V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1

1965

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ТИПА ЛИННИКА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ НА НЕКОТОРЫХ ОБЛАСТЯХ

Л. ВИЛКАУСКАС

В работе рассматриваются большие уклонения типа Ю. В. Линника [1] для $\frac{1}{6} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$ в s-мерном евклидовом пространстве.

Введем следующие обозначения:
малыми жирными буквами будем обозначать векторы-строки, $\boldsymbol{x}'$ – вектор-столбец, $|\boldsymbol{x}|$ – длина вектора, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – скалярное произведение, большими жирными буквами будем обозначать матрицы порядка s, s, $\boldsymbol{C}^{-1}$ – обратная матрица, $\boldsymbol{I}$ – единичная матрица, $|\boldsymbol{C}|$ – детерминант матрицы $\boldsymbol{C}$, B – ограниченная функция рассматриваемых параметров, не всегда одна и та же, $\rho(n)$ – монотонная сколь угодно медленно возрастающая функция, $C_1, C_2, \ldots; c_1, c_2, \ldots$ – абсолютные константы,

$$\Phi(Q;\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{C})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}\sqrt{|\boldsymbol{C}|}}\int\limits_{Q} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})'}\,d\boldsymbol{x}$$

есть значение нормального закона со средним значением $\boldsymbol{a}$ и невырожденной ковариационной матрицей $\boldsymbol{C}$ на некоторой s-мерной области Q.

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов

$$\xi^{(k)}=(\xi_1^{(k)},\ \ldots,\ \xi_s^{(k)}),\qquad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{1}$$

с

$$E\xi^{(k)}=\boldsymbol{o},\quad E\xi_i^{(k)}\cdot\xi_j^{(k)}=\delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $i, j=1, \ldots, s$.

Пусть

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi^{(k)},\qquad Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi^{(k)}, \tag{2}$$

$\{Q_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ – последовательность областей в s-мерном евклидовом пространстве с расстоянием $R(n)$ от начала координат, соответственно, причем

$$R(n)\in\left[0,\ \frac{n^{\alpha}}{\rho(n)}\right],\qquad \frac{1}{6}\leqslant\alpha<\frac{1}{2}.$$

Скажем, что для последовательности (1) имеет место интегральное нормальное притяжение (и.н.п.) на последовательности $\{Q_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, если

$$\frac{P\{Z_n\in Q_n\}}{\Phi(Q_n;\ \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{I})}\to 1,\qquad n\to\infty.$$

Теорема 1. *Рассмотрим ряд*

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p+3},\ \ldots \to \frac{1}{2}$$

и пусть

$$\frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p+3} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}\,\frac{p+2}{p+4}.$$

Если выполнены условия:

1) $E \exp \sum_{i=1}^{s} |\xi_i^{(1)}|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}} < \infty,$

2) *все моменты* $\xi^{(1)}$ *совпадают с моментами нормального закона до* $(p+3)$-*го включительно,*

3) *для последовательности* (1) *существует абсолютно непрерывная компонента, то для последовательности* (1) *имеет место* (и.н.п.) *на последовательности* $\{C_n\}$, $n=1, 2, \ldots,$ *где*

$$C_n = \{x : |x| > R(n)\}, \quad R(n) \in \left[\frac{n^{\frac{1}{6}}}{\rho(n)},\ \frac{n^{\alpha}}{\rho(n)}\right].$$

Назовем последовательность областей $\{Q_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ в s-мерном евклидовом пространстве с расстоянием $R(n)$ от начала координат соответственно последовательностью типа N, если она обладает следующим свойством:

$$\frac{\Phi(V_n;\ o,\ I)}{\Phi(Q_n \cap L_{n3};\ o,\ I)} \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{2.1}$$

где $\{V_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ – последовательность полосок, взятых в доль контуров соответственных областей последовательности $\{Q_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ шириной

$$\frac{1}{n^{\frac{19}{2}-\alpha}\,[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}$$

и

$$L_{n3} = \left\{x : R(n) < |x| \leqslant \frac{n^{3\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}\right\}.$$

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то для последовательности* (1) *имеет место* (и.н.п.) *на последовательности областей типа* N.

Из хода доказательств теорем 1 и 2 нетрудно усмотреть, что требование

$$E\xi_i^{(k)} \cdot \xi_j^{(k)} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, s$$

является несущественным и принимается ради упрощения доказательств. Теоремы 1 и 2 остаются верны и для последовательностей с невырожденной ковариационной матрицей. В этом случае в теореме 1 надо последовательность областей $\{C_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ заменить последовательностью внешностей конфокальных эллипсоидов $\{C_n^*\}$, $n=1, 2, \ldots,$ где

$$C_n^* = \{x : x \cdot C^{-1} \cdot x' \geqslant R^2(n)\},$$

а в теореме 2 $\{L_{n3}\}$, $n=1, 2, \ldots$ заменить $\{L_{n3}^*\}$, $n=1, 2, \ldots,$ где

$$L_{n3}^* = \left\{x : R^2(n) < x \cdot C^{-1} \cdot x' \leqslant \frac{n^{4\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{100}}}\right\}.$$

Заметим, что области типа N охватывают довольно широкий класс областей. Так, например, конечное пересечение выпуклых областей будет принадлежать типу N.

Если для последовательности (1) существует непрерывная ограниченная плотность вероятности, то верна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть*

$$\frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p+3}\leqslant\alpha<\frac{1}{2}\,\frac{p+2}{p+4}$$

и

$$E\exp\sum_{i=1}^{s}|\xi_i^{(1)}|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}<\infty,$$

тогда

$$P\{Z_n\in Q_n\}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{Q_n\cap L_{n1}^{**}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2+n\sum\limits_{k=3}^{p+3}T_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}dx\Big(1+o(1)\Big)+$$

$$+\Phi(Q_n\cap L_{n2}^{**},\ o,\ C)\Big(1+o(1)\Big)+B\exp\left(-c\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right),$$

где

$$L_{n1}^{**}=\left\{x:R(n)\leqslant|x|<\frac{n^{\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}\right\}.$$

$$L_{n2}^{**}=\left\{x:\frac{n^{\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}\leqslant|x|\leqslant\frac{n^{\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{800}}}\right\},$$

$T_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ — *полилинейная форма k-той степени, коэффициенты которой однозначно определяются по плотности вероятности последовательности* (1),

C — *положительная ковариационная матрица, элементы которой полностью определяются 3-тими семиинвариантами последовательности* (1),

c — *положительная абсолютная константа.*

Последняя теорема является s-мерным аналогом одной теоремы В. В. Петрова [8].

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1 и будет помещена в следующем номере журнала.

Доказательство теоремы 1. Докажем две леммы:

Лемма 1. Пусть

$$R(n)>\frac{n^{\alpha}}{\rho(n)},$$

тогда

$$P\Big(|S_n|>\sqrt{n}\,R(n)\Big)<C_1\exp\left(-c_1\frac{n^{2\alpha}}{\rho^2(n)}\right).$$

Лемма нетрудно доказывается методами работы [2].

Лемма 2. Пусть

$$S_n=S_{n_1}+T_{n_1},$$

где

$$S_{n_1}=\sum_{k=1}^{n_1}\xi^{(k)},\quad T_{n_1}=S_n-S_{n_1}$$

и n_1 — натуральное число из интервала $[1, n]$.

Если

$$R(n)>\frac{n^{\alpha}}{\rho(n)},$$

то

$$P\{|S_{n_1}|>\sqrt{n}\,R(n)\}<C_2\exp\left(-c_2\frac{n^{2\alpha}}{\rho^2(n)}\right).$$

Доказательство. Из формулы полной вероятности имеем, что

$$P\left\{|S_n|>\frac{3\sqrt{n}}{4}R(n)\right\}=P\left\{|T_{n_1}|\geqslant\frac{\sqrt{n}}{4}R(n)\right\}\times$$

$$\times P\left\{|S_n|>\frac{3\sqrt{n}}{4}R(n)\,\middle|\,|T_{n_1}|\geqslant\frac{\sqrt{n}}{4}R(n)\right\}+P\left\{|T_{n_1}|<\frac{\sqrt{n}}{4}R(n)\right\}\times$$

$$\times P\left\{|S_n|>\frac{3\sqrt{n}}{4}R(n)\,\middle|\,|T_{n_1}|<\frac{\sqrt{n}}{4}R(n)\right\}.$$

Очевидно

$$P\left\{|S_n|>\frac{3\sqrt{n}}{4}R(n)\right\}\geqslant P\left\{|T_{n_1}|<\frac{\sqrt{n}}{4}R(n)\right\}\times$$

$$\times P\left\{|S_n|>\frac{3\sqrt{n}}{4}R(n)\,\middle|\,|T_{n_1}|<\frac{\sqrt{n}}{4}R(n)\right\}.$$

Из [2] формулы (5) имеем

$$P\{|S_{n_1}|>\sqrt{n}\,R(n)\}\leqslant P\left\{|S_{n_1}+T_{n_1}|>\left(1-\frac{1}{4}\right)\sqrt{n}\,R(n)\,\middle|\,|T_{n_1}|<\frac{\sqrt{n}}{4}R(n)\right\}.$$

Последние два неравенства дают

$$P\left\{|S_n|>\frac{3\sqrt{n}}{4}R(n)\right\}\geqslant P\left\{|T_{n_1}|<\frac{\sqrt{n}}{n}R(n)\right\}\times P\{|S_{n_1}|>\sqrt{n}\,R(n)\}.$$

Применение леммы 1 к последнему неравенству и завершает доказательство.

Доказательство теоремы 1. В ходе доказательства потребуются следующие величины:

а) $\{\xi^{(kn)}\},\qquad k=1,\ \ldots,\ n;\quad n=1,\ 2,\ \ldots$ (3)

— последовательность серий случайных векторов, где

$$\xi^{(kn)}=\xi^{(k)}+\eta^{(n)},\qquad k=1,\ \ldots,\ n.$$

Здесь $\eta^{(n)}$ — нормальный s-мерный вектор с

$$E\eta^{(n)}=o,\quad E\eta_i^{(n)}\cdot\eta_j^{(n)}=\delta_{ij}n^{-20},\qquad i,\ j=1,\ \ldots,\ s. \tag{4}$$

Случайный вектор $\xi^{(kn)}$ уже имеет плотность вероятности $p_{nk}(x)$ и

$$p_{kn}(x)<n^{s\cdot 10},\qquad k=1,\ \ldots,\ n. \tag{5}$$

Пусть

$$S_n'=\sum_{k=1}^{n}\xi^{(kn)},\quad Z_n'=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi^{(kn)}.$$

Нетрудно убедиться, что леммы 1 и 2 действительны и для S_n';

б) h — действительный вектор, удовлетворяющий неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant |h| \leqslant \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}} \tag{6}$$

и

$$e_1(hx) = \begin{cases} e^{(h,x)}, & \text{если} \quad |h|\,|x| \leqslant \dfrac{n^{3\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}, \\ 0, & \text{если} \quad |h|\,|x| > \dfrac{n^{3\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}; \end{cases} \tag{7}$$

в) $\{\bar{\xi}^{(kn)}\}, \qquad k=1, \ldots, n; \quad n=1, 2, \ldots$ (8)

— последовательность серий случайных векторов с общей функцией распределения в каждой серии

$$\frac{1}{K(h)} \int_{-\infty}^{x_1 \ldots x_s} \cdots \int e_1(hx)\, p_{nk}(x)\, dx, \tag{9}$$

где

$$K(h) = \int_{R_s} e_1(hx)\, p_{nk}(x)\, dx. \tag{10}$$

Пусть

$$E\bar{\xi}_i^{(kn)} = m_i(h), \quad E\left(\bar{\xi}_i^{(kn)} - m_i(h)\right)\left(\bar{\xi}_j^{(kn)} - m_j(h)\right) = \sigma_{ij}(h). \tag{11}$$

Ясно, что и для (8) существует вероятностная плотность $\bar{p}_{nk}(x)$, причем

$$\bar{p}_{nk}(x) = Bn^{s\cdot 10}. \tag{12}$$

Пусть, далее,

$$\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}^{(kn)}, \quad \bar{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}^{(kn)}.$$

При доказательстве теоремы применяется метод, полученный Ю. В. Линником, который является видоизменением метода Крамера. Хорошо известное условие Крамера

$$E\exp(h,x) < \infty$$

здесь появляется в виде (10).

Докажем, что

$$K(h) < C_4. \tag{13}$$

Из (10), принимая во внимание (7), получаем, что

$$K(h) = \int\limits_{|x| \leqslant \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}} e^{(h,x)} p_{nk}(x)\, dx + \int\limits_{\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}} < |x| \leqslant \frac{n^{3\alpha}}{|h|\,[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}} e^{(h,x)} p_{nk}(x)\, dx. \tag{14}$$

Второй интеграл в (14) оценивается легко:

$$\int\limits_{\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}<|x|\leqslant\frac{n^{2\alpha}}{|h|[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}} e^{(h,x)} p_{nk}(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}|x|\leqslant\frac{n^{2\alpha}}{|h|[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}} e^{|h||x|} p_{nk}(x)\,dx \leqslant \exp\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}} \int\limits_{|x|>\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}} p_{nk}(x)\,dx. \tag{15}$$

Применяя лемму 2 к (15), получаем, что второй интеграл в (14) не превышает

$$C_3 \exp\left(-c_3 \frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right). \tag{16}$$

Перейдем к оценке первого интеграла в (14). Так как подинтегральная функция всегда положительна, то

$$\int\limits_{|x|\leqslant\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}} e^{(h,x)} p_{nk}(x)\,dx \leqslant \int\limits_{M} e^{(h,x)} p_{nk}(x)\,dx,$$

где

$$M=\left\{x:|x_i|\leqslant\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}, \quad i=1, \ldots, s\right\}.$$

Интеграл по s-мерному кубу M возможно выразить как сумму 2^s интегралов, распространенных соответственно на s-мерных прямоугольниках M_i, $i=1, \ldots, 2^s$ в соответственных квадрантах s-мерного евклидового пространства. Мы проведем оценку только для

$$\int\limits_{M_1} e^{(h,x)} p_{nk}(x)\,dx, \tag{17}$$

где

$$M_1=\left\{x:0\leqslant x_i\leqslant\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}\right\},$$

так как интегралы по остальным M_i, $i=2, \ldots, 2^s$ оцениваются аналогично.

Обозначим

$$w(x)=\int\limits_{x_1}^{\infty}\ldots\int\limits_{x_s} p_{nk}(u)\,du.$$

Заметим, что

$$w(x)=B\exp\left(-\sum_{i=1}^{s}|x_i|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right). \tag{18}$$

Тогда

$$\int\limits_{M_1} e^{(h,x)} p_{nk}(x)\, dx = (-1)^s \cdot \int\limits_{M_1} e^{(h,x)}\, dw(x). \tag{19}$$

К интегралу в правой части (18) будем применять формулу интегрирования по частям. Из [3] имеем

$$\int\limits_{a_1\ldots a_s}^{b_1\ldots b_s}\!\!\ldots\!\int e^{(h,x)}\, dw(x) = [e^{(h,x)} w(x)]_{a_1\ldots a_s}^{b_1\ldots b_s} - \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{a_i}^{b_i} [w(x)\, de^{(h,x)}]_{a_1\ldots a_{i-1},\, a_{i+1},\, \ldots,\, a_s}^{b_1\ldots b_{i-1},\, b_{i+1},\, \ldots,\, b_s} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{s} \int\limits_{a_i}^{b_i}\int\limits_{a_j}^{b_j} [w(x)\, de^{(h,x)}]_{a_1\ldots a_{i-1},\, a_{i+1},\, \ldots,\, a_{j-1},\, a_{j+1},\, \ldots,\, a_s}^{b_1\ldots b_{i-1},\, b_{i+1},\, \ldots,\, b_{j-1},\, b_{j+1},\, \ldots,\, b_s} -$$

$$- \sum_{i,j,k} + \ldots + (-1)^s \int\limits_{a_1\ldots a_s}^{b_1\ldots b_s}\!\!\ldots\!\int w(x)\, de^{(h,x)}, \tag{20}$$

где символ

$$[w(x)]_{a_1\ldots a_s}^{b_1\ldots b_s} = w(b_1, \ldots, b_s) - \sum_{i=1}^{s} w(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \ldots, b_s) +$$

$$+ \sum_{i,j} w(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \ldots, b_{j-1}, a_j, b_{j+1}, \ldots, b_s) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^s w(a_1, \ldots, a_s).$$

Так как нас интересует абсолютная величина интеграла (17), то знак $(-1)^s$ в (19) опустим, и нтеграл (19) будет равняться правой части (19), если заменим

$$a_i = 0, \quad b_i = \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}, \qquad i = 1, \ldots, s. \tag{21}$$

Первый член (20) с учетом обозначений (21) и оценки (18) дает

$$B \exp\left[\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}} \sum_{i=1}^{s} h_i - s \frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{\alpha}{150(1+2\alpha)}}}\right] -$$

$$- \sum_{i=1}^{s} B \exp\left[\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} h_j - (s-1) \frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{\alpha}{150(1+2\alpha)}}}\right] + \ldots + B. \tag{22}$$

Но,

$$\sum_{i=1}^{s} |h_i| \leqslant \sqrt{s}\, |h| \leqslant \sqrt{s}\, \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}},$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} |h_i| \leqslant \sqrt{s-1}\, |h| \leqslant \sqrt{s-1}\, \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}, \tag{23}$$

и т. д.

Подставляя в (22) оценки (23) и учитывая

$$\frac{2L}{600} > \frac{\alpha}{150(1+2\alpha)},$$

получаем, что в экспоненте любого члена (22) будет $-c\dfrac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{\alpha}{150(1+2\alpha)}}}$, где c положительная абсолютная константа. Поэтому (22) не превышает некоторой абсолютной константы.

Второй член (20) с учетом (21) и (18) дает

$$e^{-(s-1)\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{\alpha}{150(1+2\alpha)}}}}\sum_{i=1}^{s} h_i e^{\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} h_j}\int_0^{\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}} e^{-x_i^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}+h_i x_i}\,dx_i+$$

$$+Be^{-(s-2)\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{\alpha}{150(1+2\alpha)}}}}\sum_{i=1}^{s} h_i e^{\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i,\,k}}^{s} h_j}\int_0^{\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}} e^{-x_i^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}+h_i x_i}\,dx_i+$$

$$+\ldots+(-1)^s\sum_{i=1}^{s} h_i\int_0^{\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}} e^{-x_i^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}+h_i x_i}\,dx_i. \qquad (24)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^{\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}} e^{-x_i^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}+h_i x_i}\,dx_i=B. \qquad (25)$$

Учитывая (25) и неравенства (23), для (24) получаем оценку

$$B\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}};$$

Из выражений (24) и (20) нетрудно убедиться, что для последующих членов (20) получим, соответственно, оценки

$$B\frac{n^{2\alpha-1}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{10}}},\quad B\frac{n^{3\alpha-\frac{3}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{3}{20}}}$$

и т. д. Этим и завершается доказательство (13).

Обозначим

$$f_{nn_i}(x)=[p_{n1}(x)]^{*n_i},\quad \bar{f}_{nn_i}(x)=[\bar{p}_{n1}(x)]^{*n_i},$$

$$n^{\frac{s}{2}}f_{nn}(x\sqrt{n})=f^{*}_{nn}(x),\quad n^{\frac{s}{2}}\bar{f}_{nn}(x\sqrt{n})=\bar{f}^{*}_{nn}(x), \qquad (26)$$

где n_i целое $0<n_i\leqslant n$.

Докажем следующее соотношение между вероятностными функциями плотностей определенными (26). Здесь $|x| < n^{\alpha+\frac{1}{2}}[\rho(n)]^{\frac{9}{200}}$

$$\bar{f}_{nn}(x) = K^{-n}(h)\, e_1(hx)\, f_{nn}(x) + \Theta\psi_n, \tag{27}$$

где ψ_n – остаточный член, который определим позже, $|\Theta| < 1$. Из (9) имеем

$$f_{n1}(x) = K^{-1}(h)\, e_1(hx)\, f_{n1}(x). \tag{28}$$

Пусть справедливо

$$\bar{f}_{nn_1}(x) = K^{-n_1}(h)\, e_1(hx)\, f_{nn_1}(x) + \Theta\psi_{n_1} \tag{29}$$

и докажем, что

$$\bar{f}_{n(n_1+1)}(x) = K^{-(n_1+1)}(h)\, e_1(hx)\, f_{n(n_1+1)}(x) + \Theta\psi_{n_1+1}. \tag{30}$$

Из формулы композиции имеем

$$\bar{f}_{n(n_1+1)}(x) = \int\limits_{R_s} f_{nn_1}(x-u)\, f_{n1}(u)\, du. \tag{31}$$

Подставляя (29) и (28) в (31), получаем

$$\bar{f}_{n(n_1+1)}(x) = K^{-(n_1+1)}(h) \int\limits_{R_s} e_1\big(h(x-u)\big)\, e_1(hu)\, f_{nn_1}(x-u) \times$$

$$\times f_{n1}(u)\, du + \Theta\psi_{n_1} K^{-1}(h) \int\limits_{R_s} e_1(hu)\, f_{n1}(u)\, du. \tag{32}$$

Для доказательства (30) надо его первый член в правой части сравнить с

$$K^{-(n_1+1)}(h)\, e_1(hx)\, f_{n(n_1+1)}(x) = K^{-(n_1+1)}(h) \int\limits_{R_s} e_1(hx)\, f_{nn_1}(x-u)\, f_{n1}(u)\, du.$$

Оценим разность

$$K^{-(n_1+1)}(h) \int\limits_{R_s} \Big[e_1\big(h(x-u)\big)\, e_1(hu) - e_1(hx)\Big] f_{nn_1}(x-u)\, f_{n1}(u)\, du.$$

R_s разобъем на множество

$$Q^* = \left\{ u : |u| \leqslant \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{602}}}, \quad |x-u| \leqslant \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{602}}} \right\}$$

и дополнительное множество $\bar{Q}^*$.

Из определения функции $e_1(hx)$ и (6) получаем, что в множестве Q^* выражение в квадратных скобках (33) равняется 0, и (33) остается оценить только по множеству $\bar{Q}^*$. Из (5) и (7) получаем, что (33) не превышает

$$K^{-(n_1+1)}(h)\, n^{s\cdot 10} \exp \frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}} \Bigg[\int\limits_{|x-u| > \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{602}}}} f_{nn_1}(x-u)\, du +$$

$$+ \int\limits_{|x| > \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{602}}}} f_{n1}(u)\, du \Bigg]. \tag{34}$$

Применение лемм 1 и 2 дает для (34) оценку

$$K^{-(n_1+1)}(h)\,C_5\exp\left(-c_5\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right). \tag{35}$$

Из (32), (33) и (35) имеем

$$\bar{f}_{n(n_1+1)}(x)=K^{-(n_1+1)}(h)\,e_1(hx)\,f_{n(n_1+1)}(x)+$$
$$+K^{-(n_1+1)}(h)\,C_5\exp\left(-c_5\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right)+\Theta\psi_{n_1}.$$

Считая, что $\psi_1=0$ и применяя формулу (36), получаем

$$\psi_{1+1}=K^{-2}(h)\,B\exp\left(-c_5\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right)+0,$$

$$\psi_{2+1}=[K^{-3}(h)+K^{-2}(h)]\,B\exp\left(-c_5\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right),$$

. . . .

$$\psi_{n_1+1}=[K^{-(n_1+1)}(h)+\ldots+K^{-2}(h)]\,B\exp\left(-c_5\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right).$$

Таким образом (27) доказана и

$$\psi_n=[K^{-n}(h)+K^{-(n-1)}(h)+\ldots+K^{-2}(h)]\,B\exp\left(-c_5\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right).$$

При

$$|x|<n^{\alpha+\frac{1}{2}}\,[\rho(n)]^{\frac{9}{200}}$$

$e_1(hx)\neq 0$ и $e_1(hu)<\exp\dfrac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}$ так, что из (27) имеем

$$f_{nn}(x)=K^{n}(h)\,e_1(-hx)\,\bar{f}_{nn}(x)+\Theta\psi_n', \tag{37}$$

где

$$\psi_n'=B\left(K^{2}(h)+K^{3}(h)+\ldots+K^{n-2}(h)\right)\exp\left(-c_6\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right).$$

Заменив в (37) x на $x\sqrt{n}$ и умножив обе стороны на $n^{\frac{s}{2}}$, имеем

$$f_{nn}^{*}(x)=K^{n}(h)\,e_1(-\sqrt{n}\,hx)\,\bar{f}_{nn}^{*}(x)+\Theta n^{\frac{s}{2}}\psi_n'. \tag{38}$$

Из (12) и ([4] раздел II) нетрудно показать, что

$$\bar{f}_{nn}^{*}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{s}}\int\limits_{R_s}e^{-i(xt)}\,\bar{\varphi}_{nn}^{*}(t)\,dt, \tag{39}$$

где $\bar{\varphi}_{nn}^{*}(t)$ – характеристическая функция случайной величины $\bar{Z}_n$. Подставляя (39) в (38) и интегрируя обе стороны по s-мерному кольцу

$$L_n=\left\{x: R(n)<|x|\leqslant\frac{n^{2\alpha-\frac{1}{2}}}{|h|\,[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}\right\},$$

получим

$$\int\limits_{L_n} f_{nn}^*(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^s} \int\limits_{L_n} e^{n \ln K(h) - \sqrt{n}\,(h,\,x)} \times$$

$$\times \int\limits_{R_s} e^{-i(t,\,x)} \bar{\varphi}_{nn}^*(t)\,dt\,dx + \Theta n^{\frac{s}{2}} \lambda\left(R(n),\ n\right) \psi_n', \tag{40}$$

где

$$\lambda\left(R(n),\ n\right) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \left[\left(\frac{n^{2\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}\right)^s - R^s(n)\right].$$

В дальнейшем нам понадобятся разложения $\ln K(h)$, $m_i(h)$ и $\sigma_{ij}(h)$ по h.

Из (14) и (16) имеем

$$K(h) = \int\limits_{|x| \leqslant \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}} e^{(h,\,x)} p_{nk}(x)\,dx + B \exp\left(-c_7 \frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right),$$

или

$$\ln K(h) = \ln \int\limits_{|x| \leqslant \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}} e^{(h,\,x)} p_{nk}(x)\,dx + B \exp\left(-c_7 \frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right).$$

Разложим $\ln K(h)$ в ряд. Имеем

$$\ln K(h) = \sum_{r=2}^{N} \sum_{l_1+\ldots+l_s=r} \gamma_{l_1\ldots l_s}^* \frac{h_1^{l_1}\ldots h_s^{l_s}}{l_1!\ldots l_s!} +$$

$$B|h|^{N+1}\left[\frac{\partial^{N+1}}{\partial h_1^{l_1}\ldots\partial h_s^{l_s}} \ln \int\limits_{|x| \leqslant \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}} e^{(h,\,x)} p_{nk}(x)\,dx\right]_{h_i=\Theta_i h_i} +$$

$$+ B \exp\left(-c_7 \frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right), \tag{41}$$

где $\Theta = (\Theta_1,\ \ldots,\ \Theta_s)$, $|\Theta| < 1$.

$$\gamma_{l_1\ldots l_s}^* = \left[\frac{\partial^r}{\partial h_1^{l_1}\ldots\partial h_s^{l_s}} \ln \int\limits_{|x| \leqslant \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}} e^{(h,\,x)} p_{nk}(x)\,dx\right]_{h=0}.$$

Заметим, что если $\gamma_{l_1\ldots l_s}^*$ в (41) заменим соответственными семиинвариантами случайного вектора $\xi^{(n1)}$, то, принимая во внимание (7) и лемму 2, совершим ошибку порядка

$$B\left[\frac{n^{2\alpha}}{|h|\,[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}\right]^N \exp\left(-c_7 \frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right). \tag{42}$$

Нетрудно показать (см. доказательство (13)), что

$$\left[\frac{\partial^{N+1}}{\partial h_1^{l_1}\ldots\partial h_s^{l_s}}\ln\int\limits_{|x|\leqslant\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{600}}}} e^{(h,\,x)}p_{nk}(x)\,dx\right]_{h_l=\Theta_l h_l}=B. \tag{43}$$

Собирая (41), (42) и (43), получим

$$\ln K(h)=\sum_{r=2}^{N}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\gamma_{l_1\ldots l_s}\frac{h_1^{l_1}\ldots h_s^{l_s}}{l_1!\ldots l_s!}+B|h|^{N+1}. \tag{44}$$

Пусть

$$N=\left[\frac{10}{\frac{1}{2}-\alpha}\right]+1,$$

тогда из (44), учитывая (6), получаем

$$\ln K(h)=\sum_{r=2}^{N}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\gamma_{l_1\ldots l_s}\frac{h_1^{l_1}\ldots h_s^{l_s}}{l_1!\ldots l_s!}+Bn^{-10},$$

$$m_i(h)=\sum_{r=2}^{N}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\gamma_{l_1\ldots l_s}\frac{h_1^{l_1}\ldots h_{i-1}^{l_{i-1}}h_i^{l_i-1}h_{i+1}^{l_{i+1}}\ldots h_s^{l_s}}{l_1!\ldots l_{i-1}!(l_i-1)!\,l_{i+1}!\ldots l_s!}+Bn^{-9},$$

$$\sigma_{ij}(h)=\sum_{r=2}^{N}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\gamma_{l_1\ldots l_s}\frac{h_1^{l_1}\ldots h_i^{l_i-1}\ldots h_j^{l_j-1}\ldots h_s^{l_s}}{l_1!\ldots(l_i-1)!\ldots(l_j-1)!\ldots l_s!}+Bn^{-8}. \tag{45}$$

Условие 2 теоремы 1 дает

$$\gamma_{l_1\ldots l_s}=0,\quad\text{для}\quad 2<l_1+\ldots+l_s\leqslant p+3.$$

Кроме того, из (1) и (4) имеем

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad i\neq j,\\ 1+\frac{1}{n^{20}}, & \text{если}\quad i=j.\end{cases}$$

Принимая во внимание последние два замечания для (45), получаем следующие разложения:

$$\ln K(h)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}h_i^2+Bn^{-1}[\rho(n)]^{-\frac{p+4}{20}},$$

$$m_i(h)=h_i+Bn^{-\frac{p+3}{p+4}}[\rho(n)]^{-\frac{p+4}{20}}, \tag{46}$$

$$\sigma_{ij}(h)=\begin{cases}Bn^{-\frac{p+2}{p+4}}[\rho(n)]^{-\frac{p+2}{20}}, & \text{если}\quad i\neq j,\\ 1+Bn^{-\frac{p+2}{p+4}}[\rho(n)]^{-\frac{p+2}{20}}, & \text{если}\quad i=j.\end{cases}$$

Формулу обращения (40) перепишем в несколько иной форме

$$\int\limits_{L_n}f_{nn}(x)\,dx=\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\int\limits_{L_n^*}e^{n[\ln K(h)-(h,\,y)]}\int\limits_{R_s}e^{-i\sqrt{n}\,(t,\,y-m(h))}\psi_{nn}(t)\,dt\,dy+$$

$$+\Theta n^{\frac{s}{2}}\lambda\Big(R(n),\,n\Big)\psi_n', \tag{47}$$

где $\psi_{nn}(t)$ – характеристическая функция случайной величины

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi^{(kn)} - m(h)}{\sqrt{n}}, \qquad \psi_{nn}(t) = [\psi(t)]^n,$$

$$L_n^* = \left\{ y : \frac{R}{\sqrt{n}} < |y| \leqslant \frac{n^{2\alpha-1}}{|h|\,[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}} \right\}.$$

Из (12) следует, что

$$\int_{R_s} |\psi(t)|^2\, dt = Bn^{s\cdot 10},$$

так что

$$\int\limits_{|t| > \frac{B_{3s}|C|\sqrt{n}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s} \beta_{3i}(h)}} |\psi(t)|^n\, dt \leqslant e^{-c_0 n} \int_{R_s} |\psi(t)|^2\, dt = Be^{-c_0 n}, \tag{48}$$

где $\beta_{3i}(h)$ – абсолютный третий момент $\xi^{(nk)}$, C – ковариационная матрица, определенна (11), B_{3s} – конечная константа, зависящая от числа измерений s и $\beta_{3i}(h)$.

Из (47) и (48) имеем

$$\int_{L_n} f_{nn}(x)\, dx = \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s} \int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{n}} \leqslant |y| \leqslant \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}} e^{n[\ln K(h) - (h,y)]} \times$$

$$\times \int\limits_{|t| \leqslant \frac{B_{3s}|C|\sqrt{n}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\beta_{3i}(h)}} e^{-i\sqrt{n}\left(t,\, y - m(h)\right)} \psi_{nn}(t)\, dt\, dy +$$

$$+ \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s} \int\limits_{\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}} < |y| \leqslant \frac{n^{2\alpha-1}}{|h|\,[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}} e^{n[\ln K(h) - (h,y)]} \int\limits_{|t| \leqslant \frac{B_{3s}|C|\sqrt{n}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\beta_{3i}(h)}} e^{-i\sqrt{n}\left(t,\, y - m(h)\right)} \times$$

$$\times \psi_{nn}(t)\, dt\, dy + \Theta n^{\frac{s}{2}} \lambda\left(R(n),\, n\right)\psi_n' = I_1 + I_2 + \Theta n^{\frac{s}{2}} \lambda\left(R(n),\, n\right)\psi_n'. \tag{49}$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части (49). Из [5] имеем

$$\psi_{nn}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\, tCt'\right) + \frac{B}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{s} \beta_{3i}(h)\, |t_i|^3 \exp\left(-\frac{|C|}{4s^{s-1}}\, |t|^2\right) \tag{50}$$

когда

$$|t| \leqslant \frac{B_{3s}|C|\sqrt{n}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s} \beta_{3i}(h)}.$$

Оценим

$$\frac{B}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{s}\beta_{3l}(h)\int\limits_{|t|\leqslant\frac{B_{3s}|C|\sqrt{n}}{\max\limits_{1\leqslant l\leqslant s}\beta_{3l}(h)}}|t_l|^3\exp\left(-\frac{|C|}{4s^{s-1}}|t|^2\right)dt=I_3.$$

Нетрудно найти (см. [6]), что

$$I_3=\frac{B}{\sqrt{n}}|C|^{-\frac{p+3}{2}}=\frac{B}{\sqrt{n}}. \tag{51}$$

Подставляя в рассматриваемый интеграл (49) разложение характеристической функции (50) и учитывая (51), получаем

$$I_1=\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{n}}<|y|\leqslant\frac{n^{\alpha-\frac{1}{20}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}}e^{n[\ln K(h)-(h,y)]}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{B_{3s}|C|\sqrt{n}}{\max\limits_{1\leqslant l\leqslant s}\beta_{3l}(h)}}e^{-i\sqrt{n}(t,\,y-m(h))}\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}tCt'}dt\,dy+\frac{B}{\sqrt{n}}\cdot\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{n}}<|y|\leqslant\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}}e^{n[\ln K(h)-(h,y)]}dy. \tag{52}$$

В (52) возьмем

$$h_i=y_i+Bn^{-\frac{p+3}{p+4}}[\rho(n)]^{-\frac{p+3}{20}},\qquad i=1,\,\ldots,\,s. \tag{53}$$

Тогда

$$\ln K(h)-(h,\,y)=-\frac{1}{2}|y|^2+Bn^{-1}[\rho(n)]^{-\frac{p+4}{20}}.$$

Очевидно, что при расширении области интегрирования по t в (52) до полного пространства R_s мы совершим ошибку, которая войдет в остаточный член (49), и

$$I_1=\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\int\limits_{\frac{R(n)}{\sqrt{n}}<|y|\leqslant\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}}e^{-\frac{n}{2}|y|^2+B[\rho(n)]^{-\frac{p+4}{20}}}\times$$

$$\times\int\limits_{R_s}e^{-i\sqrt{n}(t,\,y-m(h))-\frac{1}{2}tCt'}dt\,dy+\frac{B}{\sqrt{n}}\int\limits_{R(n)\leqslant|x|\leqslant\frac{n^{\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}}e^{-\frac{1}{2}|x|^2}dx.$$

Но,

$$\int\limits_{R_s}e^{-i\sqrt{n}(t,\,y-m(h))-\frac{1}{2}tCt'}dt=\frac{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{|C|}}e^{-\frac{n}{2}(m(h)-y)C^{-1}(m(h)-y)'} \tag{54}$$

Кроме того, в силу (53) и (46) имеем

$$\sqrt{n}\left(y_i - m_i(h)\right) = Bn^{-\frac{p+2}{2(p+4)}}[\rho(n)]^{-\frac{p+3}{20}},$$

$$n\cdot\left(m(h)-y\right)C^{-1}\left(m(h)-y\right)' = Bn^{-\frac{p+2}{p+4}}[\rho(n)]^{-\frac{p+2}{20}},$$

$$|C| = 1 + Bn^{-\frac{p+2}{p+4}}[\rho(n)]^{-\frac{p+2}{20}}.$$

Поэтому

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \int\limits_{R(n)\leqslant|x|<\frac{n^{\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\,dx\left(1+o(1)\right). \tag{55}$$

Займемся вторым интегралом в правой части (49). Подставив (50) в рассматриваемый интеграл, получим

$$\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s} \int\limits_{\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}<|y|\leqslant\frac{n^{3\alpha-1}}{|h|\,[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}} e^{n[\ln K(h)-(y,\,h)]}\times$$

$$\times \int\limits_{|t|\leqslant\frac{B_{3s}|C|\sqrt{n}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\beta_{3i}(h)}} e^{-i\sqrt{n}\left(t,\,y-m(h)\right)-\frac{1}{2}tCt'}\,dt\,dy + \frac{B}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{s}\beta_{3i}(h)\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\times$$

$$\times \int\limits_{\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}<|y|\leqslant\frac{n^{3\alpha-1}}{|h|\,[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}} e^{n[\ln K(h)-(h,\,y)]} \int\limits_{|t|\leqslant\frac{B_{3s}|C|\sqrt{n}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\beta_{3i}(h)}} |t_i|^3 e^{-i\sqrt{n}\left(t,\,y-m(h)\right)}\times$$

$$\times e^{-\frac{|C|}{4s^{s-1}}|t|^2}\,dt\,dy = I_4 + I_5. \tag{56}$$

Пусть в (56)

$$|h| = \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{57}$$

Имеем

$$\int\limits_{|t|\leqslant\frac{B_{3s}|C|\sqrt{n}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\beta_{3i}(h)}} e^{-i\sqrt{n}\left(t,\,y-m(h)\right)-\frac{|C|}{4s^{s-1}}|t|^2}|t_i|^3\,dt \leqslant$$

$$\leqslant Bn^{\frac{3}{2}}\int\limits_{R_s} e^{-i\sqrt{n}\left(t,\,y-m(h)\right)-\frac{|C|}{4s^{s-1}}|t|^2}\,dt = Bn^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{s^{s-1}}{|C|}\,|m(h)-y|^2\right).$$

Подставляя последнее во второй интеграл (56) и учитывая (57), получим для второго интеграла следующую оценку:

$$o(1)\int\limits_{\frac{n^{\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}<|x|\leqslant\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\,dx. \tag{58}$$

Перейдем к первому интегралу (56). Расширяя предел интегрирования по t до полного пространства R_s и заменяя внутренний интеграл по (54), получаем, что

$$I_4=\frac{n^{\frac{s}{2}}e^{n\ln K(h)}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}|C|}\int\limits_{\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}<|y|\leqslant\frac{n^{2\alpha-1}}{|h|[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}} e^{-(hy)n}e^{-\frac{n}{2}(m(h)-y)C^{-1}(m(h)-y)'}\,dy=$$

$$=\frac{e^{\left[\ln K(h)-\frac{1}{2}m(h)C^{-1}[m(h)]'\right]}}{|C|}\cdot\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}<|y|\leqslant\frac{n^{2\alpha-1}}{|h|[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}} e^{n\left[m(h)C^{-1}y'-(hy)\right]}\times$$

$$\times e^{-\frac{n}{2}yC^{-1}y'}\,dy. \tag{59}$$

Формулы (45) при условии (57) дают

$$\begin{gathered}\ln K(h)=\frac{1}{2}|h|^2+Bn^{-\frac{p+4}{2}}+Bn^{-10},\\ m_i(h)=h_i+Bn^{-\frac{p+3}{2}}+Bn^{-9},\\ \sigma_{ij}(h)=\begin{cases}Bn^{-\frac{p+2}{2}}+Bn^{-8}, & \text{если } i\neq j,\\ 1+Bn^{-\frac{p+2}{2}}+Bn^{-8}, & \text{если } t=j.\end{cases}\end{gathered} \tag{60}$$

Пользуясь оценками (60), нетрудно найти, что

$$\begin{gathered}n\left[\ln K(h)-\frac{1}{2}m(h)C^{-1}[m(h)]'\right]=Bn^{-\frac{p+1}{2}},\\ n\left[m(h)C^{-1}y'-(h,y)\right]=Bn^{-\frac{(p+2)^2}{2(p+4)}},\\ y\cdot C^{-1}\cdot y'=|y|^2+Bn^{-\frac{p^2+4p+8}{2(p+4)}}.\end{gathered} \tag{61}$$

Подставляя (61) в (59), получаем

$$\left(1+o(1)\right)\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}}\int\limits_{\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{20}}}<|y|\leqslant\frac{n^{2\alpha-\frac{1}{2}}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}} e^{-\frac{n}{2}|y|^2}\,dy. \tag{62}$$

Кроме того лемма 1 дает, что

$$\int\limits_{|x|>\frac{n^{2\alpha-\frac{1}{2}}}{|h|\,[\rho(n)]^{\frac{1}{200}}}} f_{nn}^{*}(x)\,dx < B\exp\left(-c_8\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{r}}}\right), \tag{63}$$

где $r>0$ целое, сколь угодно большое число. Из (49), (55), (58), (62) и (63) получаем

$$P\{Z_n'\in C_n\}=\Phi(C_n;\ o,\ I)\Big(1+o(1)\Big).$$

Доказательство теоремы 1 завершает лемма 1 работы [2], где надо положить $l=\dfrac{10}{\alpha}$.

Доказательство теоремы 2. Из доказательства теоремы 1 ясно, что

$$P\{Z_n'\in Q_n\cap L_{n3}\}=\Phi(Q_n\cap L_{n3};\ o,\ I)\Big(1+o(1)\Big)+B\exp\left(-c_8\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right). \tag{2.2}$$

По формуле полной вероятности имеем

$$P\{Z_n'\in Q_n\cap L_{n3}\}=P\left\{|\eta^{(n)}|>\frac{n^{\alpha-10}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{800}}}\right\}P\left\{Z_n'\in Q_n\cap L_{n3}\,\Big|\,|\eta^{(n)}|>\frac{n^{\alpha-10}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{800}}}\right\}+$$

$$+P\left\{|\eta^{(n)}|\leqslant\frac{n^{\alpha-10}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{800}}}\right\}P\left\{Z_n'\in Q_n\cap L_{n3}\,\Big|\,|\eta^{(n)}|\leqslant\frac{n^{\alpha-10}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{800}}}\right\}. \tag{2.3}$$

Из (4) имеем

$$P\left\{|\eta^{(n)}|>\frac{n^{\alpha-10}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{800}}}\right\}=\Phi(A_n;\ o,\ I)=o(1)\exp\left(-c_8\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right), \tag{2.4}$$

где

$$A_n=\left\{x:|x>\frac{n^{\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{800}}}\right\}.$$

(2.4) и (2.3) дает

$$P\left\{Z_n'\in Q_n\cap L_{n3}\,\Big|\,|\eta^{(n)}|\leqslant\frac{n^{\alpha-10}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{800}}}\right\}=P\{Z_n'\in Q_n\cap L_{n3}\}+$$

$$+o(1)\exp\left(-c_8\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{800}}}\right). \tag{2.5}$$

Из очевидного неравенства

$$P\{Z_n\in Q_n\cap L_{n3}\}\leqslant P\left\{Z_n'\in(Q_n\cap L_{n3})\cup V_n\,\Big|\,|\eta^{(n)}|\leqslant\frac{n^{\alpha-10}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{800}}}\right\},$$

(2.5) и (2.2) получаем

$$P\{Z_n\in Q_n\cap L_{n3}\}\leqslant\Phi\Big((Q_n\cap L_{n3})\cup V_n;\ o,\ I\Big)\Big(1+o(1)\Big)+$$

$$+B\exp\left(-c_8\frac{n^{2\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right). \tag{2.6}$$

Заметим, что из условия (2.1) следует

$$B\exp\left(-c_8\frac{n^{8\alpha}}{[\rho(n)]^{\frac{1}{300}}}\right)=o(1)\,\Phi(Q_n\cap L_{n3};\ o,\ I). \tag{2.7}$$

Это нетрудно доказать (см. [7]) с помощью оценки $\Phi(K_n;\ o,\ I)$, где

$$K_n=\left\{x:\sum_{i=1}^{s}\left(x_i-a_i(n)\right)^2\leqslant\frac{n^{8\alpha-10}}{4\,[\rho(n)]^{\frac{1}{400}}}\right\}.$$

Кроме того, в силу (2.1) имеем

$$\Phi\left((Q_n\cap L_{n3})\cup V_n;\ o,\ I\right)=\Phi(Q_n\cap L_{n3};\ o,\ I)\left(1+o(1)\right). \tag{2.8}$$

Из (2.6), (2.7) и (2.8) получаем

$$P\{Z_n\in Q_n\cap L_{n3}\}\leqslant\Phi(Q_n\cap L_{n3};\ o,\ I)\left(1+o(1)\right).$$

Подобным путем нетрудно показать, что

$$P\{Z_n\in Q_n\cap L_{n3}\}\geqslant\Phi(Q_n\cap L_{n3};\ o,\ I)\left(1+o(1)\right).$$

Из последних двух неравенств и (63) следует теорема 2.

В заключении автор благодарит своего научного руководителя В. А. Статулявичуса за советы и внимание, оказанные при выполнении этой работы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
29.VI.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник, Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений, III, Теория вероят. и ее примен., VII, 2 (1962), 121–134.
2. Л. Л. Вилкаускас, Две интегральные теоремы о больших уклонениях в многомерном случае, Лит. мат. сб., I, 2 (1963), 53–67.
3. W. H. Youg, On multiple integration by parts and the second theorem of the mean, Proceedings of the London Mathematical Society, ser. second vol., 16 (1918), 273–293.
4. S. Bochner and K. Chandrasekharan, Fourier transforms, London, 1953.
5. P. L. Hsu, The approximate distr. of the mean and variance of a sample of independent variables, Ann. Math. Statistics (1945), 1–29.
6. Г. М. Фихтенгольц, Курс диф. и интег. исчисл., III, 1960, 397.
7. H. Ruben, Probability content of regions under spherical normal distributions, I, Ann. Math. Stat., vol. 31 (1960), 598–618.
8. В. В. Петров, Предельные теоремы для больших уклонений при нарушении условия Крамера, I, Вест. Ленингр. ун-та, 19 (1963), 49–68.

DAUGIAMAČIAI LINIKO TIPO DIDELI ATSILENKIMAI

L. VILKAUSKAS

(Reziumė)

Sakykime, kad $\{Q_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ yra s-mačių aibių, kurių kiekviena nutolusi nuo koordinačių pradžios atstumu $R(n)$, seka.

Čia

$$R(n)\in\left[\frac{n^{\frac{1}{6}}}{\rho(n)},\ \frac{n^{\alpha}}{\rho(n)}\right]\qquad\left(\alpha<\frac{1}{2}\right)$$

ir $\rho(n)$ – monotoniškai didėjanti funkcija.

Darbe nagrinėjami nepriklausomų atsitiktinių vienodai pasiskirsčiusių s-mačių vektorių normuotos sumos dideli atsilenkimai aibių sekoje $\{Q_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, kuri patenkina (2. 1) sąlygą.

THE MULTI-DIMENSIONAL LARGE DEVIATIONS OF LINNIK TYPE ON SOME REGIONS

L. VILKAUSKAS

(Summary)

Let $\{Q_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ be a s-dimensional regions sequence and let $R(n)$ be the distance from the origin of coordinates respectively Q_n.

Here

$$R(n) \in \left[\frac{n^{\frac{1}{6}}}{\rho(n)}, \frac{n^{\alpha}}{\rho(n)}\right] \qquad \left(\alpha < \frac{1}{2}\right)$$

and $\rho(n)$ — monotonically increasing function.

In the paper we consider the large deviations on a $\{Q_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ for normalized sums of independent and identically distributed s-dimensional vectors.