V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК I
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

И. В. КИСЕЛЮС

В этой статье рассматриваются решения дифференциальных уравнений в частных производных в некоторой окрестности начала координат с коэффициентами – аналитическими функциями. Эта статья является обобщением результатов Ш. И. Стрелица, опубликованных в статье [1]. Докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть в уравнении в частных производных

$$L_m(u)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=k} F^k_{i_1 i_2\ldots i_m}(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m)\times$$

$$\times z_1^{i_1} z_2^{i_2}\ \ldots\ z_m^{i_m}\frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_m} u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}\ldots\partial z_m^{i_m}}=0, \tag{1}$$

где $F^k_{i_1 i_2\ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ – регулярные функции в полицилиндре $|z_1|\leqslant R_1$, $|z_2|\leqslant R_2$, $\ldots$, $|z_m|\leqslant R_m$, однородная форма

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} F^n_{i_1 i_2\ldots i_m}(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)\,\eta_1^{i_1}\eta_2^{i_2}\ldots\eta_m^{i_m} \tag{2}$$

не обращается в нуль, для всех неотрицательных $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$; η_1+ $+\eta_2+\ldots+\eta_m=1$. Тогда существует бесконечное множество линейно независимых решений вида $u=z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2}\ldots z_m^{\lambda_m} f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, где λ_j, $j=1, 2, \ldots, m$ – постоянные числа, а $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ – регулярная функция в некоторой окрестности начала координат. В частности, если $F_{i_1 i_2\ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)\equiv$ $\equiv \mathrm{const}$ для всех $i_1, i_2, \ldots, i_m$, для которых $i_1+i_2+\ldots+i_m=n$, а остальные функции целые, то $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ – целая функция.

1. Докажем лемму, высказанную Ш. И. Стрелицом в [1].

Лемма. *Если в уравнении*

$$\sum_{k=0}^{n} F_k(z)\, z^k\, w^{(k)}(z)=z^\lambda f(z), \tag{1a}$$

где $F_k(z)$, $k=0, 1, \ldots, n$ *и* $f(z)$ – *регулярные функции в круге* $|z|\leqslant R$, *причем* $F_n(0)\neq 0$ *а* λ *такое постоянное число, что ни одно из чисел* $\lambda+i$, $i=0$, $1, 2, \ldots$ *не удовлетворяет уравнению*

$$\sum_{k=0}^{n} F_k(0)\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}=0, \tag{2a}$$

то существует решение вида $w=z^{\lambda}h(z)$, *где* $h(z)$ — *регулярная функция в некоторой окрестности начала координат. В частности, если все* $F_k(z)$, $f(z)$ — *целые функции, а* $F_n(z)\equiv\mathrm{const}$, *то и* $h(z)$ — *целая функция* (при целой $f(z)$).

Доказательство. Так как функции $F_k(z)$ и $f(z)$ — регулярные в круге $|z|\leqslant R$, то их можем записать в этом круге следующим образом:

$$F_k(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{j,k}\,z^j;\ f(z)=\sum_{i=0}^{\infty}b_i\,z^i. \tag{3а}$$

Будем искать решение уравнения (1а) в виде

$$W=\sum_{i=0}^{\infty}c_i\,z^{\lambda+i}. \tag{3б}$$

Подставив в уравнение (1а) выражение (3а) и (3б), получаем:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}a_{i-j,k}\,c_j\frac{\Gamma(\lambda+j+1)}{\Gamma(\lambda+j-k+1)}\,z^{i+\lambda}=\sum_{i=0}^{\infty}b_i\,z^{i+\lambda}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, придем к системе уравнений:

$$\sum_{k=0}^{n}a_{0,k}\,c_0\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-k+1)}=b_0,$$

$$\sum_{k=0}^{n}a_{0,k}\,c_i\frac{\Gamma(\lambda+i+1)}{\Gamma(\lambda+i-k+1)}+\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{n}a_{i-j,k}\,c_j\frac{\Gamma(\lambda+j+1)}{\Gamma(\lambda+j-k+1)}=b_i,\qquad i=1,2,3,\ldots$$

Отсюда следует, что

$$c_0=\frac{b_0}{\sum\limits_{k=0}^{n}a_{0,k}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-k+1)}}, \tag{4а}$$

$$c_i=\frac{b_i-\sum\limits_{j=0}^{i-1}\sum\limits_{k=0}^{n}a_{i-j,k}\,c_j\frac{\Gamma(\lambda+j+1)}{\Gamma(\lambda+j-k+1)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}a_{0,k}\frac{\Gamma(\lambda+i+1)}{\Gamma(\lambda+i-k+1)}}. \tag{4б}$$

Теперь докажем равномерную сходимость ряда (3б). Согласно условию (2а) знаменатель в (4а) и (4б) в нуль не обращается. Оценим знаменатель в (4б) снизу

$$|Q(\lambda,\ i)|=\left|\sum_{k=0}^{n}a_{0,k}\frac{\Gamma(\lambda+i+1)}{\Gamma(\lambda+i-k+1)}\right|=\left|a_{0,n}(\lambda+i)^n+\sum_{k=0}^{n-1}A_k(\lambda;\ i)\right|\geqslant$$

$$\geqslant i^n\left|\left|a_{0,n}\left(\frac{\lambda}{i}+1\right)^n\right|-\frac{1}{i^n}\sum_{k=0}^{n-1}|A_k(\lambda;\ i)|\right|.$$

Здесь $A_k(\lambda;\ i)$ однородные полиномы степени k. При достаточно большом $i>N$ второе слагаемое можно сделать меньше первого, а первое ограничено. Таким образом $|Q(\lambda,\ i)|>\beta i^n>0$, при $i>N$. Когда $i<N$ выражение ограничено снизу ввиду (2а).

Исходя из свойств гамма-функций, имеем, что $\frac{\Gamma(\lambda+j+1)}{\Gamma(\lambda+j-k+1)}<(\lambda+j)^k$. Кроме того, по неравенству Коши, $|a_{i-j,k}|<\frac{M}{R^{i-j}}$, где $M=\max\limits_{\substack{|z|=R\\ k=0,1,\ldots,n}}|F_k(z)|$. Итак,

$$\left|\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{n}a_{i-j,k}\,c_j\frac{\Gamma(\lambda+j+1)}{\Gamma(\lambda+j-k+1)}\right|<D\sum_{j=1}^{i}\frac{|c_{i-j}|}{R^j}j^n,$$

где $D>0$. Таким образом, коэффициенты c_i удовлетворяют неравенствам

$$|c_i|<D_1\frac{|b_i|}{i^n}+D_2\sum_{j=1}^{i}\frac{|c_{i-j}|}{R^j}\qquad i=1,\ 2,\ \ldots \tag{5}$$

Пусть $|c_{i-j}|<\left(\frac{K}{R}\right)^{i-j}$ и $|b_i|<\left(\frac{B}{R}\right)^i$ для всех $j=1,\ 2,\ \ldots,\ i-1$, где $B>1$, $K>1$ постоянные. Тогда получаем такую оценку

$$|c_1|<D_1\left(\frac{B}{R}\right)^i+D_2\left(\frac{K}{R}\right)^i\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{K^2}+\ldots+\frac{1}{K^i}\right)\leqslant D_1\left(\frac{B}{R}\right)^i+\left(\frac{K}{R}\right)^i\frac{D_2}{K-1},$$

или $|c_1|<D_1\left[\left(\frac{B}{R}\right)^i+\left(\frac{K}{R}\right)^i\right]$ при $K\geqslant\frac{D_2}{D_1}+1$.

Таким образом, ряд (3б) мажорируется следующим рядом:

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty}c_iz^i\right|\leqslant D_1\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B^i+K^i}{R^i}|z|^i.$$

Когда $|z|<\frac{R}{\bar{B}}$, ряд сходится и представляет аналитическую функцию в круге $|z|=\frac{R}{\bar{B}}$. Здесь $\bar{B}=\max(B,\ K)$, а R — расстояние от начала координат до ближайшей особой точки коэффициентов в уравнении (1а).

Рассмотрим теперь тот случай, когда все $F_k(z)$ целые функции, при $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$; $F_n(z)\equiv\mathrm{const}$. Кроме того, $f(z)$ тоже целая. Тогда в числителе (4б) суммирование ведется до $n-1$ и оценка (5) улучшается, а именно

$$|c_i|<\frac{D_1|b_i|}{i^n}+\frac{D_2}{i}\sum_{j=1}^{i}\frac{|c_{i-j}|}{R^j},\qquad i=1,\ 2,\ \ldots$$

Положим, что $c_m<E\left(\frac{K}{R}\right)^m$, $m=1,\ 2,\ \ldots,\ i-1$ и $K=1+p$, где $p>0$, а $|b_i|<\left(\frac{B}{R}\right)^i$. Тогда

$$|c_i|<\frac{D_1}{i^n}\left(\frac{B}{R}\right)^i+\frac{ED_2}{i(K-1)}\left(\frac{K}{R}\right)^i\leqslant\left(\frac{B}{R}\right)^i+\frac{ED_2}{i(K-1)}\left(\frac{K}{R}\right)^i. \tag{6}$$

Выбираем такое число i_0, чтобы для любого $D_2(R)$ и $p>0$ было бы $\frac{D_2(R)}{ip}\leqslant 1$, как только $i>i_0$. Теперь возьмем настолько большое E, чтоб (6) выполнялось и для всех $i\leqslant i_0$. Итак

$$|c_i|<E\left[\left(\frac{B}{R}\right)^i+\left(\frac{K}{R}\right)^i\right].$$

Значит имеем следующее мажорирующее соотношение:

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i\right| \ll E \sum_{i=0}^{\infty}\left[\left(\frac{B}{R}\right)^i+\left(\frac{K}{R}\right)^i\right]|z|^i.$$

При $|z|<\frac{R}{\sqrt{\overline{B}}}$ ряд (3б) сходится равномерно. Так как выбор числа $\sqrt{\overline{B}}=\max(B, K)$ от R не зависит, а R, согласно предпосылкам леммы, произволное, то решение уравнения является целой функцией. Лемма доказана.

2. Приступаем к доказательству сформулированной теоремы при $m=2$, т. е., когда искомая функция зависит только от двух переменных, которые обозначим через z и w. Уравнение (1) перепишется в следующем виде:

$$L_2(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} F_{j,k-j}(z, w)\, z^j w^{k-j} \frac{\partial^k u}{\partial z^j \partial w^{k-j}} \tag{7}$$

а условие (2) принимает вид: форма

$$Q(\eta_1, \eta_2)=\sum_{j=0}^{n} F_{j,n-j}(0, 0)\,\eta_1^j \eta_2^{n-j} \tag{8}$$

не обращается в нуль при $\eta_j \geqslant 0$, $j=1, 2$ с $\eta_1+\eta_2=1$.

Функции $F_{j,k-j}(z, w)$, регулярные в бицилиндре $|z|<R_1$, $|w|<R_2$, можно записать в виде степенных рядов:

$$F_{j,k-j}(z, w)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q}^{(j,k-j)} z^p w^q, \tag{9}$$

где

$$a_{p,q}^{(j,k-j)}=\frac{1}{p!\,q!}\,\frac{\partial^{p+q} F_{j,k-j}(0, 0)}{\partial z^p \partial w^q}.$$

Из (7) получаем:

$$L_2(u)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q}^{(j,k-j)} z^j w^{k-j} \frac{\partial^k u}{\partial z^j \partial w^{k-j}} z^p w^q=0. \tag{10}$$

Решения уравнения будем искать в форме:

$$u=\sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s(w)\, z^{\lambda+s}, \tag{11}$$

где λ некоторе постоянное число, которое будет определено позже. Очевидно,

$$\frac{\partial^k u}{\partial z^j \partial w^{k-j}}=\sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s^{k-j}(w)\frac{\Gamma(\lambda+s+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)} z^{\lambda+s-j}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (10), найдем:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{p,q}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+s+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)}\varphi_s^{(k-j)}(w)\, w^{q+k-j} z^{p+\lambda+s}=0.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, придем к системе уравнений для определения функций $\varphi_s(w)$:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{q=0}^{\infty} a_{0,q}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-j+1)}\,w^{k-j}\varphi_0^{(k-j)}(w)\,w^q=0, \tag{11а}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{q=0}^{\infty} a_{0,q}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+t+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)}\,w^{k-j}\varphi_t^{(k-j)}(w)\,w^q+$$

$$+\sum_{s=1}^{t-1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{q=0}^{\infty} a_{t-s,q}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+s+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)}\,w^{k-j}\varphi_s^{(k-j)}(w)\,w^q=0, \tag{11б}$$

. . . .

$$\sum_{s=0}^{t}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{q=0}^{\infty} a_{t-s,q}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+s+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)}\,w^{k-j}\varphi_s^{(k-j)}(w)\,w^q=0\ (t=0,1,2,\ldots). \tag{11в}$$

Функций $\varphi_s(w)$ будем искать в виде ряда:

$$\varphi_s(w)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(s)}\,w^{\mu+i},$$

где число μ пока не определено. Подставляя (11) в (11в), имеем:

$$\sum_{s=0}^{t}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{t-s,q}^{(j,k-j)}\,b_i^{(s)}\frac{\Gamma(\lambda+s+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+i+1)}{\Gamma(\mu+i+j-k+1)}\,w^{\mu+i+q}=0,$$

$$t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях w, получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $b_i^{(s)}$:

$$\sum_{s=0}^{t}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{t-s,m-i}^{(j,k-j)}\,b_i^{(s)}\frac{\Gamma(\lambda+s+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+i+1)}{\Gamma(\mu+i+j-k+1)}=0 \tag{12}$$

$$(t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Из соотношения (12) при $t=0$ и $m=0$ получаем определяющее уравнение для чисел λ и μ:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{0,0}^{(j,k-\ )}\,b_0^{(0)}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+j-k+1)}=0. \tag{13}$$

Как показано в [1], из необращения в нуль (8) следует:

а) существует пара чисел $\lambda=\lambda_0$ и $\mu=\mu_0$, что $Q(\lambda_0,\mu_0)=0$ и $Q(\lambda_0+t,\ \mu_0+\tau)\neq 0$ при любых целых неотрицательных t и τ с $t+\tau>0$;

б) $|Q(\lambda+s,\ \mu+i)|\geqslant\beta(s+i)^n$, где $\beta>0$ постоянное число.

Предположим теперь, что пара чисел λ_0 и μ_0 уже определена. Для простоты записи, будем их обозначать через λ и μ без нулей. Коэффициент $b_0^{(0)}$ остается произвольным. Когда $t=0$, а $i=1,\ 2,\ \ldots$, вычисляем коэффициенты $b_i^{(0)}$ последовательно из системы

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{0,0}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+i+1)}{\Gamma(\mu+i+j-k+1)}\,b_i^{(0)}+$$

$$+\sum_{\alpha=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{0,i-\alpha}^{(j,k-j)}\,b_\alpha^{(0)}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+\alpha+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+j-k+1)}=0.$$

Существование такого решения обеспечивает теорема Фукса о решениях дифференциального уравнения с регулярными особенными точками (см. [2]), согласно которой в окрестности начала координат дифференциальное уравнение (11б) имеет решение вида $\varphi_0(w)=w^{\mu}h_0(w)$, где $h_0(w)$ регулярная функция в некотором круге D с центром в начале координат, а μ определено выше.

Когда $t=1$ из (11б), учитывая полученное выражение для функций $\varphi_0(w)$, имеем уравнение

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{0,0}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\lambda-j+2)}w^{k-j}\varphi_1^{(k-j)}(w)=w^{\mu}H_0(w), \tag{14}$$

где $H_0(w)$ регулярная в некотором круге функция. Так как полином $Q(\lambda+1,\ \mu)$ в нуль не обращается, то, по доказанной нами леме, существует решение уравнения (14) следующего вида:

$$\varphi_1(w)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(1)}w^{\mu+i}=w^{\mu}h_1(w),$$

где $h_1(w)$ функция регулярная в круге D. Продолжая этот процесс, мы последовательно определяем все функции $\varphi_s(w)$.

3. Докажем теперь, что ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty}\varphi_s(w)z^s$ сходится равномерно в некоторой окрестности точки (0, 0). С этой целью вернемся к уравнению (12). Запишем его следующим образом:

$$\begin{aligned}&\Big[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{0,0}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+t+1)}{\Gamma(\lambda+t-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma(\mu+m+j-k+1)}\Big]b_m^{(t)}+\\&+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{s=0}^{t-1}\sum_{i=0}^{m-1} a_{t-s,m-i}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+s+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+i+1)}{\Gamma(\mu+i+j-k+1)}\,b_i^{(s)}+\\&+\sum_{s=0}^{t-1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{t-s,0}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+s+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma(\mu+m+j-k+1)}\,b_m^{(s)}+\\&+\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{0,m-i}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+t+1)}{\Gamma(\lambda+t-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma(\mu+m+j-k+1)}\,b_i^{(t)}=0.\end{aligned} \tag{15}$$

Согласно замечанию б) верна оценка снизу:

$$\Big|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{0,0}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+t+1)}{\Gamma(\lambda+t-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma(\mu+m+j-k+1)}\Big|\geqslant\beta(t+m)^n,$$

где $\beta>0$ постоянная. Легко оценить сверху остальные суммы в (15). Так как

$$\frac{\Gamma(\lambda+s+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)}<(\lambda+s)^j;\qquad \frac{\Gamma(\mu+i+1)}{\Gamma(\mu+i+j-k+1)}<(\mu+i)^{k-j},$$

то

$$\frac{\Gamma(\lambda+s+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+\ +1)}{\Gamma(\mu+i+j-k+1)}<C_0(s+\sqrt{i})^k.$$

Кроме того, по неравенству Коши

$$|a_{t-s,m-1}^{(j,k-j)}|<\frac{M}{R^{(t+m)-(s+i)}}\,.$$

Здесь $C_0>0$ — некоторая константа, а $M=\max|F_{j,k-j}(z,\ w)|$ в бицилиндре, причем $|z|\leqslant R$; $|w|\leqslant R^*$. Таким образом, обозначив $\max\limits_{i+s=l}|b_i^{(s)}|=A_l$, $t+m=\nu$, в соответствии со сказанным выше, находим

$$\left|\sum_{s=0}^{t-1}\sum_{t=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}a_{t-s,0}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+s+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)}\frac{\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma(\mu+m+j-k+1)}b_m^{(s)}\right|<$$

$$<C_2\sum_{l=1}^{\nu}\frac{l^{n+1}A_{\nu-l}}{R^l},\qquad C_2=\mathrm{const};\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots$$

Точно таким же путем оценивается третяя и четвертая суммы, а именно:

$$\left|\sum_{s=0}^{t-1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}a_{t-s,0}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+s+1)}{\Gamma(\lambda+s-j+1)}\frac{\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma(\mu+m+j-k+1)}b_m^{(s)}\right|<C_3\sum_{l=1}^{\nu}\frac{l^nA_{\nu-l}}{R^l},$$

$$\left|\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}a_{0,m-i}^{(j,k-j)}\frac{\Gamma(\lambda+t+1)}{\Gamma(\lambda+t-j+1)}\frac{\Gamma(\mu+i+1)}{\Gamma(\mu+i+j-k+1)}b_i^{(t)}\right|<C_4\sum_{l=1}^{\nu}\frac{l^nA_{\nu-l}}{R^l},$$

$$C_3,\ C_4=\mathrm{const}.$$

Пусть $\beta\sqrt{C}=\max(C_2,\ C_3,\ C_4)$. Тогда

$$A_\nu<\frac{\sum\limits_{l=1}^{\nu}\left(C_2\frac{l^{n+1}}{R^l}+C_3\frac{l^n}{R^l}+C_4\frac{l^n}{R^l}\right)A_{\nu-l}}{\beta\nu^n}<C\sum_{l=1}^{\nu}\frac{l}{R^l}A_{\nu-l}. \tag{16}$$

Пусть $A_{\nu-l}<\left(\frac{B}{R}\right)^{\nu-l}$, для $l=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu-1$, $B>1$. Тогда

$$A_\nu<\frac{DB^{\nu-1}}{R^\nu}\left(1+\frac{2}{B}+\ldots+\frac{\nu-1}{B^{\nu-2}}+\frac{\nu}{B^{\nu-1}}\right)\leqslant\frac{DB^{\nu-1}}{R^\nu}\left(\frac{B}{B-1}\right)^2.$$

И, полагая $B=1+\frac{C}{2}+\sqrt{C+\left(\frac{C}{2}\right)^2}$, найдем, что

$$A_\nu<\left(\frac{B}{R}\right)^\nu.$$

Следовательно, при $|w|=r$ имеем, что

$$\left|\frac{1}{w^\mu}\varphi_s(w)\right|=\left|\sum_{\alpha=0}^{\infty}A_{s\alpha}w^\alpha\right|\leqslant\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{B}{R}\right)^{\alpha+s}r^\alpha=\left(\frac{B}{R}\right)^s\frac{R}{R-Br},$$

если $r<\frac{B}{R}$. Дальше,

$$\left|\frac{1}{w^\mu}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(w)z^s\right|\leqslant\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{B}{R}\right)^s\frac{R}{R-Br}|z|^s=\frac{R}{R-Br}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{B}{R}\right)^s|z|^s.$$

Итак при $|z|<\frac{R}{B}$ и $|w|<\frac{R}{B}$ ряд $\frac{1}{w^\mu}\sum\limits_{s=0}^{\infty}\varphi_s(w)z^s$ является аналитической функцией. Следует отметить, что C, а тем самым и B, зависит от R.

4. Теперь рассмотрим случай, когда все функции $F_{j,k-j}(z,\ w)$ целые, причем $F_{j,n-j}(z,\ w)\equiv a_{0,0}^{(j,n-j)}\equiv\mathrm{const}$. В этом случае оценка (16) улучшается,

* Этого всегда можно добиться отображением: $z=\frac{R_1}{R}z'$; $w=\frac{R_2}{R}w'$.

так как во второй, третьей и четвертой суммах суммирование ведется только до $n-1$. Справедлива оценка:

$$A_\nu < \frac{C(R)}{\nu} \sum_{l=1}^{\nu} \frac{l}{R^l} A_{\nu-l}. \tag{16a}$$

Положим $A_{\nu-l} < E\left(\frac{B}{R}\right)^{\nu-l}$, где $E=\text{const}$ и $B=1+q$, причем $q>0$ произвольно. Имеем:

$$A_\nu < \frac{EC(R)B^{\nu-1}}{\nu R^\nu}\left(1+\frac{2}{B}+\ldots+\frac{\nu-1}{B^{\nu-2}}+\frac{\nu}{B^{\nu-1}}\right) \leqslant \frac{(1+q)\,C(R)}{q^2\nu} E\left(\frac{B}{R}\right)^\nu.$$

Пусть ν_0 число такое, что $\frac{(1+q)\,C(R)}{q^2\nu} \leqslant 1$, когда $\nu>\nu_0$. Выбираем теперь число E так, чтобы было $A_{\nu-l} < E\left(\frac{B}{R}\right)^{\nu-l}$ для всех $\nu \leqslant \nu_0$. Тогда по (16)

$$A_\nu < E\left(\frac{B}{R}\right)^\nu \quad \text{и} \quad \left|\frac{1}{w^\mu}\varphi_s(w)\right| = \left|\sum_{\alpha=0}^{\infty} A_{s\alpha} w^\alpha\right| \leqslant E \sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{B}{R}\right)^{\alpha+s} r^\alpha =$$

$$= E\left(\frac{B}{R}\right)^s \sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{B}{R}\right)^\alpha r^\alpha, \quad |w|=r.$$

При

$$r<\frac{B}{R}, \quad \frac{1}{|w|^\mu}|\varphi_s(w)| < E\left(\frac{B}{R}\right)^s \frac{R}{R-Br}$$

и, далее

$$\left|\frac{1}{w^\mu}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(w)\,z^s\right| \leqslant \frac{ER}{R-Br}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{B}{R}\right)^s |z|^s.$$

Таким образом, при $|w| \leqslant \rho < \frac{R}{B}$ и $|z| \leqslant \rho < \frac{R}{B}$ ряд $\frac{1}{w^\mu}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(w)\,z^s$ сходится равномерно. Так как B — фиксированное число, то из произвольности R следует, что функция $\frac{1}{w^\mu}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(w)\,z^s$ является целой. Этим теорема для случая $m=2$ полностью доказана.

5. Покажем, что уравнение

$$L_2(u) = z^\lambda w^\mu F(z, w)$$

имеет решение вида $z^\lambda w^\mu f(z, w)$, где $f(z, w)$ — голоморфная функция в некоторой окрестности начала координат, при условии, что числа λ и μ произвольные и такие, что любая пара чисел $(\lambda+t, \mu+\tau)$, при всяких неотрицательных целых t и τ, не удовлетворяет уравнению $Q(\lambda+t, \mu+\tau)=0$. Функция $F(z, w)$ голоморфная в некотором бицилиндре $|z|<R_1$, $|w|<R_2$.

Решения будем искать в виде

$$u = \sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(w)\,z^{\lambda+s}.$$

Функцию $F(z, w)$ выражаем в виде $F(z, w) = \sum_{s=0}^{\infty} g_s(w) z^s$. Точно таким п · тем, как и в пункте 2 придем к той же системе (12) с тем только отличием, что в правых частях последней вместо нулей будут стоять функции $w^{\mu} g_s(w) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} g_i^{(s)} w^{i+\mu}$. Обозначив $\max\limits_{m+t=\nu} |g_i^{(s)}| = G_\nu$, найдем оценку:

$$A_\nu < D_1 \sum_{l=1}^{\nu} \frac{l}{R^l} A_{\nu-l} + D_2 \frac{G_\nu}{\nu^n} < D\left(\sum_{l=1}^{\nu} \frac{l}{R^l} A_{\nu-l} + \frac{G_\nu}{\nu^n} \right),$$

где $D > D_1$, D_2 и $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ постоянные числа. Полагая $G_\nu < \left(\frac{K}{R}\right)^\nu$, где $K > 1$ постоянная, легко получим, что ряд $\frac{1}{w^\mu} \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varphi_s(w) z^s$ сходится равномерно при $|w| < \frac{R}{\bar{B}}$ и $|z| < \frac{R}{\bar{B}}$, который, следовательно, является аналитической функцией $\left(\text{здесь } \bar{B} = \max(B, K)\right)$.

Пусть теперь имеют место условия п.4 и пусть к тому же целая функция. Тогда

$$A_\nu < \frac{D}{\nu} \sum_{l=1}^{\nu} \frac{l}{R^l} A_{\nu-l} + \frac{G_\nu}{\nu^n}.$$

Полагая, что $A_{\nu-j} < C_1 \left(\frac{B}{R}\right)^{\nu-j}$ и $G_\nu < C_2 \left(\frac{B}{R}\right)^\nu$, где $B = 1 + q$, $q > 0$ — произвольная постоянная, как и раньше получаем следующую оценку $A_\nu < \left(\frac{(1+q) D}{q^2 \nu} + \frac{1}{\nu^n} \right) C \left(\frac{B}{R}\right)^\nu$, где $C = \max(C_1, C_2)$. Подберем число ν_0 настолько большое, чтобы для всех $\nu > \nu_0$ выполнялось неравенство $\frac{(1+q) D}{q^2 \nu} + \frac{1}{\nu^n} \leqslant 1$. Выбираем теперь число C такое, чтобы было $A_{\nu-j} < C \left(\frac{B}{R}\right)^{\nu-j}$ для всех $\nu < \nu_0$. Дальше проводя рассуждения, как и в п.4, убеждаемся, что ряд $\frac{1}{w^\mu} \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varphi_s(w) z^s$ представляет целую функцию.

6. Теперь докажем нашу теорему для уравнения $L_m(u) = 0$. Доказательство будем вести методом индукции по числу переменных. Пусть теорема верна для уравнения $L_{m-1}(u) = 0$ ($m-1$ переменных) и существует решение уравнения

$$L_{m-1}(u) = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \ldots z_{m-1}^{\lambda_{m-1}} F(z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}), \tag{17}$$

где $F(z_1, z_2, \ldots, z_{m-1})$ — голоморфная функция в некоторой окрестности начала координат, и λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ — такие числа, что ни при каких неотрицательных целых $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ полином

$$Q(\lambda_1 + t_1, \lambda_2 + t_2, \ldots, \lambda_{m-1} + t_{m-1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_{m-1}=k} F^k_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}}(0, 0, \ldots, 0) \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\Gamma(\lambda_j + t_j + 1)}{\Gamma(\lambda_j + t_j - i_j + 1)}$$

не обращается в нуль. Возможность выбора таких чисел, как и в пункте 2, следует из необращения в нуль соответствующей однородной формы (2).

Выражая функции в форме

$$F^k_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \sum_{p_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{p_m=0}^{\infty} a^{(i_1 \ldots i_m)}_{p_1 \ldots p_m} z_1^{p_1} \ldots z_m^{p_m},$$

решения уравнения (1) будем искать в виде:

$$u=\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{m-1})\,z_m^{\lambda_m+s}.$$

Подставив это значение в уравнение (1) и сравнив коэффициенты, получим:

$$\sum_{s=0}^{t}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=k}\sum_{P_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{P_{m-1}=0}^{\infty}a_{P_1\ldots P_{m-1}}^{(i_1\ldots i_{m-1})}\frac{\Gamma(\lambda_m+s+1)}{\Gamma(\lambda_m+s-i_m+1)}\times$$

$$\times\frac{\partial^{n-k}\varphi_s(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{m-1})}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}\ldots\partial z_{m-1}^{i_{m-1}}}z_1^{P_1}z_2^{P_2}\ldots z_m^{P_m}=0.$$

Последовательная разрешимость этой системы доказывается точно также, как и в пункте 2, на основании допущения разрешимости уравнения (17). Пусть

$$z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}\ldots z_{m-1}^{\lambda_{m-1}}\varphi_s(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{m-1})=$$

$$=\sum_{j_1+\ldots+j_{m-1}=0}A^{s}_{j_1\ldots j_{m-1}}z_1^{j_1}\ldots z_{m-1}^{j_{m-1}}.$$

Вводя обозначения $A_\nu=\max|A_{j_1\ldots j_{m-1}}|$, $j_1+\ldots+j_{m-1}=\nu$ рассуждениями, аналогичными как и в пунктах 3 и 4, придем к тем же оценкам (16) и (16а), в зависимости от того, будут ли коэффициенты уравнения (1) удовлетворять условиям пункта 3, или пункта 4. Таким же путем заключаем, что ряд (18) сходится равномерно, и, следовательно, является аналитической функцией. Этим и завершаем доказательство теоремы.

7. Рассмотрим несколько примеров:

а) в уравнении $z\frac{\partial u}{\partial z}+w\frac{\partial u}{\partial w}=zw\,\mathrm{ch}\,zw\cdot u$ форма $Q(\eta_1,\ \eta_2)=\eta_1+\eta_2$ при $\eta_1+\eta_2=1$, дает $Q=1$ и не обращается в нуль. Общее решение представимо в виде $u=f\left(\frac{z}{w}\right)e^{\mathrm{ch}\,zw}$. Полагая $f(x)=x^\lambda$, мы придем к требуемым решениям, что согласуется с утверждением теоремы;

б) в уравнении второго порядка с тремя переменными

$$z_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}+2z_1z_2\frac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial z_2}+z_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2}+2z_2z_3\frac{\partial^2 u}{\partial z_2\partial z_3}+z_3^2\frac{\partial^2 u}{\partial z_3^2}+$$

$$+2z_1z_3\frac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial z_3}+z_1\frac{\partial u}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial u}{\partial z_2}+z_3\frac{\partial u}{\partial z_3}=u$$

форма $Q(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)=(\eta_1+\eta_2+\eta_3)^2$ при $\eta_1+\eta_2+\eta_3=1$ не обращается в нуль. Имеем решения вида $u=z_1^{2\lambda}z_2^{\lambda}z_3^{-\lambda}(z_3-z_2)$;

в) в уравнении $wz\frac{\partial u}{\partial z}+w^2\frac{\partial u}{\partial w}=zu$ форма $Q(\eta_1,\ \eta_2)\equiv0$. Общее решение имеет вид $u=f\left(\frac{z}{w}\right)w^{\frac{z}{w}}$ и решений, искомого вида не существуют.

Пользуясь случаем, приношу благодарность доценту Ш. И. Стрелицу, предложившему мне эту тему и оказавшему необходимую помощь.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
14.V.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. И. Стрелиц, Аналог теоремы Фукса для решений линейных уравнений в частных производных, Мат. сб., 1963, т. 60 (102), № 2, 121–130.
2. В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М.–Л., Гостехиздат, 1950.

VIENOS TIESINIŲ LYGČIŲ SU DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS KLASĖS ANALIZINIAI SPRENDINIAI

J. KISIELIUS

(Reziumė)

Darbe įrodyta ši

Teorema. Sakysime, kad lygtyje su dalinėmis išvestinėmis

$$L_m(u)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=k} F^k_{i_1 i_2\ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)\times$$

$$\times z_1^{i_1} z_2^{i_2}\ldots z_m^{i_m}\frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_m}u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}\ldots\partial z_m^{i_m}},$$

kur $F^k_{i_1 i_2\ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ – funkcijos reguliarios policilindre $|z_1|\leqslant R_1, \ldots, |z_m|\leqslant R_m$, homogeninė forma

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} F^n_{i_1 i_2\ldots i_m}(0, 0, \ldots, 0)\,\eta_1^{i_1}\eta_2^{i_2}\ldots\eta_m^{i_m}$$

nevirsta nuliu, kai $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ ne neigiami ir $\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_m=1$. Tuomet yra be galo daug šitokių tiesiškai nepriklausomų sprendinių:

$$u=z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}\ldots z_m^{\lambda_m}f(z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

kur λ_j, $j=1, 2, \ldots, m$ – pastovūs skaičiai, o $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ – reguliari funkcija koordinačių pradžios aplinkoje. Atskiru atveju, kai $F^n_{i_1 i_2\ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)\equiv\text{const}$ visiems tokiems $i_1, i_2, \ldots, i_m$, kuriems $i_1+i_2+\ldots+i_m=n$, o kitos funkcijos sveikos, tai ir $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ yra sveika funkcija.

ANALYTISCHE LÖSUNGEN EINER KLASSE LINEAREN GLEICHUNGEN MIT PARTIELLEN ABLEITUNGEN

J. KISIELIUS

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir den folgenden Satz. Es sei die homogene Form

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} F^n_{i_1 i_2\ldots i_m}(0, 0, \ldots, 0)\,\eta_1^{i_1}\eta_2^{i_2}\ldots\eta_m^{i_m}$$

der partiellen Differentialgleichungen

$$L_m(u)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1+i_2+\ldots i_m=k} F^k_{i_1 i_2\ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)\times$$

$$\times z_1^{i_1} z_2^{i_2}\ldots z_m^{i_m}\frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_m}u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}\ldots\partial z_m^{i_m}}=0,$$

wo $F^k_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — reguläre Funktionen im Polizylinder $|z_1| \leqslant R_1, \ldots, |z_m| \leqslant R_m$ sind, verschieden von Null für alle nichtnegatyve $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ mit $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m = 1$. Dann existiert eine unendliche Menge von linearunabhängigen Lösungen der Form

$$u = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \ldots z_m^{\lambda_m} f(z_1, z_2, \ldots z_m), \qquad \text{(I)}$$

wo $\lambda_j = \text{const}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ und $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ eine reguläre Funktion in der Umgebung des Anfangspunktes der Koordinatensystems ist. Im besonderen Falle, wenn die Funktionen $F^n_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m) \equiv \text{const}$ für alle Indexe $i_1, i_2, \ldots, i_m$ mit $i_1 + i_2 + \ldots + i_m = n$ und alle übrigen Funktionen $F^k_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ganze sind, ist die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ in (I) eine ganze.