methode abgeleitet.

In diesem Artikel sind auch die geometrischen Interpretationen für alle Rotations- und Krümmungstensoren festgestellt.