V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2

1965

ОДНОСТОРОННЯЯ ТРАКТОВКА И УТОЧНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ ЧЕБЫШЕВСКОГО ТИПА

В. М. ЗОЛОТАРЕВ

1. Введение

Из всего многообразия известных в теории вероятностей неравенств, несомненно, одно из центральных мест занимает неравенство П. Л. Чебышева. Самое старшее по возрасту в теории вероятностей и все еще необыкновенно молодое по силе, это неравенство, несмотря на свою исключительную простоту и прозрачность, продолжает оставаться одним из самых замечательных математических инструментов. За сто лет существования неравенства Чебышева теория вероятностей пополнилась серией различных его уточнений, образовавших обширное семейство неравенств. Неравенства этого семейства будут предметом дальнейшего рассмотрения. Помимо нескольких неравенств, являющихся по существу новыми, и нескольких новых доказательств уже известных неравенств в статье будут проведены обобщения важнейших неравенств рассматриваемого семейства, исходя из одного простого общего соображения, суть которого сводится к тому, что вероятностные свойства случайной величины или процесса, принимающих вещественные значения, естественно рассматривать отдельно на положительной и отрицательной полуосях, привлекая при этом условия, налагаемые на величину (или процесс) на соответствующих полуосях. Эта мысль была впервые высказана автором в 1960 году на VI Всесоюзной конференции по теории вероятностей в Вильнюсе. Изложение общих соображений об односторонней трактовке классической тематики и некоторые конкретные результаты, полученные с их помощью, были изложены в Трудах конференции [1].

Типичным примером односторонней трактовки классической предельной теоремы может служить следующее обобщение известной теоремы Г. Крамера о больших уклонениях сумм независимых случайных величин (в [1] приведена аналогичная теорема для плотностей).

Теорема 1. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – *последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих условиям*

1° $M\xi_i = 0, \ M\xi_i^2 = 1$,

2° *Математическое ожидание* $\varphi(s) = M\exp(s\xi_i)$ *существует для некоторого положительного значения* $s = A$.

Образуем нормированные суммы $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/\sqrt{n}$. *Пусть* $F_n(x)$ – *функции распределения этих сумм и* $\Phi(x)$ – *функция распределения нормального закона, с параметрами* $(0, 1)$.

Тогда при $n \to \infty$ имеет место следующее асимптотическое представление (x — произвольное положительное):

$$\frac{1-F_n(x)}{1-\Phi(x)} = \frac{x}{\rho\sqrt{n}}\,\varphi^n(\rho)\exp\left(\frac{x^2}{2} - x\sqrt{n}\,\rho\right)\left(1+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

где $\rho = \rho\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ *является единственным положительным корнем уравнения*

$$\varphi'(\rho) = \frac{x}{\sqrt{n}}\,\varphi(\rho).$$

На примере этой теоремы можно видеть, что новая постановка ставшей уже классической задачи привела с одной стороны к ослаблению накладываемых условий, а с другой к новой и, по-видимому, более естественной форме записи главного члена асимптотического представления.

Вторым примером, особенно ясно показывающим, насколько пагубной иногда оказывается традиционная двухсторонняя постановка задач для существа исследования, может служить уточнение одной теоремы Хинчина. В одной из своих работ [2] А. Я. Хинчин проводит исследование классов верхних и нижних функций для траекторий устойчивых процессов $\xi_\alpha(t)$. По-видимому, по аналогии с такой же задачей для Винеровского процесса он рассматривает не сам процесс, а $|\xi_\alpha(t)|$. Но Винеровский процесс симметричен, и для него безразлично, что рассматривать — процесс или его абсолютную величину, в то время как устойчивые процессы в большинстве несимметричны и уверенность, которую, возможно, имел А. Я. Хинчин, что несимметричность устойчивых процессов не окажет влияния на выводы, независимо от того, будем ли мы рассматривать $\xi_\alpha(t)$ или $|\xi_\alpha(t)|$, не подтвердилась*. В этом можно убедиться, сравнивая результаты упомянутой работы А. Я. Хинчина со следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть $\xi_\alpha(t)$ — однородный устойчивый процесс, характеристическая функция которого имеет вид*

$$f(\lambda) = M\exp\{i\lambda\xi_\alpha(t)\} = \begin{cases} \exp\left\{\frac{t}{\alpha}(i\lambda)^\alpha\right\}, & \text{если} \quad \alpha > 1, \\ \exp\{t(i\lambda)\log(i\lambda)\}, & \text{если} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$\psi(t) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\,t^{\frac{1}{\alpha-1}}\log\log t\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, & \text{если} \quad \alpha > 1, \\ \frac{\pi e}{2}(\log\log t)^t, & \text{если} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Тогда, с вероятностью единица, можно утверждать, что

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\eta_\alpha(t)}{\psi(t)} = 1,$$

где

$$\eta_\alpha(t) = \begin{cases} \xi_\alpha(t), & \text{если} \quad 1 < \alpha \leqslant 2, \\ \exp\{\xi_1(t)\}, & \text{если} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

* Традиционность двухсторонней постановки этой задачи оказала плохую услугу и Б. В. Гнеденко, который интересуясь существованием с вероятностью 1 точных верхних границ для траекторий устойчивых процессов доказал [7], что для $|\xi_\alpha(t)|$ таких границ не существует, если $\alpha \geqslant 1$. Теорема 2 показывает, что ответ на этот вопрос радикально меняется, если его ставить в односторонней форме.

Эта теорема является аналогом и одновременно обобщением закона повторного логарифма для Винеровского процесса (предельный переход $\alpha \to 2$ осуществляет симметризацию рассматриваемых в теореме полунепрерывных устойчивых процессов и, тем самым, обеспечивает переход этих процессов в Винеровский).

Характерной чертой обоих теорем является то, что в качестве требований в них используется существование некоторых средних значений, которые, как нетрудно заметить, конечны тогда, и только тогда, когда конечны их части, связанные с той полуосью, на которой мы получаем свои утверждения. Эта форма условий будет принята и в дальнейшем, поэтому для „половинок" средних значений мы введем специальное обозначение

$$M^+ f(\xi) = \int_0^\infty f(x)\, dF_\xi(x). \tag{1}$$

Неравенства Чебышевского типа мы будем разделять на три группы, понимая, конечно, что такое деление является, в известной степени, условным.

1. Неравенства уточняющие, собственно, неравенство Чебышева. Эти неравенства не используют специфических эффектов схемы суммирования независимых случайных величин или ее ослабленного варианта, которые непременно будут присутствовать в неравенствах второй и третьей групп.

2. Неравенства аналогичные неравенствам Колмогорова.

3. Неравенства аналогичные неравенству Бернштейна.

В третьей группе, в отличие от второй, условия налагаются на бесконечное число средних или „полусредних" характеристик случайных объектов. Отметим, что большая часть теорем этих групп будет использовать не условие независимости в схеме суммирования, а более слабое – что суммы образуют мартингал или даже полумартингал.

Лемма, содержащаяся в приложении, используется только частично при доказательстве обобщенного неравенства Бернштейна. Однако, она приводится полностью, так как, по мнению автора, может оказаться полезной во многих частях аналитических методов, используемых в теории вероятностей.

2. Обобщения и уточнения неравенства Чебышева

Теорема 3. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *определена на полуоси* $(0, \infty)$ *и обладает свойствами*

а) $\varphi(+0) \geqslant 0$,

б) $\varphi(x)$ *неубывает с ростом* x.

Тогда для любой случайной величины ξ *и произвольного положительного* x *имеем (если, конечно, правая часть существует):*

$$P\{\xi \geqslant x\} \leqslant \frac{M^+ \varphi(\xi)}{\varphi(x)}. \tag{2}$$

Условия а), б) *являются наилучшими достаточными в том смысле, что если одно из них нарушено, то найдутся случайная величина* ξ_0 *и положительное* x_0 *такие, что неравенство* (2) *для них не будет выполнено.*

Доказательства этого простого утверждения мы приводить не будем. Укажем только, что анализ ситуации в случае нарушения условий теоремы проводится точно так же, как это делалось при доказательстве аналогичной теоремы в [3].

Далее будет использоваться следующие характеристики случайных величин

$$U_\nu = M(\xi^\nu \mid \xi > 0) = M^+ \xi^\nu (M^+ \xi^0)^{-1}, \qquad \nu \geqslant 0.$$

Теорема 4. *Пусть для случайной величины существует „полумомент" $M^+ \xi^{2r}$ и, кроме того, $M^+ \xi^0 > 0$. Тогда для значений $x^r > U_r$ справедливо неравенство*

$$P\{\xi \geqslant x\} \leqslant M^+ \xi^0 \cdot \frac{U_{2r} - U_r^2}{U_{2r} - 2x^r U_r + x^{2r}}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть a — некоторое число и $x > 0$ такое, что $x^r + a > 0$. Согласно (2) имеем

$$P\{\xi \geqslant x\} \leqslant \frac{M^+ (\xi^r + a)^2}{(x^2 + a)^2} = M^+ \xi^0 \cdot \frac{U_{2r} + 2aU_r + a^2}{(x^r + a)^2} = I^+ (a).$$

Наименьшее значение $I^+(a)$ достигается, как легко подсчитать, при

$$a = a_0 = \frac{U_{2r} - x^r U_r}{x^r - U_r},$$

а сам минимум оказывается равным правой части неравенства (3). Поскольку $x^r + a_0$ является положительной величиной при $x^r > U_r$, то тем самым подтверждается законность использования (2).

Замечание. Известное равенство такого же типа

$$P\{|\xi| \geqslant x\} \leqslant \frac{\beta_{2r} - \beta_r^2}{\beta_{2r} - 2x^r \beta_r + x^{2r}}, \qquad x^r > \beta_r, \tag{4}$$

где β_r обозначает абсолютный момент порядка r, вытекает из (3) и наоборот. Действительно, пусть $I^-(a)$ обозначает функцию аналогичную функции $I^+(a)$, но связанную с отрицательной полуосью. Тогда

$$P\{|\xi| \geqslant x\} \leqslant \frac{M(|\xi|^r + a)^2}{(x^r + a)^2} = I(a) = I^+(a) + I^-(a).$$

Неравенство (4) получается минимизацией $I(a)$, но поскольку

$$\min_a I^+(a) + \min_a I^-(a) \leqslant \min_a I(a),$$

то (4) следует из (3). Обратное заключение получается столь же просто.

Теорема 5. *Пусть случайная величина ξ такова, что*

$$M\xi^{2k-1} \leqslant 0, \quad M\xi^{2k} \leqslant \frac{\binom{s}{k}}{\binom{2s}{2k}} (2s-1)^k (M\xi^2)^k,$$

для $k = 1, 2, \ldots, s$. Тогда для всех положительных x можно утверждать, что

$$P\left\{\xi \geqslant x\sqrt{M\xi^2}\right\} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{2s-1}\right)^{-s}. \tag{5}$$

Заметим, что при $s = 1$ мы получим известное неравенство Кантелли.

Доказательство. Очевидно, мы вправе, не ограничивая себя при этом, считать $M\xi^2 = 1$. Пусть s — любое натуральное число, a — произвольное вещественное число и $x>0$ такое, что $x+a>0$. Применяем первенство (2):

$$P\{\xi \geqslant x\} \leqslant \frac{M(\xi+a)^{2s}}{(x+a)^{2s}}.$$

Использование условий теоремы дает нам

$$M(\xi+a)^{2s} = \sum_{k=0}^{s} \binom{2s}{2k} a^{2(s-k)} M\xi^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{s} \binom{2s}{2k} a^{2s-2k} \frac{\binom{s}{k}}{\binom{2s}{2k}} (2s-1)^k = (2s-1+a^2)^s.$$

Минимизируем по переменному a отношение

$$K(a) = \frac{(2s-1+a^2)^s}{(x+a)^{2s}}.$$

Нетрудно проверить, что минимум $K(a)$ достигается в точке

$$a_0 = \frac{1}{x}(2s-1) > 0$$

(т. е. использование (2) законно) и равен правой части неравенства (5).

Число S в теореме 5 могло быть произвольным. При $s \to \infty$ имеем

$$\frac{\binom{s}{k}}{\binom{2s}{2k}} (2s-1)^k \to \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad \text{и} \quad \left(1+\frac{x^2}{2s-1}\right)^{-s} \to \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Мы приходим, таким образом, к следующему утверждению, являющемуся частным случаем неравенства Бернштейна (правда, при несколько ослабленных условиях $M\xi^{2k-1} \leqslant 0$ вместо условия Бернштейна $M\xi^{2k-1}=0$).

Теорема 6. *Пусть η – нормально распределенная $(0,1)$ случайная величина и ξ – такая случайная величина, что при $k=1, 2, \ldots$*

$$M\xi^k \leqslant M\eta^k.$$

Тогда при всех положительных значениях x имеем

$$P\{\xi \geqslant x\} \leqslant \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{6}$$

Мы умышленно ввели в формуловку теоремы нормально распределенную случайную величину, чтобы подчеркнуть, что нормальный порядок убывания в (6) существенно зависит от оценок моментов случайной величины ξ соответствующими моментами величины η.

Эту естественную мысль о том, что поведение распределения ξ определяется поведением моментов ξ, мы разовьем и уточним в следующих трех теоремах. Под η, как и в теореме 6, будет пониматься нормально распределенная $(0, 1)$ случайная величина.

Теорема 7. *Пусть для случайной величины ξ выполнены условия*

$$M^+\xi^k \leqslant M^+\eta^k = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\right); \qquad k=1, 2, \ldots$$

Тогда для всех значений x справедливо неравенство

$$P\{\xi \geqslant x\} \leqslant P\{\eta \leqslant x\} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{7}$$

Доказательство. Согласно (2), для любого положительного λ имеем

$$P\{\xi\geqslant x\}\leqslant \exp(-\lambda x)\, M^+ \exp(\lambda\xi)=\exp(-\lambda x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}M^+\xi^n\leqslant$$
$$\leqslant \exp(-\lambda x)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\sqrt{2})^n}{n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp(-\lambda x)\int_0^{\infty}\exp(-u+\lambda\sqrt{2u})\frac{du}{\sqrt{u}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-\lambda x)\int_0^{\infty}\exp\ (-u^2+\lambda\sqrt{2}\,u)\,du=\exp\left(-\lambda x+\frac{\lambda^2}{2}\right)P\{\eta\leqslant\lambda\}.$$

Положим, $\lambda=cx$. Наибольшее значение сумма $c-\frac{c^2}{2}$ принимает, очевидно, при $c=1$, откуда и следует неравенство (7).

Теорема 8. *Пусть случайная величина ξ такова, что для всех натуральных значений k*

$$M^+\xi^{2k}\leqslant M^+\eta^{2k}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}2^k\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

Тогда для всех $x\geqslant 1$

$$P\{\xi\geqslant x\}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{e}\,x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{8}$$

Доказательство. Согласно (2), при любом $\lambda>0$

$$P\{\xi\geqslant x\}\leqslant\exp(-\lambda x^2)\,M^+\exp(\lambda\xi^2)=\exp(-\lambda x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}M^+\xi^{2n}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp(-\lambda x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\lambda)^n}{n!}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp(-\lambda x^2)\int_0^{\infty}\exp(-u+2\lambda u)\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Положим $\lambda=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c^2$ и найдем, что

$$P\{\xi\geqslant x\}\leqslant\frac{1}{2c}\exp\left(\frac{1}{2}c^2x^2\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Минимум произведения $\frac{1}{2c}\exp\left(\frac{1}{2}c^2x^2\right)$ достигается, как нетрудно проверить, при $c=\frac{1}{x}$ и равен $\frac{1}{2}\sqrt{e}\,x$, т.е. мы получили (8).

Следующая теорема основывается на тех же идеях и методах, что и предыдущие две, однако здесь в качестве эталона будет браться не нормальная случайная величина, а устойчивая, ξ_α, преобразование Лапласа которой в полуплоскости $\mathrm{Re}\,s\leqslant 0$ существует и имеет вид

$$M\exp(-s\xi_\alpha)=\exp\{(-s)^\alpha\}.\qquad 1<\alpha\leqslant 2.$$

Известно [4], что для таких случайных величин все „полумоменты", связанные с положительной полуссью, существуют и могут быть явно выписаны:

$$M^+\xi_\alpha^r=\frac{\Gamma(1+r)}{\alpha\Gamma\left(1+\frac{r}{\alpha}\right)},\qquad r>-\alpha$$

Теорема 9. *Пусть случайная величина ξ такова, что для всех натуральных значений k*

$$M^+\xi^{\alpha k} \leqslant M^+\xi_\alpha^{\alpha k}, \qquad 1<\alpha<2.$$

Тогда для произвольного $x \geqslant \alpha$ имеет место неравенство

$$P\{\xi \geqslant x\} \leqslant C(\alpha)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} \exp\left\{-(\alpha-1)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}, \qquad C(\alpha)<\frac{16}{\alpha}. \tag{9}$$

Доказательство. В неравенстве (2) выберем функцию $\varphi(x) = \exp\left(\frac{1}{4}\Lambda^{2-\alpha}x^\alpha\right)$. Привлекая условия теоремы, имеем

$$P\{\xi \geqslant x\} \leqslant \varphi^{-1}(x) M^+\varphi(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\varphi^{-1}(x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\Lambda^{2-\alpha}\right)^n \frac{\Gamma(1+\alpha n)}{\Gamma^2(1+n)} = \frac{1}{\alpha}\varphi^{-1}(x)\,Q(\Lambda),$$

где

$$Q(\Lambda) = \int_0^\infty e^{-u} I_0\left(\Lambda^{\frac{2-\alpha}{2}} u^{\frac{\alpha}{2}}\right) du.$$

Здесь $I_0(z)$ – функция Бесселя мнимого аргумента. Оценим эту функцию для вещественных значений z. Как известно,

$$I_0(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(zt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Следовательно, $(z>0)$:

$$I_0(z) \leqslant \frac{2}{\pi}e^z\int_0^1 \exp\{-z(1-t)\}\frac{dt}{\sqrt{1-t}} =$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{z}}e^z\int_0^z e^{-v}\frac{dv}{v} < \frac{2}{\pi\sqrt{z}}\int_0^\infty e^{-v}\frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{2}{\sqrt{\pi z}}e^z. \tag{10}$$

Заметим, что полученная оценка правильно передает порядок поведения функции $I_0(z)$, что видно из получаемой таким же образом нижней оценки

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}e^z \leqslant I_0(z).$$

Из неравенства (10) следует

$$Q(\Lambda) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Lambda^{-\frac{2-\alpha}{4}}\int_0^\infty \exp\left\{-u+\Lambda^{\frac{2-\alpha}{2}}u^{\frac{\alpha}{2}}\right\}u^{-\frac{\alpha}{4}}\,du = J(\Lambda). \tag{11}$$

Введем величину

$$\Delta = (4\alpha^{-\alpha})^{\frac{1}{2-\alpha}}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}};$$

нетрудно проверить, что справедливы следующие оценки

$$4\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \leqslant \Delta \leqslant 2e\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \tag{12}$$

Положим теперь

$$\Lambda = \Delta\cdot\Theta^{\frac{2}{2-\alpha}}, \quad \Theta = 1-k\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

и преобразуем интеграл в правой части (11)

$$I(\Lambda)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\Theta^{-\frac{2-\alpha}{4}}\sqrt{\Delta}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\Delta\left(u-u^{\frac{\alpha}{2}}\right)-k\Delta\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}u^{\frac{\alpha}{2}}\right\}u^{-\frac{\alpha}{4}}\,du=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\Theta^{-\frac{2-\alpha}{4}}\sqrt{\Delta}\left\{\int\limits_0^1+\int\limits_1^\infty\right\};\qquad S_1=\int\limits_0^1,\qquad S_2=\int\limits_1^\infty.$$

Оценим теперь интегралы S_1 и S_2. В силу (12), $\Delta\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\geqslant 4$. Поэтому

$$S_2<\int\limits_0^\infty \exp\left\{-4ku^{\frac{\alpha}{2}}\right\}u^{-\frac{\alpha}{4}}\,du=\frac{2}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)(4k)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{\alpha}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\pi}\,(4k)^{-\frac{4-\alpha}{2\alpha}}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}. \tag{13}$$

Обозначим для краткости $\nu=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}$. Нетрудно проверить, что в интервале $0\leqslant u\leqslant 1$ справедливо следующее неравенство

$$u^{\frac{\alpha}{2}}-u\leqslant\nu^{\frac{\alpha}{2}}-\nu-\frac{\nu^{\frac{\alpha}{2}}}{2(1-\nu)}\,(u-\nu)^2. \tag{14}$$

Используя (14), мы можем записать

$$S_1\leqslant\exp\left\{\Delta\left(\nu^{\frac{\alpha}{2}}-\nu\right)\right\}\int\limits_0^1\exp\left\{-\frac{\Delta\nu^{\frac{\alpha}{2}}}{2(1-\nu)}\cdot(u-\nu)^2\right\}u^{-\frac{\alpha}{4}}\,du<$$

$$<\frac{4}{4-\alpha}\exp\left\{\Delta\left(\nu^{\frac{\alpha}{2}}-\nu\right)\right\}<2\exp\left\{\Delta\left(\nu^{\frac{\alpha}{2}}-\nu\right)\right\}. \tag{15}$$

Оценки (13), (15) приводят нас к суммарной оценке функции $I(\Lambda)$:

$$I(\Lambda)<\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\Theta^{-\frac{2-\alpha}{4}}\sqrt{\Delta}\left(2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\right)\exp\left\{\Delta\left(\nu^{\frac{\alpha}{2}}-\nu\right)\right\}. \tag{16}$$

Сделаем еще два замечания, которые позволят нам получить окончательную оценку интересующей нас вероятности. Для значений $x\geqslant\alpha$, как это видно из (12) и определения Θ, имеем

$$\Theta^{-\frac{2-\alpha}{4}}\leqslant(1-k)^{-\frac{2-\alpha}{4}}\leqslant(1-k)^{-\frac{1}{4}}. \tag{17}$$

Кроме того,

$$\exp\left\{-\frac{1}{4}\,\Lambda^{2-\alpha}x^\alpha+\Delta\left(\nu^{\frac{\alpha}{2}}-\nu\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{4}\,\Delta^{2-\alpha}x^\alpha+\Delta\left(\nu^{\frac{\alpha}{2}}-\nu\right)+\frac{1}{4}\,\Delta^{2-\alpha}x^\alpha(1-\Theta^2)\right\}<$$

$$<\exp(2k)\exp\left\{-(\alpha-1)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}=e^{2k}T(x). \tag{18}$$

Собирая воедино все оценки, мы можем заключить, что

$$P\{\xi\geqslant x\}<\frac{B(k)}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}T(x),\qquad B(k)=\sqrt{2e}\,\frac{\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{\frac{1}{k}}\right)}{\sqrt[4]{1-k}}\,e^{2k}.$$

Число k пока было произвольным. Если выбрать $k=\frac{1}{8}$, то мы получим константу $B\left(\frac{1}{8}\right)$, не превосходящую 16.

Замечание 1. Для сравнения мы приведем асимптотическое представление распределения случайной величины ξ_α, которой была отведена роль эталона. Эту асимптотику можно получить, используя [6] и [4]:

$$P\{\xi_\alpha \geqslant x\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(\alpha-1)}}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} \exp\left\{-(\alpha-1)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}. \qquad (19)$$

Мы видим, что в правых частях (9) и (19) главные показательные сомножители совпадают и различие имеется только в степенных сомножителях. Показатель степени при этом получился таким, что для значения $\alpha=2$ порядок степенного сомножителя совпадает с порядком, который мы наблюдали в неравенстве (8), полученным при аналогичных предположениях. Это обстоятельство позволяет думать, что, по крайней мере, в рамках данного метода нам не удастся существенно снизить показатель степенного сомножителя. Вместе с тем, заведомо можно улучшить оценку константы $C(\alpha)$ в (9) настолько, чтобы при $\alpha=2$ она была бы равна $\frac{1}{2}\sqrt{e}$ (т. е. тому, что наблюдалось в (8)).

Замечание 2. Теоремы 6–9 по сути дела являются разновидностью теорем тауберова типа. С учетом этого обстоятельства становится понятным, почему оценка (7) оказалась лучше, чем (8), и что вообще получаемая оценка будет тем лучше в теоремах с условиями на рост $M^+\xi^{\sigma k}$, чем меньше σ.

Замечание 3. Доказанные нами теоремы приводят к следующему естественному предположению.

Если случайная величина ξ такова, что $M^+\xi^k \geqslant M^+\eta^k$ для всех целых неотрицательных значений, то найдутся такие положительные константы γ, A, B, что

$$P\{\xi \geqslant x\} \geqslant Ax^{-\gamma}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad x \geqslant B.$$

3. Обобщение и уточнение неравенств Колмогорова

Большая часть приводимых далее теорем будет доказываться для последовательностей случайных величин, образующих мартингал Леви. Мартингалом Леви принято называть такую последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, имеющих конечные математические ожидания, для которых

$$M(\xi_k \mid \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) = 0.$$

В терминах сумм случайных величин $\zeta_k=\xi_1+\ldots+\xi_n$ это условие будет равносильно условию (последовательность $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ называют просто мартингалом):

$$M(\zeta_k \mid \zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}) = \zeta_{k-1}. \qquad (20)$$

Напомним, что любая последовательность случайных величин преобразуется в мартингал Леви после центрирования этих величин соответствующими условными математическими ожиданиями*.

Теорема 10. *Пусть последовательность* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ *образует мартингал и пусть функция* $\varphi(x)$, *определенная на вещественной оси обладает следующими свойствами*

1° φ — *не убывает с ростом* x,

2° φ — *выпуклая,*

3° φ — *неотрицательная.*

Тогда для любого вещественного x *справедливо неравенство*

$$P\{\sup_{k\leqslant n}\zeta_k \geqslant x\} \leqslant \frac{M\varphi(\zeta_n)}{\varphi(x)}. \tag{21}$$

Условия 1°—3° *являются существенными в том смысле, что при нарушении одного из них можно указать такую последовательность случайных величин, образующих мартингал и такое* x_0, *что* (21) *не будет выполнено.*

Первая часть этой теоремы хорошо известна в теории мартингал-процессов [5]. Существенность условий 1°—3° нигде не будет нами использоваться далее, и потому мы не будем приводить здесь ее доказательства. Укажем только, что в двусторонней постановке такая теорема полностью доказывалась в [3].

Если функцию $\varphi(x)$ выбрать несколько специальным образом, то мы получим одностороннюю трактовку неравенства Колмогорова.

Именно, пусть $\varphi(x)$ *на полуоси* $(0, \infty)$ *обладает следующими свойствами*

1° φ — *не убывает с ростом* x,

2° φ — *выпуклая,*

3° $\varphi(+0)=0$.

Тогда для последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, *образующей мартингал, и положительных значений* x *можно утверждать, что*

$$P\{\sup_{k\leqslant n}\xi_k \geqslant x\} \leqslant \frac{M^+\varphi(\zeta_n)}{\varphi(x)}. \tag{22}$$

Условия 1°—3° *являются здесь существенными в том же смысле, что и в теореме* 10.

Теорема 11. *Пусть последовательность* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ *образует мартингал и* $D\zeta_n$ *существует. Тогда для* $x>0$

$$P\{\sup_{k\leqslant n}\zeta_k \geqslant x\} \leqslant \frac{D\zeta_n}{D\zeta_n + x^2}. \qquad 23$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в неравенстве (21) функцию

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} (y+a_x)^2 & \text{если} \quad y+a_x > 0, \\ 0 & \text{если} \quad y+a_x \leqslant 0, \end{cases}$$

* Везде в дальнейшем, ради единообразия, будет использоваться понятие мартингала, хотя ряд теорем (теоремы 10, 12, 14) остаются справедливыми и при более общем предположении, что случайные величины $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ образуют полумартингал, т. е.

$$M(\zeta_k \mid \zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}) \geqslant \zeta_{k-1}.$$

где $x \geqslant 0$ и $a_x = \frac{1}{x} M\zeta_n^2 > 0$. Очевидно, что $\varphi_x(y)$ удовлетворяет условию теоремы 10 и потому для $y > -a_x$ выполняется (21). В частности при $y = x$ получим

$$P\{\sup_{k \leqslant n} \zeta_k \geqslant x\} \leqslant \frac{M\varphi_x(\zeta_n)}{(x+a_x)^2} \leqslant \frac{M(\zeta_n+a_x)^2}{(x+a_x)^2} = \frac{M\zeta_n^2+a_x^2}{(x+a_x)^2} = \frac{M\zeta_n^2}{M\zeta_n^2+x^2} = \frac{D\zeta_n}{D\zeta_n+x^2}.$$

Неравенство Колмогорова является уточнением неравенства Чебышева в том смысле, что оно, используя специальные эффекты схемы суммирования независимых случайных величин, утверждает значительно больше, чем неравенство Чебышева при тех же предположениях. Мы видим на примере теоремы 11, что уточнение Кантелли (теорема 5, $s=1$) неравенства Чебышева безболезненно переносится на неравенство Колмогорова. Поэтому естественно попытаться перенести на неравенство Колмогорова и другие уточнения неравенства Чебышева, не выдвигая при этом никаких дополнительных условий. Аналогом неравенства (4) в этом направлении является следующая теорема. Как и в теореме 4, мы будем пользоваться обозначением

$$U_\nu = M(\zeta_n^\nu \mid \zeta_n > 0) = M^+ \zeta_n^\nu / M^+ \zeta_n^0.$$

Теорема 12. *Пусть последовательность случайных величин $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ образует мартингал, величина ζ_n имеет конечный полумомент $M^+\zeta_n^{2r}$ порядка $2r > 0$ и $M^+\zeta_n^0 > 0$. Тогда для всех $x^r > U_{2r}/U_r$ имеет место неравенство*

$$P\{\sup_{k \leqslant n} \zeta_k \geqslant x\} \leqslant M^+ \zeta_n^0 \frac{U_{2r} - U_r^2}{U_{2r} - 2x^r U_r + x^{2r}}. \tag{24}$$

Доказательство. В неравенстве (22) выберем функцию

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} (y^r - b_x)^2, & \text{если } y^r \geqslant b_x, \\ 0, & \text{если } y^r < b_x, \end{cases}$$

где

$$b_x = \frac{x^r U_r - U_{2r}}{x^r - U_r} > 0 \quad \text{для} \quad x^r > U_{2r}/U_r.$$

Следовательно, для $y^r > b_x$ получим

$$P\{\sup_{k \leqslant n} \zeta_k \geqslant y\} \leqslant \frac{M^+ \varphi_x(\zeta_n)}{\varphi_x(y)}. \tag{25}$$

Поскольку $x^r > b_x$ при $x^r > U_r$, то мы можем положить в (25) $y = x$, при этом правая часть (25) преобразуется в правую часть (24).

Следствием (24) является и следующее неравенство, аналогичное неравенству (4), ($x^r > M|\zeta_n|^{2r}/M|\zeta_n|^r$):

$$P\{\sup_{k \leqslant n} |\zeta_k| \geqslant x\} \leqslant \frac{M|\zeta_n|^{2r} - (M|\zeta_n|^r)^2}{M|\zeta_n|^{2r} - 2x^r M|\zeta_n|^r + x^{2r}}.$$

Теорема 13. *Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют конечные моменты порядка $2s$ (s — целое положительное). Если выполнены условия*

$$M\xi_i^{2k-1} = 0, \quad M\xi_i^{2k} \leqslant \frac{\binom{s}{k}}{\binom{2s}{2k}} (2s-1)^k (M\xi_i^2)^k, \tag{26}$$

для $i=1, 2, \ldots, n$ и $k=1, 2, \ldots, s$, *то для положительных значений* x *имеет место неравенство*

$$P\{\sup \zeta_k \geqslant xB\} \leqslant \left(1+\frac{x^2}{2s-1}\right)^{-s}, \tag{27}$$

где

$$B^2=\sum_{i=1}^{n} M\xi_i^2.$$

Доказательство. Утверждение теоремы будет, очевидно, следствием теоремы 5, если мы сумеем показать, что условие (26) приводит к выполнению следующей системы неравенств ($k=1, 2, \ldots, s$)

$$M\zeta_n^{2k-1}=0, \quad M\zeta_n^{2k} \leqslant \frac{\binom{s}{k}}{\binom{2s}{2k}}(2s-1)^k (M\zeta_n^2)^k.$$

Эту систему достаточно доказать для $n=2$, поскольку случай $n>2$ сводится к нему применением индукции. Имеем:

$$M(\xi_1+\xi_2)^{2k-1}=\sum_{l=0}^{2k-1}\binom{2k-1}{l} M\xi_1^{2k-l-1} M\xi_2^l=0,$$

поскольку в каждом слагаемом присутствует сомножителем момент нечетного порядка или ξ_1, или ξ_2. Далее,

$$M(\xi_1+\xi_2)^{2k}=\sum_{l=0}^{k}\binom{2k}{2l} M\xi_1^{2k-2l} M\xi_2^{2l} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(2s-1)^k (M\xi_1^2)^{k-l}(M\xi_2^2)^l \cdot \frac{\binom{2k}{2l}\binom{s}{k-l}\binom{s}{l}}{\binom{k}{l}\cdot\binom{2s}{2k-2l}\binom{2s}{2l}}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего неравенства

$$\frac{\binom{2k}{2l}\binom{s}{k-l}\binom{s}{l}}{\binom{k}{l}\binom{2s}{2k-2l}\binom{2s}{2l}} \leqslant \frac{\binom{s}{k}}{\binom{2s}{2k}}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant k \leqslant s.$$

Действительно, с помощью формулы Лагранжа для функции Γ последнее неравенство преобразуется к виду

$$\frac{\Gamma\left(s-k+l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s-l+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s-k+\frac{1}{2}\right)} \leqslant 1,$$

а это, в свою очередь, к эквивалентному ему и совершенно очевидному неравенству (в случае $l=0$ произведение следует считать равным 1)

$$\prod_{m=1}^{l}\frac{s-k+l-m+\frac{1}{2}}{s-m+\frac{1}{2}} \leqslant 1, \quad \text{если} \quad k-l \geqslant l$$

и столь же очевидному неравенству

$$\prod_{m=1}^{l}\frac{s-l-m+\frac{1}{2}}{s-m+\frac{1}{2}} \leqslant 1, \quad \text{в случае} \quad k-l<l.$$

Привлекая (26) и только что доказанное неравенство, находим

$$M(\xi_1+\xi_2)^{2k} \leqslant \frac{\binom{s}{k}}{\binom{2s}{2k}} (2s-1)^k (M\xi_1^2+M\xi_2^2)^k.$$

Следующее неравенство представляет собой обобщение известного неравенства Колмогорова и его улучшенного варианта, найденного Гаеком и Реньи.

Теорема 14. *Пусть последовательность случайных величин* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ *образует мартингал и пусть* $\varphi(x)$ *— некоторая функция, определенная на полуоси* $(0, \infty)$ *и обладающая свойствами*

1° φ *— не убывает с ростом* x,

2° φ *— выпуклая,*

3° $\varphi(+0)=0$,

4° $\varphi(x)\varphi(y) \geqslant \varphi(xy)$ *для всех положительных* x, y. *Тогда для любой невозрастающей последовательности неотрицательных чисел* c_k *и любого положительного* v

$$P\{\sup_{m\leqslant k\leqslant n} c_k\zeta_k \geqslant v\} \leqslant$$

$$\leqslant \varphi^{-1}(v)\left\{\varphi(c_n)M^+\varphi(\zeta_n)+\sum_{k=m}^{n-1}[\varphi(c_k)-\varphi(c_{k+1})]M^+\varphi(\zeta_k)\right\}. \tag{28}$$

Доказательство. Обозначим

$$B_\nu=\{c_k\zeta_k<v,\quad k<\nu;\quad c_\nu\zeta_\nu>v\},\quad m\leqslant\nu\leqslant n.$$

Очевидно, что

$$p=P\{\sup_{m\leqslant k\leqslant n} c_k\zeta_k\geqslant v\}=\sum_{k=m}^{n} P\{B_k\}.$$

Введем случайную величину

$$\eta=\sum_{k=m}^{n-1}[\varphi(c_k)-\varphi(c_{k+1})]\varphi^*(\zeta_k)+\varphi(c_n)\varphi^*(\zeta_n),$$

где функция $\varphi^*(x)=\varphi(x)$ для $x>0$ и $\varphi^*(x)=0$ для $x<0$. Имеем $(\nu\leqslant k)$, в силу свойств 1°—3°,

$$M\{\varphi^*(\zeta_k)\mid B_\nu\}=M\{M[\varphi^*(\zeta_k)\mid\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_\nu]\mid B_\nu\}\geqslant$$

$$\geqslant M\{\varphi^*[M(\zeta_k)\mid\zeta_1,\ldots,\zeta_\nu]\mid B_\nu\}\geqslant M\{\varphi^*(\zeta_\nu)\mid B_\nu\}\geqslant\varphi^*\left(\frac{v}{c_\nu}\right)=\varphi\left(\frac{v}{c_\nu}\right).$$

Следовательно,

$$M(\eta\mid B_\nu)\geqslant\sum_{m=\nu}^{n-1}[\varphi(c_m)-\varphi(c_{m+1})]M[\varphi^*(\zeta_m)\mid B_\nu]+$$

$$+\varphi(c_n)M[\varphi^*(\zeta_n)\mid B_\nu]\geqslant\varphi\left(\frac{v}{c_\nu}\right)\varphi(c_\nu)\geqslant\varphi(v)$$

и окончательно:

$$M\eta\geqslant\sum_{k=m}^{n}M(\eta\mid B_k)P(B_k)>\varphi(v)\sum_{k=m}^{n}P(B_k)=\varphi(v)\cdot p.$$

Замечание. В том случае, когда $\varphi(x)$ возрастает не слишком быстро, а c_k убывает не слишком быстро (не быстрее чем степень) сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\varphi(c_k) - \varphi(c_{k+1})]\, M^+ \varphi(\zeta_k) \tag{29}$$

оказывается эквивалентной сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(c_k)}{k} M^+ \varphi(\zeta_k). \tag{30}$$

Как известно, первоначальное неравенство типа (28). использовалось А. Н. Колмогоровым при доказательстве усиленного закона больших чисел. Неравенство (28) позволяет получить односторонний аналог усиленного закона больших чисел. Именно, сходимость ряда (29) для выбранной нами последовательности c_k и функции $\varphi(x)$ влечет

$$P\{\limsup_{n\to\infty} c_n \zeta_n \leqslant 0\} = 1.$$

Приятно выглядит и односторонний вариант теоремы Колмогорова об усиленном законе больших чисел для одинаково распределенных величин.

Теорема 15. *Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены, имеют конечный полумомент $M^+\xi_i$ и неположительный (конечный или бесконечный) момент $M\xi_i$. Тогда*

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) \leqslant 0\right\} = 1.$$

Доказательство. Выберем какое-либо число a и положим

$$\xi_i' = \xi_i - \xi_i'', \qquad \xi_i'' = \begin{cases} \xi_i, & \text{если } \xi_i > -a, \\ 0, & \text{если } \xi_i \leqslant -a. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$P\{\xi_i' \leqslant 0\} = 1. \tag{31}$$

Если число a выбрать таким образом, что $M\xi_i'' = 0$, то последовательность случайных величин ξ_i'' охватывается теоремой Колмогорова и, следовательно,

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\xi_1'' + \ldots + \xi_n'') = 0\right\} = 1.$$

В силу этого обстоятельства и свойства (31) имеем

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) \leqslant 0\right\} \geqslant P\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\xi_1'' + \ldots + \xi_n'') \leqslant 0\right\} = 1,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

4. Обобщение и уточнение неравенства Бернштейна

Теорема 16. *Пусть последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ образует мартингал Леви и пусть $\psi(x)$ функция определенная на всей вещественной оси и обладающая на положительной полуоси следующими свойствами*

1° ψ *— не убывает с ростом* x,

2° ψ *— вогнутая, т. е. выпуклая вниз,*

3° $0 \leqslant \psi(uv) \leqslant \psi(u)\,\psi(v)$.

Обозначим

$$M_{i\sigma}=M\left(|\xi_i|^\sigma\psi(|\xi_i|)\Big|\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{i-1}\right),\qquad \sigma>0,$$

и $M^+{}_{i\sigma}$ *— часть этого математического ожидания, связанную с положительной полуосью (полумомент типа (1)).*

Если найдется такая постоянная H, *что для всех натуральных* m *и всех* $i\leqslant n$ *будут выполнены неравенства*

$$M_i^+{}_{(m+1)}\leqslant m!\,H^m M_{i1},$$

то в интервале $0\leqslant t\leqslant\frac{Bq}{H}$, $q=1-\frac{2}{\psi(4)}$

$$p=P\left\{\sup_{k\leqslant n}\zeta_k\geqslant 2B\psi(B)\psi\left(\frac{t}{B}\right)\right\}\leqslant\exp\left\{-t\psi\left(\frac{t}{B}\right)\psi(B)\right\}$$

и в интервале $t\geqslant\frac{Bq}{H}$

$$p\leqslant\exp\left\{-\frac{qB}{H}\psi(B)\psi\left(\frac{t}{B}\right)\right\},$$

где величина B *определяется равенством*

$$B\psi(B)=\sum_{i=1}^{n}M_{i1}.$$

Доказательство. Образуем последовательность $\eta_k=\exp(\varepsilon\zeta_k)$, где $\varepsilon\leqslant\frac{q}{H}$ — некоторое положительное число. Как известно [5], величины η_k образуют полумартингал и потому к ним применимо неравенство Колмогорова (21) (см. примечание на стр. 16):

$$P\{\sup_{k\leqslant n}\varepsilon\zeta_k\geqslant t\psi(t)+\log I\}=P\{\sup_{k\leqslant n}\eta_k\geqslant I\exp(t\psi)\}\leqslant\frac{Me^{\varepsilon\xi_n}}{Ie^{t\psi(t)}}.$$

Положим $I=M\exp(\varepsilon\zeta_n)$ и оценим сверху эту величину. Обозначим $\chi(x)$ функцию, равную x при $x>0$ и равную нулю для остальных значений x. Поскольку

$$M(\varepsilon\xi_k\,|\,\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{k-1})=0,$$

то

$$I_k=M\left(\frac{\eta_k}{\eta_{k-1}}\Big|\eta_1,\ \ldots,\ \eta_{k-1}\right)=M(e^{\varepsilon\xi_k}\,|\,\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{k-1})=$$
$$=1+M(e^{\varepsilon\xi_k}-1-\varepsilon\xi_k\,|\,\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{k-1}).$$
$$I=\int I_1I_2\ldots I_n\,dF_{\xi_1,\ldots,\xi_n}.$$

На основании леммы (см. дополнение к настоящей работе)

$$|e^z-1-z|\leqslant|z|\min\left(2,\ \frac{|z|}{2}\right)\exp\{\chi(\operatorname{Re}z)\}.$$

Следовательно,

$$I_k\leqslant 1+M\left(|\varepsilon\xi_k|\min\left(2,\ \frac{|\varepsilon\xi_k|}{2}\right)\exp\left(\varepsilon\chi(\xi_k)\right)\Big|\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{k-1}\right)\leqslant$$
$$\leqslant 1+M\left(|\varepsilon\xi_k|\frac{2}{\psi(4)}\psi(|\varepsilon\xi_k|)\exp\left(\varepsilon\chi(\xi_k)\right)\Big|\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{k-1}\right)\leqslant$$
$$\leqslant 1+\frac{2\varepsilon\psi(\varepsilon)}{\psi(4)}M\left(|\xi_k|\psi(|\xi_k|)\exp\left(\varepsilon\chi(\xi_k)\right)\Big|\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{k-1}\right)=$$
$$=1+\frac{2\varepsilon\psi(\varepsilon)}{\psi(4)}\left\{M_{k1}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^m}{m!}M_k^+{}_{(m+1)}\right\}\leqslant 1+\frac{2\varepsilon\psi(\varepsilon)M_{k1}}{\psi(4)(1-\varepsilon H)}.$$

В итоге получаем $\varepsilon \leqslant \frac{q}{H}$

$$I_k \leqslant \exp\left\{\frac{2\varepsilon\psi(\varepsilon) M_{k1}}{\psi(4)(1-\varepsilon H)}\right\} \leqslant \exp\{\varepsilon\psi(\varepsilon) M_{k1}\},$$

$$I \leqslant \exp\{\varepsilon\psi(\varepsilon) B\psi(B)\} = I^*(\varepsilon). \tag{32}$$

Выберем $\varepsilon = \frac{t}{B}$, $t \leqslant \frac{qB}{H}$, тогда

$$t\psi(t) = \frac{t}{B} B\cdot\psi\left(B\cdot\frac{t}{B}\right) \leqslant \frac{t}{B} B\psi\left(\frac{t}{B}\right)\psi(B) = I^*\left(\frac{t}{B}\right).$$

Мы уже видели, что $\log I \leqslant \log I^*\left(\frac{t}{B}\right)$, поэтому

$$P\left\{\sup_{k\leqslant n} \zeta_k \frac{t}{B} \geqslant t\psi(t) + \log I\right\} \geqslant P\left\{\sup \zeta_k \geqslant \frac{2B}{t} \log I^*\left(\frac{t}{B}\right)\right\}.$$

Отсюда следует первая часть утверждения теоремы. Далее, на основании неравенства (21),

$$P\left\{\sup_{k\leqslant n} \zeta_k \geqslant 2B\psi(B)\psi\left(\frac{t}{B}\right)\right\} \leqslant \frac{M\exp(c\zeta_n)}{\exp\left\{2cB\psi(B)\psi\left(\frac{t}{B}\right)\right\}}, \tag{33}$$

где c — произвольное положительное число. Согласно оценке (32), правая часть (33) не превосходит величины

$$\exp\left\{\frac{2c\psi(c)}{\psi(4)(1-cH)} B\psi(B) - 2cB\psi(B)\psi\left(\frac{t}{B}\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-2cB\psi(B)\psi\left(\frac{t}{B}\right)\left[1 - \frac{1}{\psi(4)(1-cH)}\cdot\frac{\psi(c)}{\psi\left(\frac{t}{B}\right)}\right]\right\},$$

если только $c \leqslant \frac{q}{H}$.

Положим $c = \frac{q}{H}$. Для $t \geqslant B\frac{q}{H}$ имеем $\psi(c) \leqslant \psi\left(\frac{t}{B}\right)$, $\psi(4)(1-cH) = 2$. Следовательно, выражение в экспоненте не превосходит величины

$$\frac{q}{H} B\psi(B)\psi\left(\frac{t}{B}\right),$$

а это эквивалентно второй части утверждения теоремы.

Замечание 1. Условие вогнутости функции ψ, как это видно из доказательства теоремы, можно заменить более слабым требованием

$$\min\left(2, \frac{x}{2}\right) \leqslant 2\frac{\psi(x)}{\psi(4)}.$$

Замечание 2. Односторонний вариант собственно неравенства Бернштейна получается, если выбрать $\psi(t) = t$. Интересен также случай степенных функций $\psi(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Мы закончим параграф одним замечанием о неравенстве Бернштейна, уже упоминавшимся в связи с теоремой 5. Мы видели, что неравенство (27) при $s=1$ приводило к несколько уточненной форме классического неравенства Колмогорова. Подобно тому, как (6) было получено в качестве следствия неравенства (5) при $s\to\infty$, неравенство Бернштейна в его первоначальной форме может быть получено предельным переходом при $s\to\infty$ в (27). Именно,

$$P\{\sup \zeta_k \geqslant x\} \leqslant \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

если при всех натуральных значениях i, k выполняются условия

$$M\xi_i^{2k-1}=0, \quad M\xi_i^{2k}\leqslant\frac{(2k)!}{2^k k!}, \qquad (\xi_i \text{ — независимы}).$$

Мы видим, что неравенства Колмогорова и Бернштейна представляют собой два крайних случая ($s=1$ и $s=\infty$) неравенства промежуточного характера (27).

5. Дополнение. Одна лемма математического анализа

Лемма. *Обозначим* $E_n(z)=e^z-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$, $\Theta_n(x)=A_n\min(B_n, x)$ *и* $\chi(x)=x$, *если* $x>0$, *и* $\chi(x)=0$, *если* $x\leqslant 0$. *Пусть последовательности чисел* $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ *обладают свойствами*

1^0 $A_nB_n\geqslant A_{n-1}B_{n-1}\geqslant 2$,

2^0 $(n+1)A_n\geqslant nA_{n-1}\geqslant 1$.

Тогда для произвольного комплексного z *можно утверждать, что*

$$|E_n(z)|\leqslant\frac{|z|^n}{n!}\Theta_n(|z|)\exp\{\chi(\operatorname{Re}z)\}.$$

Доказательство. Поскольку

$$|E_n(z)|=\left|z\int\limits_0^1 E_{n-1}(zy)\,dy\right|\leqslant\int\limits_0^1\Theta_{n-1}(|z|\,y)\,dy^n\cdot\frac{|z|^n}{n!}\exp\{\chi(\operatorname{Re}z)\},$$

то нам, очевидно, достаточно показать, что для всех $n=1,\ 2,\ \ldots$

$$I_n(|z|)=\int\limits_0^1\Theta_{n-1}(|z|\,y)\,dy^n\leqslant\Theta_n(|z|).$$

Элементарный подсчет показывает, что

$$I_n(|z|)=A_{n-1}B_{n-1}\left\{1-D_{n-1}^n\left[1-\frac{n}{n+1}\,\frac{|z|}{B_{n-1}}\,D_{n-1}\right]\right\},$$

где

$$D_{n-1}=\min\left(1,\ \frac{B_{n-1}}{|z|}\right).$$

а) Случай $B_n\geqslant B_{n-1}$. Рассмотрим интервал $|z|\leqslant B_{n-1}$. Используя свойство 2^0, находим

$$I_n(|z|)=A_{n-1}\frac{n}{n+1}|z|\leqslant A_n|z|=\Theta_n(|z|).$$

Если $B_{n-1}\leqslant|z|\leqslant B_n$, то в этом интервале

$$I_n(|z|)=A_{n-1}B_{n-1}\left\{1-\left(\frac{B_{n-1}}{|z|}\right)^n\frac{1}{n+1}\right\} \quad\text{и}\quad \Theta_n(|z|)=A_n|z|.$$

Обозначим $V=\frac{|z|}{B_{n-1}}$. Для рассматриваемого интервала $V\geqslant 1$. Функция $P(V)=A_nV^{n+1}-A_{n-1}\left(V^n-\frac{1}{n+1}\right)$ имеет минимум производной, равный положительной величине $A_n-\frac{n}{n+1}A_{n-1}$ (свойство 2^0). Поэтому разность $P\cdot V^{-n}=I_n(|z|)-\Theta_n(|z|)$ — неотрицательна. В интервале $|z|>B_n$, благодаря свойству 1^0, имеем

$$I_n(|z|)=A_{n-1}B_{n-1}\left\{1-\left(\frac{B_{n-1}}{|z|}\right)^n\frac{1}{n+1}\right\}\leqslant A_nB_n=\Theta_n(|z|).$$

б) Случай $B_n < B_{n-1}$. В интервалах $|z| < B_n$ и $|z| > B_{n-1}$ нужное нам неравенство доказывается точно так же как и в случае а). Пусть теперь $B_n \leqslant |z| < B_{n-1}$. В силу свойства 1^0 получаем

$$I_n(|z|) = A_{n-1} \frac{n}{n+1} |z| \leqslant A_{n-1} B_{n-1} \frac{n}{n+1} < A_n B_n = \Theta_n(|z|).$$

Замечание. Более точные оценки функции $E_n(z)$ того же типа можно указать, если вместо $\frac{|z|^n}{n!}\Theta_n(|z|)$ рассматривать функцию $\Theta_n^*(|z|) = \min(P_n, Q_n)$, где P_n, Q_n – полиномы степени не выше $n+1$. Например, в качестве Θ_1^*, Θ_2^* можно брать следующие функции:

$$\Theta_1^*(|z|) = \min\left(\frac{|z|^2}{2}, \ 2|z| - 2\right), \quad \Theta_2^*(|z|) = \min\left(\frac{|z|^3}{6}, \ |z|^2 - 2|z| + \frac{4}{3}\right).$$

Поступило в редакцию
10.XI.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Золотарев. Об одной новой точке зрения на предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, 1960, 43–49.
2. А. Я. Хинчин. Две теоремы о стохастических процессах с однотипными приращениями, Матем. сборник, 3 (45), 3, 574–584.
3. В. М. Золотарев. Обобщение неравенства Колмогорова, Труды Московского Физико-Технического Института, 7, 1961, 162–164.
4. В. М. Золотарев. Преобразования Меллина-Стильтьеса в теории вероятностей, Теор. вер. и ее прим., 2, вып. 4, 1957, 444–469.
5. Дж. Л. Дуб. Вероятностные процессы, ИИЛ, М., 1956.
6. А. В. Скороход. Асимптотические формулы для устойчивых законов распределения, ДАН СССР, 98, № 5, 1954, 731–734.
7. Б. В. Гнеденко. О росте однородных случайных процессов с независимымы однотипными приращениями, ДАН СССР, 40, № 3, 103–107.

KAI KURIŲ ČEBYŠEVO TIPO NELYGYBIŲ VIENPUSIS TRAKTAVIMAS BEI PATIKSLINIMAI

V. ZOLOTARIOVAS

(Reziumė)

Straipsnyje pateikiami Čebyševo [(1)–(9)], Kolmogorovo [(22), (24), (26), (28)] bei Bernšteino (teorema 16) nelygybių patikslinimai, panaudojant „pusinius" momentus

$$\int_0^\infty f(x)\, dF_\xi(x).$$

ON SOME CHEBYSCHEV TYPE INEQUALITIES IN ONE-SIDED SENSE

V. ZOLOTAREV

(Summary)

Some one-sided Chebyshev [(1)–(9)], Kolmogorov [(22), (24), (26), (28)] and Bernstein (theorem 16) type inequalities with the aid of „half-moments"

$$\int_0^\infty f(x)\, dF_\xi(x)$$

are presented.