1966

О ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ РЯДА ДИРИХЛЕ

А. МИШКЕЛЯВИЧУС

В настоящей статье продолжаем изучать ряды Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty \tag{2}$$

с комплексными показателями λ_n. При этом предполагаем, что точки последовательности $\{\lambda_{n+1}-\lambda_n\}$ лежат (за исключением, возможно, конечного их числа) в некотором угле с раствором, меньшим π. Без ограничения общности можем считать, что

$$|\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)| \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}; \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{3}$$

В заметке [2] мы показали, что область сходимости ряда Дирихле является при указанном условии выпуклой. При этом, если ряд (1) сходится (расходится) в точке z_0, то он сходится (расходится) и на полупрямой $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0$, $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ $(\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_0)$ (см. [1]). Следовательно, граница этой области является выпуклой и непрерывной кривой, выражаемой уравнением вида $x = c(y)$. Точно также можно получить, что и область абсолютной сходимости ряда (1) ограничена выпуклой и непрерывной кривой выражаемой уравнением вида $x = a(y)$.

В этой заметке найдем выражения функций $c(y)$ и $a(y)$ через коэффициенты и показатели ряда (1). Эти выражения являются обобщением известных формул для абсцисс сходимости и абсолютной сходимости ряда Дирихле (1) в случае, когда показатели λ_n действительны и $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \to \infty$.

Заметим, что ряды Дирихле (1) изучались в работах Г. Л. Лунца (см., например, [3] и [4]).

1. Если $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots$ и $\mu_n \to \infty$, то абсцисса абсолютной сходимости a ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\mu_n z} \tag{4}$$

выражается формулой

$$a = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \sum_{k=1}^{n} |a_k|}{\mu_n} \tag{5}$$

в случае, когда $a \geqslant 0$, и

$$a = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|}{\mu_n} \tag{6}$$

в случае, когда $a < 0$ [5].

Воспользуемся этим результатом для определения границы области абсолютной сходимости ряда (1). Обозначим

$$\lambda_n = \mu_n + i\nu_n, \tag{7}$$

где μ_n и ν_n — действительные числа, и рассмотрим значение $z = x + iy_0$, где $y_0 = \operatorname{Im} z$ — произвольно фиксированное действительное число.

Ряд (1) перепишем, пользуясь (7), в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-i(\mu_n y_0 + \nu_n x)} e^{\nu_n y_0} e^{-\mu_n x}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{-\lambda_n z}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\nu_n y_0} e^{-\mu_n x}.$$

Показатели μ_n последнего ряда действительны и $\mu_1 < \mu_2 < \ldots \to \infty$. Его абсцисса абсолютной сходимости равна поэтому

$$a(y_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \sum_{k=1}^{n} |a_k| e^{\nu_k y_0}}{\mu_n}$$

в случае, когда $a(y_0) \geqslant 0$, и

$$a(y_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| e^{\nu_k y_0}}{\mu_n}$$

в случае, когда $a(y_0) < 0$.

Заметим, что для справедливости указанного результата достаточно, чтобы последовательность $\{\mu_n = \operatorname{Re} \lambda_n\}$, монотонно возрастая, стремилась в бесконечность.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{\mu_n = \operatorname{Re} \lambda_n\}$ *стремится, монотонно возрастая с некоторого места, в бесконечность. Тогда границей области абсолютной сходимости ряда* (1) *будет кривая* $x = a(y)$, *где*

$$a(y) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \sum_{k=1}^{n} |a_k| e^{\nu_k y}}{\mu_n} \tag{8}$$

в случае, когда $a(y) \geqslant 0$, *и*

$$a(y) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| e^{\nu_k y}}{\mu_n} \tag{9}$$

в случае, когда $a(y) < 0$.

Замечание. Формулы (5) и (6), выражающие абсциссу абсолютной сходимости ряда (4) с действительными показателями μ_n, получаются из формул (8) и (9), если в последних положить $\nu_n=0$, $n=1, 2, \ldots$

2. При изучении области (условной) сходимости ряда (1) нам будет полезна следующая

Лемма. *Пусть* $\{\mu_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\infty$ — *монотонно возрастающая последовательность и* $\{a_n\}$ — *произвольная последовательность комплексных чисел. Если функция действительного переменного* y, $-\infty<y<\infty$

$$c_1(y)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k e^{-i\mu_k y}\right|}{\mu_n} \tag{10}$$

принимает положительное значение при некотором $y=y_0$, *то эта функция равна тождественно постоянной:* $c_1(y)\equiv c_1$, *при* $-\infty<y<\infty$; *также, если функция*

$$c_2(y)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left|\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k e^{-i\mu_k y}\right|}{\mu_n} \tag{11}$$

определена и отрицательна хотя бы для одного действительного значения $y=y_0$, *то она равна тождественно постоянной:* $c_2(y)\equiv c_2$, *при* $-\infty<y<\infty$.

Доказательство. Рассмотрим ряд Дирихле (4). Пусть его абсцисса сходимости равна c и y — произвольно фиксированное действительное число. Число c будет абсциссой сходимости и ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a'_n e^{-\mu_n\zeta},\quad a'_n=a_n e^{-i\mu_n y}, \tag{12}$$

полученного из ряда (4) заменой $z=\zeta+iy$, где y — произвольное действительное число. Но абсцисса сходимости c последнего ряда равна $c_1(y)$, если $c>0$, и $c_2(y)$, если $c<0$, где $c_1(y)$ и $c_2(y)$ — определенные в лемме функции. Лемма доказана.

3. **Теорема 2.** *Если ряд* (1) *удовлетворяет условиям* (2) *и* (3) *и* $\lambda_n=\mu_n+i\nu_n$, *то граничная кривая* $x=c(y)$ *области сходимости этого ряда вычисляется по формулам*

$$c(y)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k e^{-i\lambda_k y}\right|}{\mu_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k e^{\nu_k y}\right|}{\mu_n}, \tag{13}$$

если $c(y)\geqslant 0$, *и*

$$c(y)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left|\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k e^{-i\lambda_k y}\right|}{\mu_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left|\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k e^{\nu_k y}\right|}{\mu_n}, \tag{14}$$

если $c(y)<0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала действительные значения z и ограничимся случаем, когда $c_0=c(0)\geqslant 0$. Нам нужно установить, что $c_0=d$, где

$$d=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|}{\mu_n}. \tag{15}$$

Предположим, что $z=x_0>d$ и докажем, что ряд (1) сходится в точке $z=x_0$. Для этого введем обозначения

$$A_s=\sum_{k=1}^{s}a_k,\quad B_s=e^{-\lambda_s x_0} \tag{16}$$

и применим преобразование Абеля к сумме

$$S_{n,m}(x_0)=\sum_{k=n+1}^{m}a_k e^{-\lambda_k x_0}. \tag{17}$$

Мы получим

$$S_{n,m}(x_0)=\sum_{k=n+1}^{m}(A_k-A_{k-1})B_k=A_mB_m-A_nB_{n+1}-\sum_{k=n+1}^{m-1}A_k(B_{k+1}-B_k).$$

Следовательно,

$$|S_{n,m}(x_0)|\leqslant|A_nB_{n+1}|+|A_mB_m|+\sum_{k=n+1}^{m-1}|A_k||B_{k+1}-B_k|. \tag{18}$$

Из определения числа d (см. (15)) следует, что для произвольного $\varepsilon>0$

$$|A_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|<e^{(d+\varepsilon)\mu_n}, \tag{19}$$

начиная с некоторого $n>N$, $N=N(\varepsilon)$. Число $|B_{k+1}-B_k|$, $k>N$, представим в виде

$$|B_{k+1}-B_k|=x_0\left|\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}e^{-ux_0}du\right|=x_0\left|\int_{l_k}e^{-ux_0}du\right|, \tag{20}$$

где путь интегрирования l_k — отрезок

$$l_k: u=\lambda_k+se^{i\varphi_k},\quad \varphi_k=\arg(\lambda_{k+1}-\lambda_k),\quad 0\leqslant s\leqslant|\lambda_{k+1}-\lambda_k|. \tag{21}$$

Из (3) следует, что $\operatorname{Re}u$ возрастает, когда точка пробегает отрезок l_k в направлении от λ_k до λ_{k+1}. Поэтому $\mu_k\leqslant\operatorname{Re}u$, $u\in l_k$. В соединении с (19) и (20) это неравенство дает

$$|A_k||B_{k+1}-B_k|<e^{(d+\varepsilon)\mu_k}x_0\int_{l_k}|e^{-ux_0}|ds\leqslant x_0\int_{l_k}|e^{-u(x_0-d-\varepsilon)}|ds$$

при $k>N$, $0<\varepsilon<x_0-d$.

Пользуясь (21), легко вычисляем последний интеграл

$$x_0\int_{l_k}|e^{-u(x_0-d-\varepsilon)}|ds=\frac{x_0}{(x_0-d-\varepsilon)\cos\varphi_k}\left(e^{-(x_0-d-\varepsilon)\mu_k}-e^{-(x_0-d-\varepsilon)\mu_{k+1}}\right).$$

Напомним еще, что $|\varphi_k| \leqslant \alpha$ $\Big($см. (3)$\Big)$. Следовательно,

$$|A_k|\,|B_{k+1}-B_k| < \frac{x_0}{(x_0-d-\varepsilon)\cos\alpha}\left(e^{-(x_0-d-\varepsilon)\mu_k}-e^{-(x_0-d-\varepsilon)\mu_{k+1}}\right). \tag{22}$$

Заметим, что из (16) и (19) получаем

$$|A_n B_{n+1}| < e^{(d+\varepsilon)\mu_n}e^{-x_0\mu_{n+1}} < e^{-(x_0-d-\varepsilon)\mu_{n+1}}, \tag{23}$$

$$|A_m B_m| < e^{(d+\varepsilon)\mu_m}e^{-x_0\mu_m} = e^{-(x_0-d-\varepsilon)\mu_m}. \tag{24}$$

Из последних трех неравенств легко получаем $\Big($см. (18)$\Big)$

$$|S_{n,m}(x_0)| \leqslant |A_n B_{n+1}| + |A_m B_m| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |A_k|\,|B_{k+1}-B_k| <$$

$$< \frac{2x_0}{(x_0-d-\varepsilon)\cos\alpha}\, e^{-(x_0-d-\varepsilon)\mu_{n+1}}.$$

Так как $\mu_n \to \infty$, то

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} S_{n,m}(x_0) = 0,$$

и ряд (1) сходится в точке x_0.

Таким образом, мы показали, что $c(0) \leqslant d$. Покажем, что имеет место и обратное неравенство $c(0) \geqslant d$. Для этого допустим, что ряд (1) сходится в точке $z = x_0 > 0$.

По сделанному допущению частичные суммы

$$S_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_k x_0} \tag{25}$$

ряда (1) ограничены в точке x_0:

$$|S_n(x_0)| \leqslant K. \tag{26}$$

Рассмотрим опять число A_n $\Big($см. (16)$\Big)$ и воспользуемся преобразованием Абеля; мы получим

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_k x_0} e^{\lambda_k x_0} = \sum_{k=1}^{n} [S_k(x_0) - S_{k-1}(x_0)]\, C_k,$$

где

$$C_k = e^{\lambda_k x_0}.$$

Следовательно $\Big($ср. с неравенством (18)$\Big)$,

$$|A_n| \leqslant |C_n S_n(x_0)| + \sum_{k=1}^{n-1} |S_k(x_0)|\,|C_{k+1}-C_k|. \tag{27}$$

Величину $|C_{k+1}-C_k|$ можно оценить сверху таким же способом, как и величину $|A_k|\,|B_{k+1}-B_k|$ $\Big($см. (22)$\Big)$.

Мы получим

$$|C_{k+1}-C_k| < \frac{e^{x_0\mu_{k+1}}-e^{x_0\mu_k}}{\cos\alpha}. \tag{28}$$

Отсюда из (26), (27) и (28) следует

$$|A_n| < \frac{2K}{\cos\alpha}\, e^{x_0\mu_n}.$$

Значит,

$$x_0 \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|A_n|}{\mu_n} = d$$

и $c(0) \geqslant d$.

Таким образом, мы доказали, что $c(0) = d$, если $c(0) \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь точки $z = x + iy$, где $y = \operatorname{Im} z$ — произвольно фиксированное действительное число, и предположим, что $c(y) \geqslant 0$.

Ряд (1) представим в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n e^{-\lambda_n x}, \quad a'_n = a_n e^{-i\lambda_n y} = a_n e^{\nu_n y} e^{-i\mu_n y}.$$

По доказанному выше

$$c(y) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum_{k=1}^{n} a'_k\right|}{\mu_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum_{k=1}^{n} a_k e^{\nu_k y} e^{-i\mu_k y}\right|}{\mu_n}.$$

Пользуясь леммой, получаем

$$c(y) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum_{k=1}^{n} a_k e^{\nu_k y}\right|}{\mu_n}. \tag{13}$$

Такими же выкладками доказываем и формулу (14) в случае $c(y) < 0$.

Замечание 1. Если в (13) и (14) положить $\nu_n = 0$, то функция $c(y)$ становится постоянной c, равной абсциссе сходимости ряда (4) с действительными показателями (см. [5]).

Замечание 2. В случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\mu_n} = 0 \tag{29}$$

выражения для функций $a(y)$ и $c(y)$ могут быть упрощены. А именно, в этом случае

$$c(y) = a(y) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(|a_n| e^{\nu_n y})}{\mu_n}.$$

Это следует из того, что при условии (29) для любой последовательности комплексных чисел $\{a_n\}$ величина

$$d = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\mu_n}$$

равна величине

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|}{\mu_n},$$

если $d > 0$, и равна величине

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right|}{\mu_n},$$

если $d < 0$ (см. [5]).

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
5.VII.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Мишкелявичус, О сходимости рядов Дирихле, Лит. мат. сб., **III**, № 2 (1963), 105–113.
2. А. Мишкелявичус, Об области сходимости ряда Дирихле, Лит. мат. сб., **V**, № 1 (1965), 117–126.
3. Г. Л. Лунц, О некоторых обобщениях рядов Дирихле, Мат. сб., **10** (**52**), № 1–2 (1942), 33–49.
4. Г. Л. Лунц, Об одном классе обобщенных рядов Дирихле, УМН, **12**, вып. 3(75) (1957), 173–179.
5. V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.

DIRICHLE EILUTĖS KONVERGENCIJOS SRITIES PASIENIS

A. MIŠKELEVIČIUS

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje surandamos Dirichle (1) eilutės konvergencijos ir absoliučios konvergencijos sritys.

SUR LA FRONTIÈRE DE DOMAINE DE CONVERGENCE DE SÉRIE DE DIRICHLET

A. MICHKELEVITCHUS

(*Résumé*)

On trouve dans cet article le domaine de convergence et le domaine de convergence absolue de série de Dirichlet (1).