LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ВНУТРИ ОВАЛОИДА

Э. ГЯЧЯУСКАС

Определим функцию $P(x)=P\{r\leqslant x\}$ распределения расстояния r между двумя точками, расположенными внутри овалоида T объема V.

Овалоидом называется выпуклое тело в пространстве.

Аналогично случаю овала (см. [1]), для определения $P(x)$ используем дифференциальное уравнение Крофтона в терминах некоторого параметра подобного изменения овалоида T (см. [2])

$$dP=2\,[P_1-P]\ V^{-1}\,dV, \tag{1}$$

где P_1 – функция распределения величины r при условии, что она из точек лежит на поверхности овалоида.

Удобнее рассматривать дифференциальное уравнение (1) в виде

$$dP=2\,[p_1-p]\ V^{-1}\,dV, \tag{2}$$

где p и p_1 – соответствующие плотности.

Введем параметр подобного изменения овалоида – коэффициент подобия λ.

Обозначим через $p(x,\ \lambda)\,dx$ вероятность того, что $x\leqslant r\leqslant x+dx$ для подобного овалоида $T(\lambda)$. Тогда $p_1(x,\ \lambda)$ (одна точка лежит на поверхности овалоида $T(\lambda)$) равна

$$p_1(x,\ \lambda)=\frac{Q(x,\ \lambda)}{V(\lambda)}, \tag{3}$$

где $V(\lambda)=\lambda^3 V$, $Q(x,\ \lambda)$ – среднее значение площади части, находящейся внутри овалоида $T(\lambda)$, поверхности шара радиуса x с центром на поверхности овалоида $T(\lambda)$.

Подставляем выражение (3) в дифференциальное уравненение (2)

$$dp(x,\ \lambda)=2\left[\frac{Q(x,\ \lambda)}{V(\lambda)}-p(x,\ \lambda)\right]\frac{dV(\lambda)}{V(\lambda)},$$

$$dp(x,\ \lambda)=6\left[\frac{Q(x,\ \lambda)}{\lambda^3 V}-p(x,\ \lambda)\right]\frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$dp(x,\ \lambda)+p(x,\ \lambda)\ \frac{d\lambda^6}{\lambda^6}=\frac{6\,Q(x,\ \lambda)}{\lambda^4 V}\ d\lambda,$$

$$d\lambda^6 p(x,\ \lambda)=\frac{6}{V}\ \lambda^2\,Q(x,\ \lambda)\ d\lambda,$$

$$p(x,\ \lambda)=\frac{6}{\lambda^6 V}\int\lambda^2\,Q(x,\ \lambda)\ d\lambda, \tag{4}$$

$$p(x,\ \lambda)=\frac{6}{\lambda^6 V}\ [A(x,\ \lambda)+C_1(x)].$$

Из (4) видно, что $[p(x,\ \lambda)]_{x=\lambda D}=0$, где D – наибольшая хорда овалоида T. Из равенства $p\left(x,\ \frac{x}{D}\right)=0$, определив $C_1(x)$ и подставив $\lambda=1$, получим искомую плотность.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Функция* $P(x)=P\{r \leqslant x\}$ *распределения расстояния* r *между двумя точками, случайно расположенными внутри овалоида* T *объема* V, *равна*

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= \frac{6}{V}\,[B(x)+C_2], \\ B(x)+C_2 &= \int [A(x,\ 1)+C_1(x)]\,dx, \\ A(x,\ \lambda)+C_1(x) &= \int \lambda^2 Q(x,\ \lambda)\,d\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $Q(x,\ \lambda)$ — *среднее значение площади части, находящейся внутри овалоида* $T(\lambda)$, *поверхности шара радиуса* x *с центром на поверхности овалоида* $T(\lambda)$. T *и* $T(\lambda)$ — *подобные овалоиды с коэффициентом подобия* λ. $C_1(x)$ *определяется из равенства*

$$A\left(x,\ \frac{x}{D}\right)+C_1(x)=0,$$

а C_2 — *из равенства* $P(D)=1$, *где* D — *наибольшая хорда овалоида* T.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
17.V.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Гячяускас, Функция распределения расстояния между двумя точками внутри овала, Лит. мат. сб. VI, 2, 1966, 245–248.
2. M. G. Kendall, P. A. P. Moran, Geometrical probability, London, 1963.

ATSTUMO PASISKIRSTYMAS OVALOIDE

E. GEČIAUSKAS

(Reziumė)

Pateikiamas metodas atstumo tarp dviejų ovaloido vidaus taškų pasiskirstymo funkcijai rasti.

DISTRIBUTION OF A DISTANCE IN AN OVALOID

E. GEČIAUSKAS

(Summary)

The method for finding the distribution function of a distance between two random points in an ovaloid is given.