О СХОДИМОСТИ СУММ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ К ПРОЦЕССУ ПУАССОНА

И. САПАГОВАС

Пусть $\{I_n, n \geqslant 0\}$ – цепь Маркова с конечным или счетным множеством состояний E, задаваемая начальным распределением $a_i = \mathbf{P}\{I_0 = i\}$, $i \in E$, и матрицей переходных вероятностей $\|p_{ij}\|$, $i, j \in E$. Процесс $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ называем марковским процессом восстановления, если

$$N(t) = \max\left\{n : \sum_{k=0}^{n} X_k < t\right\},$$

где $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – неотрицательные случайные величины, удовлетворяющие условиям:

$$\mathbf{P}\{X_0 = 0\} = 1,$$

$$\mathbf{P}\{I_1 = k, X_1 < t / I_0\} = p_{I_0 k} \hat{F}_{I_0 k}(t), \tag{1}$$

$$\mathbf{P}\{I_{n+1} = k, X_{n+1} < t \mid (I_0, X_0), (I_1, X_1), \ldots (I_n, X_n)\} = p_{I_n k} F_{I_n k} \quad n \geqslant 1) \tag{2}$$

для всех $t \in [0, \infty)$ и $k \in E$. $\hat{F}_{ik}(t)$ и $F_{ik}(t)$ – заданные функции распределения.

Одна из возможных физических интерпретаций такого процесса следующая. Пусть имеется множество E групп, состоящих из различных, например, по качеству элементов. С момента $t = 0$ мы наблюдаем за работой одного такого элемента, который в случайный момент времени выходит из строя, после чего немедленно заменяется новым. Предполагается, что вероятность того, что наблюдаемый элемент принадлежит группе с номером j, равна a_j, т. е. $\mathbf{P}\{I_0 = j\} = a_j$, а вероятность, что этот элемент в течение времени, меньшего t, будет заменен элементом из группы k, равна $p_{jk} \hat{F}_{jk}(t)$ $(j, k \in E)$. Вероятности всех дальнейших восстановлений, производимых в течение времени, меньшего t, из групп с номерами k, при условии, что заменяемый элемент принадлежал группе j, равны $p_{jk} F_{jk}(t)$. Если обозначить через X_1 длительность исправной работы начального элемента, а через $X_n (n \geqslant 2)$ – длительности исправной работы последующих новых элементов, то процесс $N(t)$ будет обозначать общее число восстановлений наблюдаемого элемента до момента t. То обстоятельство, что распределения (1) и (2) не предполагаются одинаковыми, можно интерпретировать как предположение о том, что начальный элемент мог работать до момента $t = 0$.

Ясно, что в случае $E = \{1\}$, марковский процесс восстановления просто совпадает с процессом восстановления (см. [6]).

Мы будем рассматривать последовательность процессов

$$N_n(t)=\sum_{r=1}^{n} N_{nr}(t),$$

где $N_{nr}(t)$ – взаимно независимые при каждом n марковские процессы восстановления, определенные следующими параметрами: E_{nr}, $a_i^{(n,r)}$, $p_{ij}^{(n,r)}$, $\hat{F}_{ij}^{(n,r)}(t)$, $F_{ij}^{(n,r)}(t)$. По нашей интерпретации, процесс $N_n(t)$ будет обозначать общее число восстановлений или отказов до момента t в системе, состоящей из n таких элементов, длительности исправной работы которых не влияют друг на друга.

В данной работе будут исследованы условия сходимости процесса $N_n(t$ к процессу Пуассона, а также условия сходимости средних $N_n(t)$ к средним предельного процесса. Сходимость процессов понимается в смысле слабой сходимости любых конечномерных распределений к предельным. Метод доказательства в основном аналогичен методу, применяемому в работах [3], [4], [5], для процессов восстановления. Мы также будем пользоваться некоторыми свойствами марковских процессов восстановления, изложенными в работах Р. Пайка [7], [8], [9]. Всюду в дальнейшем суммирование, если это конкретно не указано, производится по множеству E или, соответственно, по $E_{nr}(i,\ j,\ k\in E$ или $E_{nr})$.

Далее, для сокращения записей введем обозначения:

$$\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=p_{ij}^{(n,r)}\,\hat{F}_{ij}^{(n,r)}(t),$$
$$Q_{ij}^{(n,r)}(t)=p_{ij}^{(n,r)}\,F_{ij}^{(n,r)}(t).$$

Говорим, что процессы $N_{nr}(t)$ $(r=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ бесконечно малы, если при каждом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq r\leq n}\sum_{i,j} a_i^{(n,r)}\,\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=0. \tag{3}$$

Это условие равносильно требованию, чтобы каждый отдельно взятый элемент за любое фиксированное время t выходил из строя с сколь угодно малой вероятностью, когда n достаточно велико.

Теорема 1. *Для сходимости при $n\to\infty$ сумм независимых бесконечно малых марковских процессов восстановления*

$$N_n(t)=\sum_{r=1}^{n} N_{nr}(t)$$

к процессу Пуассона с ведущей функций $\Lambda(t)$, необходимо и достаточно, чтобы при любых фиксированных t выполнялись следующие условия:

1) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i,j} a_i^{(n,r)}\,\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=\Lambda(t), \tag{4}$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{i,j,k} a_i^{(n,r)}\,\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)*Q_{jk}^{(n,r)}(t)\right\}=0, \tag{5}$$

где символ $*$ означает свертку.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, приведем одну лемму о произвольном марковском процессе восстановления $N(t)$. Пусть

$$p(k,\ t)=\mathbf{P}\{N(t)=k\}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Лемма 1. *Имеют место соотношения:*

$$p(0,\ t)=1-\sum_{i,\ j} a_i\hat{Q}_{ij}(t), \tag{6}$$

$$p(k,\ t)=\sum_{i} a_i\left\{\sum_{S_{k,\ i}}\hat{Q}_{i\alpha_1}(t)*\prod_{j=1}^{k-1}Q_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(t)-\right.$$

$$\left.-\sum_{S_{k+1,\ i}}\hat{Q}_{i\alpha_1}(t)*\prod_{j=1}^{k}Q_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(t)\right\}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{7}$$

где $S_{k,\ i}=\{(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k):\alpha_0=i,\ \alpha_j\in E,\ 1\leqslant j\leqslant k\}$ *— множество всех возможных комбинаций* $(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k)$, *а символ* Π *означает свертку указанных функций:*

$$\prod_{j=1}^{0}Q_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

Доказательство. Имеем

$$p(0,\ t)=\mathbf{P}\{N(t)=0\}=1-\mathbf{P}\{X_1<t\}=$$

$$=1-\sum_{i} a_i\mathbf{P}\{X_1<t\mid \boldsymbol{I}_0=i\}=1-\sum_{i,\ j} a_i\hat{Q}_{ij}(t).$$

$$p(k,\ t)=\mathbf{P}\{N(t)=k\}=\sum_{i} a_i\mathbf{P}\{N(t)=k/I_0=i\}=$$

$$=\sum_{i} a_i\left[\mathbf{P}\left\{\sum_{s=1}^{k}X_s<t/I_0=i\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{s=1}^{k+1}X_s<t/I_0=i\right\}\right]=$$

$$=\sum_{i} a_i\left\{\sum_{S_{k,\ i}}\hat{Q}_{i\alpha_1}(t)*\prod_{j=1}^{k-1}Q_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(t)-\sum_{S_{k+1,\ i}}\hat{Q}_{i\alpha_1}(t)*\prod_{j=1}^{k}Q_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(t)\right\}.$$

Лемма 1 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1. Обозначим

$$\Lambda_n(t)=\sum_{r=1}^{n}p_{nr}(1,\ t),$$

$$\Phi_n(t)=\sum_{r=1}^{n}\Big(1-p_{nr}(0,\ t)-p_{nr}(1,\ t)\Big),$$

где

$$p_{nr}(k,\ t)=\mathbf{P}\{N_{nr}(t)=k\}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Необходимость. Так как по лемме 1

$$\Lambda_n(t)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{i,\ j}a_i^{(n,\ r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,\ r)}(t)-\sum_{r=1}^{n}\sum_{i,\ j,\ k}a_i^{(n,\ r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,\ r)}(t)*Q_{jk}^{(n,\ r)}(t)$$

и

$$\Phi_n(t)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{i,\ j,\ k}a_i^{(n,\ r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,\ r)}(t)*Q_{jk}^{(n,\ r)}(t),$$

то отсюда и из теоремы Б. Григелиониса о сходимости последовательности сумм бесконечно малых независимых ступенчатых процессов к процессу Пуассона с ведущей функцией $\Lambda(t)$ (см. [1]) следует необходимость условий (4) и (5) теоремы 1.

Достаточность. Поскольку ввиду (4) и (5)

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{i,j,k}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)*Q_{jk}^{(n,r)}(t)\right\}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda_n(t)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{r=1}^{n}\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)-\sum_{r=1}^{n}\sum_{i,j,k}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)*Q_{jk}^{(n,r)}(t)\right\}=\Lambda(t),$$

то остается применить упомянутую теорему [1]. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Для сходимости сумм независимых бесконечно малых процессов восстановления к процессу Пуассона с ведущей функцией* $\Lambda(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\hat{F}_{nr}(t)=\Lambda(t)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\hat{F}_{nr}(t)*F_{nr}(t)=0. \qquad (8)$$

Доказательсво. В случае процесса восстановления, т. е. когда $E_{nr}=\{1\}$, можем считать,что

$$a_1^{(n,r)}=1,\ p_{11}^{(n,r)}=1,\ \hat{F}_{11}^{(n,r)}(t)=\hat{F}_{nr}(t),\ F_{11}^{(n,r)}(t)=F_{nr}(t).$$

Тогда соотношения (8) немедленно следуют из (4) и (5). Условия (8) совпадают с условиями, приведенными в [1].

Предположим, далее, что при каждом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant n}\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\ j\in E_{rn}}}\sum_{k}Q_{jk}^{(n,r)}(t)=0. \qquad (9)$$

Это в некотором смысле условие равномерной малости слагаемых $N_{nr}(t)$.

Следствие 2. *При условии* (9) *для сходимости* $N_n(t)$ *к процессу Пуассона с ведущей функцией* $\Lambda(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=\Lambda(t). \qquad (4)$$

Доказательство. Действительно, так как

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{i,j,k}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)*Q_{jk}^{(n,r)}(t)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\ j\in E_{rn}}}\sum_{k}Q_{jk}^{(n,r)}(t)\sum_{r=1}^{n}\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=0,$$

то отсюда следует условие (5), а вместе с тем из теоремы 1 вытекает и утверждение следствия 2.

Иногда важно знать, когда из сходимости процессов $N_n(t)$ к предельному следует сходимость средних $\mathbf{M}N_n(t)$ к средним предельного процесса. Сначала исследуем условия, когда средние $\mathbf{M}N(t)$ любого марковского процесса восстановления $N(t)$ конечны при всех t.

Лемма 2. *Если*

$$\max_i \sum_j Q_{ij}(+0) = \delta < 1,$$

то $\mathbf{M}N(t) < \infty$.

Доказательство. По лемме 1 имеем

$$\mathbf{M}N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{ N(t) \geqslant n \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{ \sum_{s=1}^{n} X_s < t \right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i a_i \sum_{S_{n,i}} \hat{Q}_{i\alpha_1}(t) * \prod_{j=1}^{n-1} Q_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(t) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sup_i \sum_{S_{n,i}} \prod_{j=1}^{n-1} Q_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(t) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sup_i \sum_j Q_{ij}(t) \right]^{*(n-1)},$$

поскольку, как легко убедиться по индукции,

$$\max_i \sum_{S_{n,i}} \prod_{j=1}^{n-1} Q_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(t) \leqslant \left[\max_i \sum_j Q_{ij}(t) \right]^{*(n-1)}.$$

Символ $*(n)$ означает n-кратную свертку. Отсюда, так же как и для процессов восстановления ($E = \{1\}$) при выполненном требуемом леммой условии следует сходимость рассматриваемого ряда, а вместе с тем и утверждение леммы 2.

Замечание. Так как

$$\mathbf{P}\{N(t) = n\} \leqslant \mathbf{P}\{N(t) \geqslant n\} \leqslant \left[\sup_i \sum_j Q_{ij}(t) \right]^{*(n-1)},$$

то при условии леммы отсюда следует, что и моменты любого порядка процесса $N(t)$ так же конечны, т. е. $\mathbf{M}N^k(t) < \infty$ при каждом t.

Обозначим $\Lambda_{ij}(t) = \mathbf{M}\left(N_j(t)/I_0 = i\right)$, где $N_j(t)$ – число восстановлений в состоянии j за отрезок времени $(0, t)$. Эти функции удовлетворяют следующей системе уравнений, являющейся обобщением известного уравнения восстановления.

Лемма 3.

$$\Lambda_{ij}(t) = \hat{Q}_{ij}(t) + \sum_k \int_0^t \Lambda_{ik}(t-u)\, dQ_{kj}(u). \tag{10}$$

Доказательство. Аналогично результатам работы [8], получаем

$$\Lambda_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{S_{k,i,j}} \hat{Q}_{i\alpha_1}(t) * \prod_{s=1}^{k-1} Q_{\alpha_s \alpha_{s+1}}(t), \tag{11}$$

где множество $S_{k,i,j}$ совпадает с $S_{k,i}$ при условии, что $\alpha_k=j$. Отсюда, воспользовавшись (11), находим, что

$$\sum_k \int_0^t \Lambda_{ik}(t-u)\,dQ_{kj}(u)=\sum_k \Lambda_{ik}(t) * Q_{kj}(t)=$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{S_{l+1,i,j}} \hat{Q}_{i\alpha_1}(t) * \prod_{s=1}^{l} Q_{\alpha_s \alpha_{s+1}}(t)=$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{S_{l,i,j}} \hat{Q}_{i\alpha_1}(t) * \prod_{s=1}^{l-1} Q_{\alpha_s \alpha_{s+1}}(t)-\hat{Q}_{ij}(t)=\Lambda_{ij}(t)-\hat{Q}_{ij}(t),$$

откуда и следует лемма 3.

Так как

$$\Lambda(t)=\mathbf{M}N(t)=\sum_{i,j} a_i \Lambda_{ij}(t),$$

то из (10) получаем:

$$\Lambda(t)=\sum_{i,j} a_i \hat{Q}_{ij}(t)+\sum_{i,j,k} a_i \int_0^t \Lambda_{ik}(t-u)\,dQ_{kj}(u). \tag{12}$$

В случае $\hat{Q}_{ij}(t)=\hat{Q}_j(t)$ и $Q_{ij}(t)=Q_j(t)$, уравнение восстановления (12) принимает вид

$$\Lambda(t)=\sum_j \hat{Q}_j(t)+\sum_j \int_0^t \Lambda(t-u)\,dQ_j(u).$$

Теорема 2. *При условии (9) из сходимости процессов $N_n(t)$ к предельному следует сходимость средних $\mathbf{M}N_n(t)$ к средним предельного процесса.*

Доказательство. Так как по лемме 3 и соотношения (12)

$$\sum_{r=1}^{n} \mathbf{M}N_{nr}(t)=\sum_{r=1}^{n} \sum_{i,j} a_i^{(n,r)} \Lambda_{ij}^{(n,r)}(t)=\sum_{r=1}^{n} \sum_{i,j} a_i^{(n,r)} \hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)+$$

$$+\sum_{r=1}^{n} \sum_{i,j,k} a_i^{(n,r)} \int_0^t Q_{kj}^{(n,r)}(t-u)\,d\Lambda_{ik}^{(n,r)}(u)=\sum_{r=1}^{n} \sum_{i,j} a_i^{(n,r)} \hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)\,[1+o(1)],$$

то отсюда и следует теорема 2.

Замечание. Из теоремы 2 получаем, что при условии (9) соотношение (4) эквивалентно требованию, чтобы при каждом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}N_n(t)=\Lambda(t).$$

Теорема 3. *При условии (9), класс предельных процессов для последовательности $\{N_n(t)\}$ совпадает с классом процессов Пуассона.*

Доказательство этой теоремы аналогичное доказательству соответствующей теоремы для процессов восстановления (см. [5]).

В заключении хочу выразить искреннюю благодарность Б. Григелионису за постановку задачи и ряд ценных советов и указаний при ее решении.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
25.XII.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Григелионис, К вопросу о сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому, Лит. мат. сб., VI, 2(1966).
2. Б. И. Григелионис, О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому, Теория вер. и ее прим., VIII, 2(1963), 189–194.
3. Б. И. Григелионис, Об одной предельной теореме теории восстановления, Лит. мат. сб., II, 1(1962), 25–34.
4. Б. И. Григелионис, Предельные теоремы для сумм процессов восстановления, Сб. „Кибернетику – на службу коммунизму", т. 2, „Энергия", М.–Л., 246–266, 1964.
5. Б. И. Григелионис, Предельные теоремы для сумм ступенчатых случайных процессов, Канд. диссертация, М., 1962.
6. В. Л. Смит, Теория восстановления и смежные с ней вопросы, Математика, 5:3 (1961), 95–150.
7. R. Pyke, Markov renewal processes: definitions and preliminary properties, Ann. Math. Statist., 32(1961), 1231–1242.
8. R. Pyke, Markow renewal processes with finitely many states, Ann. Math. Statist., 32(1961), 1243–1259.
9. R. Pyke and R. Schaufele, Limit theorems for Markov renewal processes, Ann. Math. Statist., 35(1964), 1746–1764.

APIE MARKOVO ATSTATYMO PROCESŲ SUMŲ KONVERGAVIMĄ Į PUASONO PROCESĄ

J. SAPAGOVAS

(*Reziumė*)

Darbe randamos būtinos ir pakankamos sąlygos nepriklausomų nykstamai mažų Markovo atstatymo procesų sumų konvergencijai į Puasono procesą. Taip pat nurodytos sąlygos nagrinėjamų procesų vidurkių konvergencijai į ribinio proceso vidurkį.

ON CONVERGENCE OF THE SUMS OF THE MARKOV RENEWAL PROCESSES TO A POISSON PROCESS

J. SAPAGOVAS

(*Summary*)

In the paper necessary and sufficient conditions for the sums ot independent negligible Markov renewal processes to converge to a Poisson process are proved. The conditions for the means of concerned processes to converge to the mean of the limit process are obtained as well.