LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ В МЕТРИКЕ ПРОСТРАНСТВА L_1 и l_1

А. БИКЯЛИС, Г. ЯСЮНАС

§ 1. Введение

Рассматривается $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Положим $F(x)$ – функция распределения, $f(t)$ – характеристическая функция, α_3 – центральный момент третьего порядка, β_3 – абсолютный центральный момент третьего порядка случайной величины ξ_1. Пусть $F_n(x)$ – функция распределения суммы $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, $\bar{F}_n(x)$ – функция распределения нормированной суммы $S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$, $P_n(s)=\mathbf{P}\{\xi_1+\xi_2+\ldots+$ $+\xi_n=s\}$.

$||f||$ – норма функции $f(x)$ пространства L_1. Как обычно

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

$C_1, C_2, C_3, \ldots$ – положительные константы, независимые от n, s, x и t. $\delta_1(n), \delta_2(n)\ldots$ – убывающие функции при $n\to\infty$, т. е. $\lim_{n\to\infty}\delta_i(n)=0$. Пусть

$$H_n(x)=\Phi(x)+\frac{\alpha_3(1-x^2)}{6\sqrt{n}}\varphi(x),$$

$$\bar{H}_n(x)=\left(1+\frac{\alpha_3(x^3-3x)}{\sqrt{n}}\right)\varphi(x).$$

Поведение $x^\nu[\bar{F}_n(x)-H_n(x)]$ в метрике L_1 изучали многие авторы [1–4, 5–13, 20]. В частности показано, что, если случайная величина ξ_1 не является решетчатой и $\beta_3<\infty$, то при $0\leqslant\nu\leqslant\frac{3}{2}$

$$||x^\nu[\bar{F}_n(x)-H_n(x)]||=o\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (1)$$

Возникает естественный вопрос: возможно ли расширить интервал изменения показателя ν. Здесь будет показано, что соотношение (1) имеет место для всех $0\leqslant\nu\leqslant 2$. Это утверждение легко получить из следующей доказываемой ниже теоремы.

Теорема 1. *Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ не являются решетчатыми и $\beta_3<\infty$, то*

$$||x^2[\bar{F}_n(x)-H_n(x)]||=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Для решетчатых случайных величин доказывается

Теорема 2. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — *решетчатые случайные величины,* ξ_1 *принимает значения* $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *с максимальным шагом распределения* 1 *и с* $\beta_3 < \infty$. *Тогда*

$$\left\| x^3 \left[\bar{F}_n(x) - H_n(x) - \frac{S(x\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \varphi(x) \right] \right\| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Здесь $S(u) = u - [u] + \frac{1}{2}$, $[u]$ — *целая часть* u.

Надо заметить, что при выполнении условий теоремы 1 равенство

$$\| \bar{F}_n(x) - H_n(x) \| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

является следствием известных [16] неравенств

$$\sup_x | \bar{F}_n(x) - H_n(x) | \leqslant \frac{\delta_1(n)}{\sqrt{n}}$$

и

$$| \bar{F}_n(x) - \Phi(x) | \leqslant \frac{C \ln(2+|x|)}{(1+|x|^3)\sqrt{n}}.$$

Действительно,

$$\| \bar{F}_n(x) - H_n(x) \| \leqslant \int\limits_{|x| \leqslant [\delta_1(n)]^{-\frac{1}{2}}} | \bar{F}_n(x) - H_n(x) | \, dx +$$

$$+ \int\limits_{|x| > [\delta_1(n)]^{-\frac{1}{2}}} | \bar{F}_n(x) - H_n(x) | \, dx \leqslant \frac{2\sqrt{\delta_1(n)}}{\sqrt{n}} +$$

$$+ \frac{C_1}{\sqrt{n}} \int\limits_{|x| > [\delta_1(n)]^{-\frac{1}{2}}} \frac{\ln(2+|x|)}{1+|x|^3} \, dx + \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} \int\limits_{|x| > [\delta_1(n)]^{-\frac{1}{2}}} (1+x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Аналогичное утверждение доказывается для решетчатых случайных величин.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 2 имеет место равенство*

$$\left\| \left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3 \left[P_n(s) - \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{H}_n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right] \right\| = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Здесь берется метрика пространства l_1.

Для плотностей этот вопрос изучен С. В. Нагаевым в работе [17].

§ 2. Вспомогательные результаты

При доказательстве теорем будем пользоваться следующими известными результатами.

Теорема 1'. (*С. В. Нагаев* [17]). *Если независимые одинаково распределенные случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *имеют конечный третий момент* β_3, *то для* $x > 0$, $y > 0$

$$1 - F_n(x) \leqslant n\left(1 - F(y)\right) + \left[\frac{50 n \beta_3}{y^3}\right]^{\frac{x}{y}} \exp\left\{ 1 + \frac{n}{2y^2} \ln^2 \frac{y^3}{50\beta_3 n} + \frac{3n\beta_3}{y^3} \ln^3 \frac{y^3}{50\beta_3} \right\}. \quad (2)$$

Аналогичное утверждение справедливо для $F_n(-x)$.

Теорема 2′. (С. В. Нагаев [17]). *Если* $\beta_3 < \infty$, *то существует абсолютная* постоянная C_2 *такая, что*

$$|\bar{F}_n(x) - \Phi(x)| < \frac{C_2\beta_3}{(1+|x|^3)\sqrt{n}}.$$

Теорема 3′. (К. Ессеен [18]). *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *независимые одинаково распределенные и не являются решетчатыми. Если* $\beta_3 < \infty$, *то*

$$\sup_x |\bar{F}_n(x) - H_n(x)| < \frac{\delta_2(n)}{\sqrt{n}}.$$

Теорема 4′. (*К. Ессеен* [18]). *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – *независимые одинаково распределенные решетчатые случайные величины.* ξ_1 *принимает значения* $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *с максимальным шагом распределения* 1 и $\beta_3 < \infty$. *Тогда*

$$\sup_x \left| \bar{F}_n(x) - H_n(x) - \frac{S(x\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\varphi(x) \right| \leqslant \frac{\delta_3(n)}{\sqrt{n}}.$$

Здесь $S(u) = u - [u] + \frac{1}{2}$, $[u]$ – *целая часть* u.

Теорема 5′. (*К. Ессеен* [18]). *При выполнении условий теоремы 4′*

$$\left| P_n(s) - \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{H}_n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right| \leqslant \frac{\delta_4(n)}{n}.$$

Теорема 6′. (*См.* [18]). *Пусть* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ – *независимые одинаково распределенные случайные величины.* η_1 *имеет дисперсию* $\bar{\sigma}^2$ *и конечный третий абсолютный центральный момент* $\bar{\beta}_3$, *то при* $|t| \leqslant \frac{\bar{\sigma}^3\sqrt{n}}{5\bar{\beta}_3}$

$$\left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leqslant \frac{7|t|^3\bar{\beta}_3}{6\sqrt{n}\,\bar{\sigma}^3} e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Здесь $f_n(t)$ – *характеристическая функция суммы* $S_n = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (\eta_j - M\eta_j)$.

Лемма 1′. (*См.* [19]). *Если* $\beta_3 < \infty$ *и* $\frac{\beta_3}{\sqrt{n}} < \frac{1}{500}$, *то для* $x \in \left(8\sqrt{n};\ \sqrt{2{,}5\,n \ln \frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}\right)$ *имеет место неравенство*

$$\left| F_n(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right| \leqslant n\left(1 - F\left(\frac{x}{4}\right)\right) + \frac{C_3 n\beta_3}{x^3} e^{-\frac{x^2}{8n}}.$$

Аналогичное утверждение справедливо для $x \in \left(-\sqrt{2,5n\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}};\ -8n\right)$.

§ 3. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Для оценки интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\bar{F}_n(x) - H_n(x)|\, dx$$

его интервал интегрирования $(-\infty, +\infty)$ целесообразно подразделить на пять непересекающихся интервалов:

$$\left(-\infty;\ -\sqrt{2{,}5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}\right),\quad \left(-\sqrt{2{,}5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}};\ -[\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}}\right),$$

$$\left(-[\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}};\ [\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}}\right),\quad \left([\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}};\ \sqrt{2{,}5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}\right),$$

$$\left(\sqrt{2{,}5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}};\ +\infty\right).$$

Для оценки I на первом и пятом интервалах можем успешно применять неравенство теоремы 1′, на втором и четвертом – лемму 1′, а на третьем – результат теоремы 3′. Здесь $\delta_2(n)$ из теоремы 3′. Результат доказываемой теоремы тривиален, если $\sqrt{n}\leqslant 500\beta_3$, поэтому можем считать, что $\sqrt{n}>500\beta_3$.

Как уже заметили, в силу теоремы 3′

$$\int\limits_{|x|<[\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}}} x^2\,|\bar{F}_n(x)-H_n(x)|\,dx\leqslant\frac{\delta_2(n)}{\sqrt{n}}\int\limits_{|x|\leqslant[\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}}} x^2\,dx=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{3}$$

Очевидно

$$\frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}}\int\limits_{|x|>[\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}}}(x^2+x^4)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{4}$$

Осталось оценить интеграл

$$I=\int\limits_{|x|>[\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}}} x^2\,|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|\,dx.$$

Положим $[\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}}<\sqrt{2{,}5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}$. В противоположном случае оценка I упрощается. Используя лемму 1′, получаем

$$\int\limits_{[\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}}<x<\sqrt{2{,}5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}} x^2\,|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant n\int\limits_{[\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}}<x<\sqrt{2{,}5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}} x^2\left(1-F\left(\frac{x\sqrt{n}}{4}\right)\right)dx+$$

$$+\frac{C_4\beta_3}{\sqrt{n}}\int\limits_{[\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}}<x<\sqrt{2{,}5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}}\frac{e^{-\frac{x^2}{8}}}{x}\,dx=$$

$$= \frac{n\,[\delta_2(n)]^{-\frac{3}{4}}}{3}\left[1 - F\left(\frac{\sqrt{n}\,[\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}}}{4}\right)\right] +$$

$$+ \frac{n}{3}\int\limits_{[\delta_2(n)]^{-\frac{1}{4}}}^{\infty} x^3\,dF\left(\frac{x\sqrt{n}}{4}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{5}$$

Имеем

$$\int\limits_{\sqrt{2,5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}}^{\infty} x^2\,|\bar{F}_n(x) - \Phi(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{\sqrt{2,5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}}^{\infty} x^2\left(1 - \bar{F}_n(x)\right)dx +$$

$$+ \int\limits_{\sqrt{2,5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}}^{\infty} x^2\left(1 - \Phi(x)\right)dx. \tag{6}$$

Очевидно

$$\int\limits_{\sqrt{2,5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}} x^2\left(1 - \Phi(x)\right)dx = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{7}$$

Первый интеграл в правой части неравенства (6) оценим с помощью теоремы 1'. Именно, подставляя в (2) вместо y $\frac{x}{2}$, получаем оценку

$$1 - \bar{F}_n(x) \leqslant n\left(1 - F\left(\frac{x\sqrt{n}}{2}\right)\right) +$$

$$+ \left(\frac{400\beta_3}{x^3\sqrt{n}}\right)^2 \exp\left\{1 + \frac{2}{x^3}\ln^2\frac{x^3\sqrt{n}}{400\beta_3} + \frac{24\beta_3}{x^3}\ln^3\frac{x^3\sqrt{n}}{400\beta_3}\right\}$$

и

$$\int\limits_{\sqrt{2,5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}}^{\infty} x^2\left(1 - \bar{F}_n(x)\right)dx \leqslant n\int\limits_{\sqrt{2,5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}}^{\infty} x^2\left(1 - F\left(\frac{x\sqrt{n}}{2}\right)\right)dx +$$

$$+ \frac{C_5}{n}\int\limits_{\sqrt{2,5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}}^{\infty} \frac{1}{x^4}\exp\left\{\frac{2}{x^3}\ln^2\frac{x^3\sqrt{n}}{400\beta_3} + \frac{24\beta_3}{x^3}\ln^3\frac{x^3\sqrt{n}}{400\beta_3}\right\}dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{nx^3}{3}\left(1 - F\left(\frac{\sqrt{2,5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}}{2}\right)\right) + \frac{n}{3}\int\limits_{\sqrt{2,5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}}^{\infty} x^3\,dF\left(\frac{x\sqrt{n}}{2}\right) +$$

$$+ \frac{C_6}{\sqrt{n}}\int\limits_{\sqrt{2,5\ln\frac{\sqrt{n}}{500\beta_3}}}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{8}$$

Из (6), (7) и (8) вытекает

$$\int\limits_{[\delta_3(n)]^{-\frac{1}{4}}}^{\infty} x^2 \,|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|\,dx = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{9}$$

Аналогично можно показать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-[\delta_3(n)]^{-\frac{1}{4}}} x^2 \,|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|\,dx = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Теперь отсюда и (3 – 5), (9) следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 не будем проводить, поскольку оно мало чем отличается от доказательства теоремы 1.

§ 4. Доказательство теоремы 3

Через $F_n^{(y)}(x)$ обозначим n-кратную свертку функции

$$F^{(y)}(x)=\begin{cases} F(x) & \text{при} \quad x \leqslant y, \\ F(y) & \text{при} \quad x > y. \end{cases}$$

Здесь $y>0$. Точнее y выберем ниже.

Свертка $F_n^{(y)}(x)$ постоянная при $x>yn$, следовательно, для каждого $h>0$ и x интеграл

$$F_{nh}^{(y)}(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} e^{hu}\,dF_n^{(y)}(u)$$

сходится. Интеграл $F_n^{(y)}(x)=F_{1h}^{(y)}(x)$ можем разложить на сумму двух функции:

$$F_h^{(y)}(x)=\Phi_h(x)+\psi_h^{(y)}(x), \tag{10}$$

где

$$\Phi_h(x)=\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{hu}\,dF(u) & \text{при} \quad x \leqslant \frac{1}{h}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{h}} e^{hu}\,dF(u) & \text{при} \quad x > \frac{1}{h}, \end{cases}$$

$$\psi_h^{(n)}(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant \frac{1}{h}, \\ \int\limits_{\frac{1}{h}}^{x} e^{hu}\,dF^{(y)}(u) & \text{при} \quad x > \frac{1}{h}. \end{cases}$$

В дальнейшем пусть $\Phi_{jh}(x)$ – j-кратная свертка $\Phi_h(x)$, а $\psi_{jh}^{(y)}(x)$ – j-кратная свертка функции $\psi_h^{(y)}(x)$. Пользуясь только что введенными обозначениями и тем, что операция свертывания является ассоциативной, дистрибутивной и коммутативной, интеграл $F_{nh}^{(y)}(x)$ можем записать суммой:

$$F_{nh}^{(y)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Phi_{jh} * \psi_{(n-j)h}^{(y)}(x).$$

Заметим, что $\psi_{nh}^{(y)}=\binom{n}{0}\Phi_{0h}*\psi_{nh}^{(y)}(x)$ и $\Phi_{nh}(x)=\binom{n}{0}\Phi_{nh}*\psi_{0h}^{(y)}(x)$ (— знак свертки).

Очевидно

$$F_{nh}^{(y)}(x+0)-F_{nh}^{(y)}(x)=\Phi_{nh}(x+0)-\Phi_{nh}(x)+$$
$$+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\Phi_{jh}*[\Psi_{(n-j)h}^{(y)}(x+0)-\Psi_{(n-j)h}^{(y)}(x)]$$

и

$$F_n^{(y)}(x+0)-F_n^{(y)}(x)=e^{-hx}[F_{nh}^{(y)}(x+0)-F_{nh}^{(y)}(x)]. \tag{11}$$

Переходим к оценке суммы

$$I=\sum_{s>\psi(n)\sqrt{n}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3\left|P_n(s)-\frac{1}{\sqrt{n}}\bar{H}_n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right|.$$

Здесь функция $\psi(n)$ бесконечно возрастает при возрастании аргумента n. Ввиду этого

$$\sum_{s>\psi(n)\sqrt{n}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3\left|\frac{\bar{H}_n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}\right|=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из дальнейших рассуждений выяснится целесообразность разложить I на несколько сумм, а потом оценить каждую из них в отдельности. Именно:

$$I=\sum_{s>\psi(n)\sqrt{n}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3\left|P_n(s)-[F_n^{(y)}(s+0)-F_n^{(y)}(s)]+\right.$$
$$+\sum_{s>\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3[F_n^{(y)}(s+0)-F_n^{(y)}(s)]+$$
$$+\sum_{\psi(n)\sqrt{n}<s<\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3\left|F_n^{(y)}(s+0)-F_n^{(y)}(s)-\frac{\varphi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}\right|+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{s>\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3\varphi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)=I_1+I_2+I_3+I_4+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поскольку

$$I_4=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{s>\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3\varphi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$I=I_1+I_2+I_3+o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{12}$$

Оценим I_1, I_2 и I_3.

Оценка I_1.

Введем вспомогательную функцию

$$Q^{(y)}(x)=\begin{cases}F(x)-F(y) & \text{при}\quad x\geqslant y,\\ & \text{при}\quad x<y,\end{cases}$$

которая в сумме с $F^{(y)}(x)$ дает $F(x)$:

$$F(x)=F^{(y)}(x)+Q^{(y)}(x).$$

С помощью этого равенства $F_n(x)$ (n-кратную свертку функции $F(x)$) можем записать следующим образом:

$$F_n(x)=F_n^{(y)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}F_j^{(y)}*Q_{n-1}^{(y)}(x).$$

Отсюда

$$F_n(x+0)-F_n(x)-[F_n^{(y)}(x+0)-F_n^{(y)}(x)]=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}F_j^{(y)}*[Q_{n-j}^{(y)}(x+0)-Q_{n-j}^{(y)}(x)]. \tag{13}$$

Здесь $Q_j^{(y)}(x)$ — j-кратная свертка функции $Q^{(y)}(x)$, а $F_j^{(y)}(x)$ аналогично была определена выше.

Для всех x и $y>0$ функция $Q^{(y)}(x)$ неубывающая, поэтому

$$Q^{(y)}(x+0)-Q^{(y)}(x)\geqslant 0.$$

Очевидное неравенство

$$F_{n-1}^{(y)}*[Q^{(y)}(x+0)-Q^{(y)}(x)]\leqslant F_{n-1}\quad[Q^{(y)}(x+0)-Q^{(y)}(x)]$$

для всех x и $y(y>0)$ и соотношение (13) дает

$$P_n(s)-[F_n^{(y)}(s+0)-F_n^{(y)}(s)]\leqslant p_{1n}^{(y)}(s)+p_{2n}^{(y)}(s),$$

где

$$p_{1n}^{(y)}(s)=nF_{n-1}*[Q^{(y)}(s+0)-Q^{(y)}(s)],$$

$$p_{2n}^{(y)}(s)=\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j}F_j^{(y)}*[Q_{n-j}^{(y)}(s+0)-Q_{n-j}^{(y)}(s)].$$

В силу этого

$$I_1\leqslant\sum_{s>\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_s}}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3 p_{1n}^{(y)}(s)+\sum_{s>\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_s}}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3 p_{2n}^{(y)}(s). \tag{14}$$

В последнем неравенстве вместо y подставляем $\frac{s}{4}$ и после небольших подсчетов получаем

$$p_{1n}^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s)=n\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[Q^{\left(\frac{s}{4}\right)}(m+0)-Q^{\left(\frac{s}{4}\right)}(m)\right]\cdot[F_{n-1}(s-m+0)-F_{n-1}(s-m)]=$$

$$=n\sum_{m>\frac{s}{4}}\mathbf{P}\{\xi_1=m\}\cdot\mathbf{P}\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n-1}=s-m\}. \tag{15}$$

Для оценки вероятности $\mathbf{P}\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n-1}=s-m\}$ можем воспользоваться известной локальной теоремой (см. [14] или [15]):

$$\mathbf{P}\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n-1}=s-m\}\leqslant\frac{e^{-\frac{(s-m)^2}{2(n-1)}}}{\sqrt{2\pi(n-1)}}+\frac{C_7}{n\left(1+\left|\frac{s-m}{\sqrt{n-1}}\right|^3\right)}, \tag{16}$$

где C_7 — некоторая постоянная, независящая от n и $s-m$. Из (15) и (16) следует

$$\sum_{s>\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}} \left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3 p_{1n}^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m>\frac{1}{4}\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}} \sum_{s=0}^{4m} s^3 \mathbf{P}\{\xi_1=m\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{e^{-\frac{(s-m)^2}{2(n-1)}}}{\sqrt{2\pi(n-1)}}+\frac{C_7}{n\left(1+\left|\frac{s-m}{\sqrt{n-1}}\right|^3\right)}\right\}=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теперь оценим вторую сумму в (14). Функции $F_j^{\left(\frac{s}{4}\right)}(x)$ и $Q_{n-j}^{\left(\frac{s}{4}\right)}(x)$ — неубывающие относительно x и неотрицательные. Поэтому

$$p_{2n}^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}\left[F^{\left(\frac{s}{4}\right)}+Q^{\left(\frac{s}{4}\right)}\right]^{*(n-2)} * \left[Q_2^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s+0)-Q_2^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s)\right]. \tag{17}$$

Поскольку $Q_2^{\left(\frac{s}{4}\right)}(x)\equiv 0$ для $x<\frac{s}{2}$, то

$$\left[F^{\left(\frac{s}{4}\right)}+Q^{\left(\frac{s}{4}\right)}\right]^{*(n-2)}\left[Q_2^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s+0)-Q_2^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s)\right]=$$

$$=\sum_{m<\frac{s}{2}}\left[Q_2^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s-m+0)-Q_2^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s-m)\right]\left\{\left[F^{\left(\frac{s}{4}\right)}+Q^{\left(\frac{s}{4}\right)}\right]^{*(n-2)}(m+0)-\right.$$

$$\left.-\left[F^{\left(\frac{s}{4}\right)}+Q^{\left(\frac{s}{4}\right)}\right]^{*(n-2)}(m)\right\}. \tag{18}$$

Очевидно

$$Q_2^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s-m+0)-Q_2^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s-m)=\sum_{\frac{s}{4}<\nu<\frac{3s}{4}-m}\mathbf{P}\{\xi_1=s-m-\nu\}\cdot\mathbf{P}\{\xi_1=\nu\}.$$

В последнем неравенстве вероятность $\mathbf{P}\{\xi_1=s-m-\nu\}$ оценим с помощью неравенства Чебышева и получим

$$Q_2^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s-m+0)-Q_2^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s-m)\leqslant\frac{64\beta_3}{s^3}\sum_{\frac{s}{4}<\nu<\frac{3s}{4}-m}{}'\,\mathbf{P}\{\xi_1=\nu\}\leqslant\frac{64^2\beta_3^2}{s^6}.$$

Из (17), (18) и только что полученного неравенства следует

$$p_{2n}^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s)\leqslant\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{64^2\beta_3^2}{s^6}.$$

Отсюда

$$\sum_{s>\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3 p_{2n}^{\left(\frac{s}{4}\right)}(s)=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Показали, что

$$I_1=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Оценка I_2. Используя равенство (11), выражение I_2 представляем в виде

$$I_2=\sum_{s>\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3 e^{-hs}[F_{nh}^{(y)}(s+0)-F_{nh}^{(y)}(s)].$$

Далее, пусть при $y>\frac{1}{h}$

$$R(y,h)=\int_{-\infty}^{y} e^{hu}\,dF(u)=R_1(h)+R_2(y,h),$$

где

$$R_1(h)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} e^{hu}\,dF(u),\qquad R_2(y,\ h)=\int_{\frac{1}{h}}^{y} e^{hu}\,dF(u).$$

С помощью формулы Тейлора оценим R_1.

$$R_1(h)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} dF(u)+h\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u\,dF(u)+\frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^2\,dF(u)+$$

$$+\frac{h^3}{6}\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} e^{h\Theta u}u^3\,dF(u),\qquad (0<\Theta<1).$$

Здесь

$$1-\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} dF(u)\leqslant h^3\beta_3,\qquad 1-\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^2\,dF(u)\leqslant h\beta_3\quad \text{и}\quad \int_{-\infty}^{\infty} u\,dF(u)=0.$$

Поэтому

$$\left|\,R_1(h)-1-\frac{h^2}{2}\,\right|\leqslant 3\beta_3h^3. \tag{19}$$

Аналогично можно показать, что

$$|\,R_1(h)-1\,|<2h^2. \tag{20}$$

Отсюда для $h<\frac{1}{2}$ следует

$$R_1(h)>\frac{1}{2}.$$

Теперь оценим сверху выражение $R_2(y,\ h)$ относительно y и h. Интегрируя по частям, получаем

$$R_2(y,h)=[1-F(u)]\,e^{hu}\Big|_{y}^{\frac{1}{h}}+h\int_{\frac{1}{h}}^{y}[1-F(u)]\,e^{hu}\,du. \tag{21}$$

Поскольку $1-F(u)<\frac{\beta_3}{u^3}$ для $u>0$, то

$$\int_{\frac{1}{h}}^{y}[1-F(u)]\,e^{hu}\,du\leqslant\beta_3\int_{\frac{1}{h}}^{y}\frac{e^{hu}}{u^3}\,du=\beta_3h^2\int_{1}^{yh}\frac{e^{u}}{u^3}\,du\leqslant\frac{42\,e^{yh}}{y^3h}.$$

Очевидно $u^\alpha e^{-u} \leqslant e^{-\alpha}\alpha^\alpha$, α, $u>0$ и

$$1-F\left(\frac{1}{h}\right) < h^3\beta_3 \leqslant 8\beta_3 \frac{e^{yh}}{y^3}.$$

Подставляя только что полученные оценки в (21), получаем

$$R_2(y,\ h) \leqslant 50\beta_3 \frac{e^{yh}}{y^3}. \tag{22}$$

По определению функция $F_{nh}^{(y)}(s)$ — неубывающая относительно s и удовлетворяет неравенство

$$F_{nh}^{(y)}(s) \leqslant R^n(y,\ h)$$

для всех неотрицательных x, y и $0<h<\frac{1}{2}$.

В выражение I_2 вместо y целесообразно поставить $\frac{s}{4}$. После этого с помощью (20), (22) и (23) получаем

$$I_2 \leqslant \sum_{s>\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}} \left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3 \exp\left\{-hs+\frac{nh}{2}+\frac{50h\beta_3 e^{\frac{hs}{4}}}{\left(\frac{s}{4}\right)^3}+3h\beta_3 n\right\}.$$

В последнем неравенстве положим теперь

$$h=h_3\left(\frac{s}{4}\right)=\frac{4}{s}\ \ln\frac{\left(\frac{s}{4}\right)^3}{50n\beta_3},$$

то есть, что h является решением уравнения

$$50n\beta_3 e^{\frac{hs}{4}}=\left(\frac{s}{4}\right)^3.$$

Такой выбор h не противоречит всем вышепроведенным рассуждениям, поскольку $\frac{4}{s}<h_3\left(\frac{s}{4}\right)<\frac{1}{2}$ для всех $s>\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}$. Теперь

$$I_2 \leqslant \sum_{s>\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}} s^3\left(\frac{3200\beta_3}{s^3\sqrt{n}}\right)^4 \exp\left\{1+\frac{1}{2}\left[\frac{4}{s}\ \ln\frac{\sqrt{n}s^3}{3200\beta_3}\right]^2+\right.$$

$$\left.+\frac{3\beta_3}{\sqrt{n}}\left[\frac{4}{s}\ \ln\frac{\sqrt{n}s^3}{3200\beta_3}\right]\right\}=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Оценка I_3. Под знаком суммы I_3 разность

$$F_n^{(y)}(s+0)-F_n^{(y)}(s)-\frac{1}{\sqrt{n}}\ \varphi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

обозначим через J и с помощью равенства (10) запишим в виде

$$J=e^{-hs}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\ \psi_{(n-j)h}^{(y)} * \left[\Phi_{jh}(s+0)-\Phi_{jh}(s)\right]-\frac{1}{\sqrt{n}}\ \varphi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right).$$

Для дальнейшего изучения J проведем группировку:

$$J = e^{-hs} R_1^n(h) \left[\frac{\Phi_{nh}(s+0) - \Phi_{nh}(s)}{R_1^n(h)} - \frac{\varphi(y_{ns})}{\sigma(h)\sqrt{n}} \right] +$$

$$+ \frac{e^{-hs} R_1^n(h)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(h) n}} \left[e^{-\frac{y_{ns}^2}{2}} - 1 \right] + \frac{e^{-hs} R_1^n(h)}{\sqrt{2\pi n}} \left[\frac{1}{\sigma(h)} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left[e^{-hs} R_1^n(h) - e^{-\frac{s^2}{2n}} \right] + n e^{-hs} \psi_h^{(y)} * [\Phi_{(n-1)h}(s+0) - \Phi_{(n-1)h}(s)] +$$

$$+ e^{-hs} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j} \psi_{(n-j)h}^{(y)} * [\Phi_{jh}(s+0) - \Phi_{jh}(s)], \tag{24}$$

$$y_{ns} = \frac{s - nm(h)}{\sigma(h)\sqrt{n}}$$

при $h < \frac{1}{2}$. Каждый член этой суммы оценим в отдельности.

Через η_1 обозначим случайную величину с функцией распределения $\frac{\Phi_h(x)}{R_1(h)}$. Она принимает значения $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ с максимальным шагом распределения 1

$$m(h) = \frac{1}{R_1(h)} \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u e^{hu} dF(u)$$

и

$$\sigma^2(h) = \frac{1}{R_1(h)} \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^2 e^{hu} dF(u) - \left[\frac{1}{R_1(h)} \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u e^{hu} dF(u) \right]^2,$$

соответственно, математическое ожидание и дисперсия случайной величины η_1. Для всех $h < \frac{1}{2}$ η_1 имеет конечный третий момент $\beta_3(h)$.

Положим

$$\bar{R}_1(h) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u e^{hu} dF(u) \quad \text{и} \quad \bar{\bar{R}}_1(h) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^2 e^{hu} dF(u).$$

Для изучения поведения функций $m(h)$ и $\sigma^2(h)$ необходимо получить ряд оценок $\bar{R}_1(h)$ и $\bar{\bar{R}}_1(h)$. С помощью формулы Тейлора получаем

$$\bar{R}_1(h) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u\, dF(u) + \frac{h}{2} \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^2 e^{h\Theta_1 u} dF(u) \qquad (0 < \Theta_1 < 1), \tag{25}$$

$$\bar{R}_1(h) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u\, dF(u) + h \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^2 dF(u) + \frac{h^2}{2} \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^3 e^{h\Theta_2 u} dF(u) \qquad (0 < \Theta_2 < 1) \tag{26}$$

и

$$\bar{\bar{R}}_1(h) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^2 dF(u) + h \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^3 e^{h\Theta_3 u} dF(u) \qquad (0 < \Theta_3 < 1). \tag{27}$$

Поскольку случайная величина ξ_1 имеет единичную дисперсию, то

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^2 dF(u) \geqslant 1 - h\beta_3 \quad \text{и} \quad \int_{\frac{1}{h}}^{\infty} u\,dF(u) \leqslant h^2\beta_3. \tag{28}$$

Теперь из (25—28) следует

$$|R_1(h)| \leqslant eh, \tag{29}$$

$$|\bar{R}_1(h) - h| \leqslant 4\beta_3 h^2 \tag{30}$$

и

$$|\bar{\bar{R}}_1(h) - 1| \leqslant (e+1)\beta_3 h.$$

Отсюда и (19) получаем

$$|\bar{R}_1(h) - hR_1(h)| \leqslant |\bar{R}_1(h) - h| + |R_1(h) - 1|\, h \leqslant 5\beta_3 h^2 \tag{31}$$

и

$$|\bar{\bar{R}}_1(h) - R_1(h)| \leqslant 6\beta_3 h. \tag{32}$$

Очевидно

$$m(h) = h + \frac{\bar{R}_1(h) - hR_1(h)}{R_1(h)}$$

и

$$\sigma^2(h) = 1 + \frac{\bar{\bar{R}}_1(h) - R_1(h)}{R_1(h)} - \frac{\bar{R}_1^2(h)}{R_1^2(h)}.$$

Далее, подставляя в эти равенства оценки (29), (31), (32), получаем

$$|m(h) - h| \leqslant 10\beta_3 h^2 \tag{33}$$

и

$$|\sigma^2(h) - 1| \leqslant 27\beta_3 h. \tag{34}$$

Следовательно, для $h < \frac{1}{36\beta_3}$ имеет место неравенства $\sigma(h) > \frac{1}{2}$ и $m(h) > \frac{2h}{3}$.

Теперь оценим сверху характеристическую функцию

$$f_h(t) = \frac{1}{R_1(h)} \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} e^{itu}\, d\Phi_h(u)$$

случайной величины η_1 для $0 < \varepsilon < |t| \leqslant \pi$.

Случайная величина ξ_1 имеет решетчатое распределение с максимальным шагом распределения 1, следовательно, ее характеристическая функция $f(t)$ для всех $\varepsilon < |t| \leqslant \pi$ удовлетворяет неравенство

$$|f(t)| \leqslant C < 1. \tag{35}$$

Лемма 1. *Для всех* $\varepsilon < |t| \leqslant \pi$ *и* $h < \frac{1}{2}$ *имеет место неравенство*

$$|f_h(t)| \leqslant \exp\left\{-(1-C) + \frac{h^2}{2e^2 R_1^2(h)}\right\}. \tag{36}$$

Доказательство леммы 1. Имеем

$$1 - |f_h(t)|^2 = \frac{1}{R_1^2(h)} \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} \frac{\sin t(u-v)}{2}\, e^{h(u+v)}\, dF(u)\, dF(v).$$

Отсюда немедленно следует

$$R_1^2(h)[1-|f_h(t)|^2] \geqslant e^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 t(u-v)}{2}\,dF(u)\,dF(v)-$$

$$-e^{-2}\left[\int_{\frac{1}{h}}^{\infty}\int_{\frac{1}{h}}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-\frac{1}{h}}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{h}}\right]\frac{\sin^2 t(u-v)}{2}\,dF(u)\,dF(v). \qquad (37)$$

Здесь

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 t(u-v)}{2}\,dF(u)\,dF(v)=1-|f(t)|^2.$$

Второй член правой части неравенства (37) оцениваем с помощью неравенства Чебышева:

$$\int_{-\infty}^{-\frac{1}{h}}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{h}}\frac{\sin^2 t(u-v)}{2}\,dF(u)\,dF(v)+\int_{\frac{1}{h}}^{\infty}\int_{\frac{1}{h}}^{\infty}\frac{\sin^2 t(u-v)}{2}\,dF(u)\,dF(v)\leqslant h^2.$$

Получим

$$R_1^2(h)[1-|f_h(t)|^2]\geqslant e^{-2}[1-|f(t)|^2-h^2].$$

Заметим, что $R_1(h)>\frac{1}{2}$ при $h<\frac{1}{2}$. Отсюда и неравенства (25) следует утверждение леммы 1.

Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$S_{nh}=\frac{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n-nm(h)}{\sigma(h)\sqrt{n}}.$$

Функция распределения суммы S_{nh} тождественно равна соотношению

$$\frac{\Phi_{nh}\left(x\sigma(h)\sqrt{n}+nm(h)\right)}{R_1^n h}.$$

Характеристическую функцию S_{nh} обозначим через $f_{nh}(t)$. Как известно, для всех $|t|\leqslant\sigma^3(h)\sqrt{n}/5\beta_3(h)$ она будет удовлетворять неравенство

$$\left|f_{nh}(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\leqslant\frac{7|t|^3\beta_3(h)}{6\sigma^3(h)\sqrt{n}}\,e^{-\frac{t^2}{4}} \qquad (38)$$

(см. теорему 6′). На основе этого неравенства докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Для всех целых положительных* s *и* $0<h<\frac{1}{36\beta_3}$ *имеет место неравенство*

$$\left|\frac{\Phi_{nh}(s+0)-\Phi_{nh}(s)}{R_1^n(h)}-\frac{\varphi(y_{ns})}{\sigma(h)\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{1096\beta_3}{n}+2\pi e^{-(1-C)n+\frac{nh^2}{9}} \qquad (0\leqslant C<1). \qquad (39)$$

Доказательство леммы 2. По формуле обращения имеет место равенство

$$\frac{\Phi_{nh}(s+0)-\Phi_{nh}(s)}{R_1^n(h)}-\frac{e^{-\frac{y_{ns}^2}{2}}}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma(h)\sqrt{n}}\int\limits_{-\pi\sigma(h)\sqrt{n}}^{\pi\sigma(h)\sqrt{n}}\left[f_{nh}(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]e^{-ity_{ns}}dt+$$

$$+\frac{1}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\int\limits_{|t|>\pi\sigma(h)\sqrt{n}}e^{-ity_{ns}-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (40)$$

Будем рассматривать, когда $\sigma^3(h)\sqrt{n}/5\beta_3(h)<\pi\sigma(h)<\varphi\sqrt{n}$, поскольку в противоположном случае доказательство леммы только упрощается. Имеют место неравенства $\sigma^2(h)<2$ и $\beta_3(h)<8e\beta_3$ для всех $0<h<\frac{1}{36\beta_3}$. Поэтому

$$\frac{\sigma^3(h)}{5\beta_3(h)}>\frac{\sqrt{2}}{20e\beta_3}.$$

Далее, в силу (36) и (38),

$$\frac{1}{2\pi\sigma(h)\sqrt{n}}\left|\int\limits_{|t|\leqslant\pi\sigma(h)\sqrt{n}}\left[f_{nh}(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]e^{-ity_{ns}}dt\right|\leqslant\frac{14\beta_3(h)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^4(h)\,n}+$$

$$+2\pi\exp\left\{-(1-C)n+\frac{nh^2}{2e^2R_1^2(h)}\right\}+\exp\left\{-\frac{\sigma^6(h)\,n}{50\beta_3^2(h)}\right\}. \qquad (41)$$

Очевидно

$$\frac{1}{2\pi\sigma(h)\sqrt{n}}\left|\int\limits_{|t|>\pi\sigma(h)\sqrt{n}}e^{-\frac{t^2}{2}-ity_{ns}}dt\right|\leqslant\frac{e^{-n\sigma^2(h)}}{n\sigma^2(h)}. \qquad (42)$$

В соотношение (40) подставляем оценки (41) и (42). Потом, ввиду того, что $\sigma(h)>\frac{1}{2}$, $\beta_3(h)<8e\beta_3$ и $\sigma^3(h)/5\beta_3(h)>\sqrt{2}/20e\beta_3$, после несложных вычислений получаем утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Существуют постоянные C_1 и C_2 независимые от n, s, y и h такие, что для всех целых положительных чисел s и для всех h, удовлетворяющих неравенство $\frac{1}{y}<h<\frac{1}{36\beta_3}$, имеет место соотношение*

$$ne^{-hs}\,\psi_n^{(y)}*[\Phi_{(n-1)h}(s+0)-\Phi_{(n-1)h}(s)]\leqslant C_1\sqrt{n}\,e^{-hs}R_1^n(h)R_2(y,\ h)+$$

$$+C_2nR_1^n(h)R_2(y,\ h)\exp\left\{-hs-(1-C)n+\frac{nh^2}{9}\right\}. \qquad (43)$$

Доказательство леммы 3. По определению функции $\psi_h^{(y)}(v)$ для $\frac{1}{y}<h$ имеем:

$$\psi_n^{(y)}*[\Phi_{(n-1)h}(s+0)-\Phi_{(n-1)h}(s)]\leqslant$$

$$\leqslant\sup_u\,[\Phi_{(n-1)h}(u+0)-\Phi_{(n-1)h}(u)]\int\limits_{\frac{1}{h}}^{y}e^{hv}dF(v).$$

В силу леммы 2

$$\sup_u \frac{\Phi_{(n-1)h}(u+0)-\Phi_{(n-1)h}(u)}{R_1^{n-1}(h)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1096\beta_3}{n-1}+$$

$$+2\pi \exp\left\{-(1-C)(n-1)+\frac{h^2(n-1)}{9}\right\}. \tag{44}$$

В дальнейшем положим

$$R_2(y,\ h)=\int\limits_{\frac{1}{h}}^{y} e^{hv}\,dF(v).$$

Используя новое обозначение, получаем

$$ne^{-hs}\psi_h^{(y)}\ \ [\Phi_{(n-1)h}(s+0)-\Phi_{(n-1)h}(s)]\leqslant$$

$$\leqslant ne^{-hs}R_2(y,\ h)R_1^{n-1}(h)\sup_u \frac{\Phi_{(n-1)h}(u+0)-\Phi_{(n-1)h}(u)}{R_1^{n-1}(h)}.$$

Отсюда и (44) следует утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Для положительных y и всех h, удовлетворяющих неравенство $\frac{1}{y}<h<\frac{1}{36\beta_3}$, имеем*

$$e^{-hs}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j}\psi_{(n-j)h}^{(y)}*[\Phi_{jh}(s+0)-\Phi_{jh}(s)]\leqslant \frac{n^2}{2}\,e^{-hs}R^n(y,\ h)R_2^2(y,\ h). \tag{45}$$

Доказательство леммы 4. По определению функции $\Phi_h(u)$ и $\Psi_h^{(y)}(u)$ являются неубывающими относительно u и неотрицательными. Поэтому

$$\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j}\Psi_{(n-j)h}^{(y)}*[\Phi_{jh}(s+0)-\Phi_{jh}(s)]\leqslant \frac{n^2}{2}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}\Psi_{(n-j)h}^{(y)}*\Phi_{jh}=$$

$$=\frac{n^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\Phi_h+\Psi_h^{(y)}]^{*(n-2)}\,d\Psi_{2h}^{y}(v)\leqslant \frac{n^2}{2}\sup_u[\Phi_h+\Psi_h^{(y)}]^{*(n-2)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\Psi_{2h}^{(y)}(v).$$

Поскольку

$$\sup_u[\Phi_h+\Psi_h^{(y)}]^{*(n-2)}=R^{n-2}(y,\ h)$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\Phi_{2h}^{(y)}(u)=R_2^2(y,\ h),$$

то из последнего неравенства следует утверждение леммы 4.

Выражение J (см. (24)) должны оценить сверху для всех целых s из интервала $\left(\psi(n)\sqrt{n};\ \sqrt{3\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}\right)$. Здесь $\psi(n)$ – некоторая функция, удовлетворяющая неравенства $\frac{1}{144\beta_3}<\psi(n)<\sqrt{3\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}$. Все проведенные выше рассуждения имеют место для всех положительных y. Пусть далее $y=\frac{s}{6}$. Интервал изменения h сузим до $Y=\left(\frac{1}{36\beta_3\sqrt{n}};\ \frac{1}{36\beta_3}\right)$.

Через A обозначим множество значений функции $m(h)$ $(h>0)$. Оценка (33) показывает, что уравнение

$$u=m(u)$$

при любом $u<\frac{1}{54\beta_3}$ и $u\in A$ имеет решение $h(u)$, удовлетворяющее неравенство

$$|h(u)-u|\leqslant 23\beta_3 u^2. \tag{46}$$

Введем следующие обозначения:

$$B=\left\{s:\frac{s}{n}\in A \quad \text{и} \quad \psi(n)\sqrt{n}<s<\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}\right\}$$

и

$$\bar{B}=\left\{s:\frac{s}{n}\notin A \quad \text{и} \quad \psi(n)\sqrt{n}<s<\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}\right\}.$$

Сперва оценим J для всех целых $s\in B$.

Из неравенства (46) и того что $u=m(h)$ вытекает, что $h<\frac{3}{2}\,m(h)$ для $h<\frac{1}{36\beta_3}$. Отсюда для $s\in B$ имеет место неравенство

$$h\left(\frac{s}{n}\right)\leqslant\frac{3s}{2n}. \tag{47}$$

Следовательно,

$$\left|h\left(\frac{s}{n}\right)-\frac{s}{n}\right|\leqslant\frac{50\beta_3 s^2}{n^2} \tag{48}$$

и

$$\left|h^2\left(\frac{s}{n}\right)-\frac{s^2}{n^2}\right|\leqslant\frac{130\beta_3 s^3}{n^3}. \tag{49}$$

Поскольку для $s\in B$ решение $h\left(\frac{s}{n}\right)$ принадлежит интервалу Y, то в неравенстве (19) вместо h можем поставить $h\left(\frac{s}{n}\right)$:

$$\left|R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)-1-\frac{h^2\left(\frac{s}{n}\right)}{2}\right|\leqslant 3\beta_3 h^3\left(\frac{s}{n}\right).$$

Учитывая оценки $h\left(\frac{s}{n}\right)$, можем неравенство записать в виде

$$\left|R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)-1-\frac{h^2\left(\frac{s}{n}\right)}{2}\right|\leqslant\frac{76\beta_3 h^3\left(\frac{s}{n}\right)}{n^3}. \tag{50}$$

Для $h\in Y$ имеет место неравенство

$$|R_1(h)-1|<2h^2.$$

Отсюда

$$\left|\ln R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)+1-R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j}\left(1-R_1(h)\right)^j\right|\leqslant\frac{2h^4\left(\frac{s}{n}\right)}{1-2h^2\left(\frac{s}{n}\right)}.$$

Далее

$$\left|\ln R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)-\frac{1}{2}\,h^2\left(\frac{s}{n}\right)\right|\leqslant 4\beta_3 h^3\left(\frac{s}{n}\right)$$

и

$$\left|\ln R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)-\frac{s}{n}\,h\left(\frac{s}{n}\right)+\frac{s^2}{2n^2}\right|\leqslant\left|\ln R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)-\frac{1}{2}\,h^2\left(\frac{s}{n}\right)\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{2}\,h^2\left(\frac{s}{n}\right)-\frac{s}{2n}\,h\left(\frac{s}{n}\right)\right|+\left|\frac{s^2}{2n^2}-\frac{s}{2n}\,h\left(\frac{s}{n}\right)\right|\leqslant\frac{77\beta_3 s^3}{n^3}. \tag{51}$$

Из последнего неравенства следует, что для каждого $s\in B$

$$sh\left(\frac{s}{n}\right)-n\ln R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)>\frac{s^2}{2n}-\frac{77\beta_3 s^3}{n^2}>\frac{s^2}{3n},$$

то есть

$$e^{-sh\left(\frac{s}{n}\right)}R_1^n\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)<e^{-\frac{s^2}{3n}}. \tag{52}$$

Из (34) и (47) получаем

$$\left|\sigma\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)-1\right|\leqslant\frac{27\beta_3 s}{n}. \tag{53}$$

Ввиду (22) и (48)

$$R_2\left(\frac{s}{6},\,h\left(\frac{s}{n}\right)\right)\leqslant\frac{3200\beta_3}{s^3}\exp\left\{\frac{s^2}{6n}+\frac{50\beta_3 s^3}{6n^2}\right\}. \tag{54}$$

Отсюда для каждого $s\in B$ имеет место неравенство

$$R_2\left(\frac{s}{6},\,h\left(\frac{s}{n}\right)\right)\leqslant\frac{s}{n}.$$

Сумма $R\left(\frac{s}{6},\,h\left(\frac{s}{n}\right)\right)$ интегралов $R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)$ и $R_2\left(\frac{s}{n},\,h\left(\frac{s}{n}\right)\right)$ меньше

$$1+\frac{1}{2}\,h^2\left(\frac{s}{n}\right)+3\beta_3 h^3\left(\frac{s}{n}\right)+\frac{C_3}{n}.$$

Следовательно,

$$R^n\left(\frac{s}{6},\,h\left(\frac{s}{n}\right)\right)\leqslant C_9\exp\left\{\frac{n}{2}\,h^2\left(\frac{s}{n}\right)+3\beta_3 nh^3\left(\frac{s}{n}\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_{12}\exp\left\{\frac{s^2}{2n}+\frac{86\beta_3 s^3}{n^2}\right\}. \tag{55}$$

В неравенствах (39), (43) и (45) вместо h и y, соответственно, подставляем $h\left(\frac{s}{n}\right)$ и $\frac{s}{6}$, после чего с помощью этих оценок из (24) получаем

$$|J|\leqslant\left[\frac{1096\beta_3}{n}+2\pi\exp\left\{-(1-C)\,n+\frac{n}{9}\,h^2\left(\frac{s}{n}\right)\right\}\right]\exp\left\{-sh\left(\frac{s}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+n\ln R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)\right\}+\frac{\left|\sigma\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)-1\right|}{\sigma\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)\sqrt{2\pi n}}\exp\left\{-sh\left(\frac{s}{n}\right)+n\ln R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)\right\}+$$

$$+\left[C_{10}\sqrt{n}+C_{11}n\exp\left\{-(1-C)\,n+\frac{nh\left(\frac{s}{n}\right)}{9}\right\}\right]R_2\left(\frac{s}{6},\,h\left(\frac{s}{n}\right)\right)\exp\left\{-sh\left(\frac{s}{n}\right)+\right.$$

$$+n\ln R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)\Bigg\}+\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\,e^{-\frac{s^2}{2n}}\,\Bigg|\,1-\exp\Bigg\{-sh\left(\frac{s}{n}\right)+$$

$$+\frac{s^2}{2n}+n\ln R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)\Bigg\}\Bigg|+\frac{n^2}{2}\,R_2^2\left(\frac{s}{6},\,h\left(\frac{s}{n}\right)\right)R^n\left(\frac{s}{6},\,h\left(\frac{s}{n}\right)\right)e^{-sh\left(\frac{s}{n}\right)}.$$

Далее из (51 – 55) для $s\in B$ вытекает, что

$$|J|\leqslant e^{-\frac{s^2}{3n}}\left[\frac{1096\beta_3}{n}+2\pi\exp\left\{-(1-C)\,n+\frac{nh^2\left(\frac{s}{n}\right)}{9}\right\}\right]+\frac{27\beta_3 s}{\sqrt{\pi n^3}}\,e^{-\frac{s^2}{3n}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\,\Bigg|\,n\ln R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)-sh\left(\frac{s}{n}\right)+\frac{s^2}{2n}\,\Bigg|\,\exp\Bigg\{-\frac{s^2}{2n}+\Bigg|\,n\ln R_1\left(h\left(\frac{s}{n}\right)\right)-$$

$$-sh\left(\frac{s}{n}\right)+\frac{s^2}{2n}\,\Bigg|\Bigg\}+\Bigg[C_1\sqrt{n}+C_{13}n\exp\Bigg\{-(1-C)\,n+$$

$$+\frac{nh^2\left(\frac{s}{n}\right)}{9}\Bigg\}\Bigg]\,\frac{3200\beta_3}{s^3}\,\exp\left\{-\frac{s^2}{3n}+\frac{s^2}{6n}+\frac{50\beta_3 s^3}{6n^2}\right\}+$$

$$+\frac{n^2C_{14}(3200\beta_3)^2}{2s^6}\,\exp\left\{\frac{s^2}{3n}+\frac{50\beta_3 s^3}{3n^2}+\frac{s^2}{2n}+\frac{86\beta_3 s^3}{n^2}-sh\left(\frac{s}{n}\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1096\beta_3}{n}+\frac{27\beta_3 s}{\sqrt{\pi n^3}}\right)e^{-\frac{s^2}{3n}}+2\pi\exp\left\{-(1-C)\,n+\frac{n}{9}\,\left|\,h^2\left(\frac{s}{n}\right)-\frac{s^2}{n^2}\,\right|-\frac{2s^2}{9n}\right\}+$$

$$+\frac{77\beta_3 s^3}{\sqrt{2\pi n^5}}\,\exp\left\{\frac{77\beta_3 s^3}{n^2}-\frac{s^2}{2n}\right\}+\frac{3200\beta_3\sqrt{n}}{s^3}\,\exp\left\{-\frac{s^2}{6n}+\frac{25\beta_3 s^3}{3n^2}\right\}+$$

$$+\frac{3200C_{15}\beta_3 n}{s^3}\,\exp\left\{-(1-C)\,n+\frac{25\beta_3 s^3}{3n^2}+\frac{n}{9}\,\left|\,h^2\left(\frac{s}{n}\right)-\frac{s^2}{n^2}\,\right|-\frac{s^2}{18n}\right\}+$$

$$+\frac{n^2C_{16}(3200\beta_3)^2}{2s^6}\,\exp\left\{\frac{106\beta_3 s^3}{n^2}-\frac{s^2}{6n}+\left|\,sh\left(\frac{s}{n}\right)-\frac{s^2}{n}\,\right|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1096\beta_3}{n}-\frac{27\beta_3 s}{\sqrt{\pi n^3}}\right)e^{-\frac{s^2}{3n}}+2\pi\exp\left\{-(1-C)\,n-\frac{2s^2}{9n}+\frac{130\beta_3 s^3}{9n^2}\right\}+$$

$$+\frac{77\beta_3 s^3}{\sqrt{2\pi n^5}}\,\exp\left\{-\frac{s^2}{2n}+\frac{77\beta_3 s^3}{n^2}\right\}+\frac{3200C_{17}\beta_3\sqrt{n}}{s^3}\,\exp\left\{-\frac{s^2}{6n}+\frac{25\beta_3 s^3}{3n^2}\right\}+$$

$$+\frac{3200C_{18}\beta_3 n}{s^3}\,\exp\left\{-(1-C)\,n-\frac{s^2}{18n}+\frac{255\beta_3 s^3}{9n^2}\right\}+$$

$$+\frac{C_{19}(3200\beta_3)^2n^2}{2s^6}\,\exp\left\{-\frac{s^2}{6n}+\frac{159\beta_3 s^3}{n^2}\right\}. \tag{56}$$

Нетрудно заметить, что при $s<\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}$ имеет место неравенство $s^3/n^2<C_{20}$. Кроме того, $\exp\{-(1-C)\,n\}<\frac{1}{(1-C)^3n^3}$. С помощью этих оценок неравенство (56) можем записать в более простом виде

$$|J|\leqslant\left(\frac{1096\beta_3}{n}+\frac{27\beta_3 s}{\sqrt{2\pi n^3}}\right)e^{-\frac{s^2}{18n}}+\frac{C_{21}}{n^3}\,e^{-\frac{2s^2}{9n}}+\frac{C_{36}\,s^3}{\sqrt{n^5}}\,e^{-\frac{s^2}{2n}}+$$

$$+\frac{C_{25}\sqrt{n}}{s^3}\,e^{-\frac{s^2}{6n}}+\frac{C_{24}}{ns^3}\,e^{-\frac{s^2}{18n}}+\frac{C_{26}n^2}{s^6}\,e^{-\frac{s^2}{6n}}. \tag{57}$$

Теперь оценим $|J|$ для $s \in B$.

Предположим, что $\Delta f(x) = f(x+0) - f(x)$. По определению функции $R_1(h)$ и $\bar{R}_1(h)$ непрерывные справа. Кроме того,

$$\Delta R_1(h) = -e\Delta F\left(\frac{1}{h}\right)$$

и

$$\Delta \bar{R}_1(h) = -\frac{e}{h}\Delta F\left(\frac{1}{h}\right).$$

Далее из этих равенств следует

$$\Delta m(h) = \frac{e}{h}\Delta F\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\bar{R}_1(h-0) - h - h\left(R_1(h-0) - 1\right)}{R_1(h-0)\,R_1(h+0)}.$$

Для каждого положительного $h < \frac{1}{36}$ по (26) и (30) имеют место неравенства

$$\bar{R}_1(h-0) > \frac{8}{9}h$$

и

$$h\left(R_1(h-0) - 1\right) < \frac{8}{9}h.$$

Следовательно,

$$\Delta m(h) \geqslant -4e\Delta F\left(\frac{1}{h}\right).$$

Так как $|\bar{R}_1(h)| < eh$ и $|R_1(h) - 1| < 2h^2$, то для $h < \frac{1}{36\beta_3}$ получаем $\Delta m(h) \leqslant 0$. Имеем

$$|\Delta m(h)| \leqslant 4e\Delta F\left(\frac{1}{h}\right). \tag{58}$$

Для целого числа s из интервала $\left(\psi(n)\sqrt{n};\ \sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}\right)$ выберем h_0 такое, что

$$m(h_0) < \frac{s}{n} < m(h_0 - 0). \tag{59}$$

Поскольку $h_0 < \frac{3}{2}m(h_0)$, то для $s_0 \in B$, удовлетворяющего равенство $s_0 = nm(h_0)$, имеет место неравенство

$$h_0 < \frac{3s_0}{2n} < \frac{3s}{2n}. \tag{60}$$

Далее, из (58) и (59) с помощью неравенства Чебышева, получаем

$$0 < s - s_0 < n\,|\Delta m(h_0)| < 4e\beta_3 h_0^3 n \leqslant \frac{1}{50}. \tag{61}$$

В равенстве выражение J, а также в неравенствах (39), (43) и (45) вместо h подставляем h_0 и за y выбираем $\frac{s}{6}$. С помощью этих оценок из (24) выводим, что для $s \in \bar{B}$

$$|J| \leqslant \left[\frac{1096\beta_3}{n} + 2\pi\exp\left\{-(1-C)n + \frac{nh_0}{9}\right\}\right]\exp\{-sh_0 + n\ln R_1(h_0)\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2(h_0)}}\exp\{-sh_0 + n\ln R_1(h_0)\}\left|1 - \exp\left\{-\frac{(s - nm(h_0))^2}{2n\sigma^2(h_0)}\right\}\right| +$$

$$+ \frac{|1 - \sigma(h_0)|}{\sigma(h_0)\sqrt{2\pi n}}\exp\{-sh_0 + n\ln R_1(h_0)\} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{s^2}{2n}}\left|1-\exp\left\{-sh_0+\frac{s^2}{2n}+n\ln R_1(h_0)\right\}\right|+$$

$$+R_2\left(\frac{s}{6},\ h_0\right)\left[C_{26}\sqrt{n}+C_{27}n\exp\left\{-(1-C)n+\frac{nh_0}{9}\right\}\right]\exp\{-sh_0+n\ln R_1(h_0)\}+$$

$$+\frac{n^2}{2}R_2^2\left(\frac{s}{6},\ h_0\right)R^n\left(\frac{s}{6},\ h_0\right)e^{-3h_0}. \qquad (62)$$

Из (51), (60) и (61) при $s_0\in B$

$$\left|\ln R_1(h_0)-\frac{sh_0}{n}+\frac{s}{2s^2}\right|=\left|\ln R_1(h_0)-\frac{s_0h_0}{n}+\frac{s_0^2}{2n^2}+\frac{s_0h_0}{n}-\frac{sh_0}{n}+\frac{s^2}{2n^2}-\frac{s_0^2}{2n^2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left|\ln R_1(h_0)-\frac{s_0h_0}{n}+\frac{s_0^2}{2n^2}\right|+\frac{h_0}{n}|s_0-s|+\frac{1}{2n^2}|s_0^2-s|\leqslant\frac{78\beta_3s^3}{n^2}. \qquad (63)$$

Отсюда

$$n\ln R_1(h_0)-sh_0>-\frac{9s^2}{20}. \qquad (64)$$

По выбору

$$h_0s-nm(h_0)=s-s_0.$$

Поэтому

$$\frac{(s-nm(h_0))^2}{2n\sigma^2(h_0)}=\frac{(s-s_0)^2}{2n\sigma^2(h_0)}\leqslant\frac{(27e\beta_3s^2)^2}{2n^5}<\frac{1}{10}. \qquad (65)$$

Следовательно,

$$\left|1-\exp\left\{-\frac{(s-nm(h_0))^2}{2n\sigma^2(h_0)}\right\}\right|\leqslant\frac{(s-nm(h_0))^2}{2n\sigma^2(h_0)}\exp\left\{\frac{(s-nm(h_0))^2}{2n\sigma^2(h_0)}\right\}\leqslant\frac{Cs^4}{n^5}. \qquad (66)$$

В силу (49), (54), (55) и (60)

$$R_2\left(\frac{s}{6},\ h_0\right)\leqslant\frac{3200\beta_3}{s^3}e^{-\frac{sh_0}{6}}\leqslant\frac{3200\beta_3}{s^3}e^{-\frac{s^2}{4n}}, \qquad (67)$$

$$R^n\left(\frac{s}{6},\ h_0\right)\leqslant C_{29}\exp\left\{\frac{nh_0^2}{2}+3\beta_3nh_0^3\right\}\leqslant C_{30}\exp\left\{\frac{s^2}{2n}+\frac{n}{2}\left|h_0^2-\frac{s_0^2}{n}\right|+\frac{81\beta_3s^3}{8n^2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_{31}\exp\left\{\frac{s}{2n}+\frac{86\beta_3s^3}{n^2}\right\}. \qquad (68)$$

Оценки (48), (61) и (63—68) подставляем в (62) для $s\in\bar{B}$, получаем

$$|J|\leqslant e^{-\frac{9s^2}{20}}\left[\frac{1096\beta_3}{n}+2\pi\exp\left\{-(1-C)n+\frac{nh_0}{9}\right\}+\frac{C_{33}s^6}{n^5\sqrt{\pi n}}e^{-\frac{9s^2}{20}}+\right.$$

$$+\frac{81C_{33}\beta_3s}{2n\sqrt{n}}e^{-\frac{9s^2}{20}}+\frac{C_{34}s^3}{n^3\sqrt{n}}\exp\left\{-\frac{s^2}{2n}+\frac{78\beta_3s^3}{n^2}\right\}+$$

$$+\left[C_1\sqrt{n}+C_{35}n\exp\left\{-(1-C)n+\frac{nh_0}{9}\right\}\right]\frac{3200\beta_3}{s^3}e^{-\frac{s^2}{5n}}+$$

$$+\frac{C_{36}n^2(3200\beta_3)^2}{2s^3}\exp\left\{\frac{s^2}{3n}-sh_0+\frac{86\beta_3s^3}{n^2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{1096\beta_3}{n}+\frac{C_{37}s^6}{n^5\sqrt{n}}+\frac{C_{38}s}{n\sqrt{n}}\right]e^{-\frac{9s^2}{20n}}+$$

$$+\frac{C_{39}\beta_3}{n^2}\exp\left\{\frac{n}{9}\left|h_0-\frac{s_0}{n}\right|+\frac{1}{9}|s-s_0|-\frac{s^2}{9n}\right\}+\frac{C_{40}\beta_3s^3}{n^3\sqrt{n}}e^{-\frac{s^2}{2n}}+$$

$$+\frac{C_{41}\beta_3\sqrt{n}}{s^3}e^{-\frac{s^2}{10n}}+\frac{C_{42}\beta_3}{n^2s^3}\exp\left\{\frac{n}{9}\left|h_0-\frac{s_0}{n}\right|+\frac{1}{9}|s-s_0|-\frac{4s^2}{45n}\right\}+$$

$$+\frac{C_{43}n^3}{s^6}\exp\left\{-\frac{s^2}{4n}+s\left|\frac{s_0}{n}-h_0\right|+\frac{s}{n}|s-s_0|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n}}{s^3}+\frac{1}{n^2s^3}+\frac{n^3}{s^6}\right)C_{44}e^{-\frac{s^2}{24n}}. \qquad (69)$$

Из (57) и (69) следует, что при $\psi(n)\sqrt{n}<s<\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}$

$$|J|\leqslant\left(\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n}}{s^3}+\frac{1}{ns^3}+\frac{n^3}{s^6}\right)e^{-\frac{s^2}{30n}}.$$

Следовательно,

$$I_3=\sum_{\psi(n)\sqrt{n}<s\leqslant\sqrt{3n\ln\frac{\sqrt{n}}{3200\beta_3}}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3|J|=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Полученные оценки I_1, I_2 и I_3 подставляем в (12) и получаем

$$\sum_{s>\psi(n)\sqrt{n}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3\left|P_n(s)-\frac{1}{\sqrt{n}}\bar{H}_n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right|=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Аналогично можно доказать равенство

$$\sum_{s<-\psi(n)\sqrt{n}}\left|\frac{s}{\sqrt{n}}\right|^3\left|P_n(s)-\frac{1}{\sqrt{n}}\bar{H}_n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right|=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поскольку при выполнении условий теоремы (см. [18])

$$\left|P_n(s)-\frac{1}{\sqrt{n}}\bar{H}_n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n[\psi(n)]^5},$$

то

$$\sum_{|s|\leqslant\psi(n)\sqrt{n}}\left|\frac{s}{\sqrt{n}}\right|^3\left|P_n(s)-\frac{1}{\sqrt{n}}\bar{H}_n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right|\leqslant\frac{C_{45}}{\psi(n)n}.$$

Здесь $\psi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$. Теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
15.XII.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. R. P. Agnew, Global versions of the central limit theorem, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 40 (1954), 800—804.
2. R. P. Agnew, Estimates for global central limit theorems, Ann. Math. Stat., 28 (1957), 26—42.
3. R. P. Agnew, Asymptotic expansion in global central limit theorems, Ann. Math. Stat., 30, N 3 (1959), 721—737.
4. C. G. Esseen, On mean central limit theorems, Trans. Roy. inst. technol., Stockholm, 121 (1958), 1—31.
5. Ю. В. Прохоров, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, канд. дисс., 1952.

6. Ю. П. Студнев, О сходимости в среднем к нормальному закону.
7. В. В. Петров, Об одном классе предельных теорем для независимых случайных величин, Теор. вер. и ее прим., **4**, вып. 4 (1959), 473—475.
8. В. В. Петров, Асимптотический анализ некоторых предельных теорем теорий вероятностей, Вестн. ЛГУ, № 7 (1961), 51—61.
9. В. В. Петров, О глобальной форме центральной предельной теоремы, Вестн. ЛГУ, (1965).
10. П. Сурвила, Асимптотические разложения для функций распределения нормированной суммы независимых случайных величин, Лит. мат. сб., V, 1 (1965), 142—155.
11. В. М. Золоторев, Об одной экстремальной задаче в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин, Лит. мат. сб., IV, № 3 (1964), 343—352.
12. В. М. Золоторев, Об асимптотически правильных константах в уточнениях глобальной предельной теоремы, Теор. вер. и ее прим., **9**, вып. 2 (1964), 293—302.
13. Б. А. Рогозин, Некоторые экстремальные задачи в области предельных теорем, канд. дисс., 1961.
14. М. Маматов, О локальной теореме для решетчатого случая, Изв. АН УзССР, 1 (1962), 82—84.
15. В. В. Петров, О локальных предельных теоремах для сумм независимых случайных величин, Теор. вер. и ее прим. **9**, вып. 2 (1964), 343—352.
16. C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian la, Acta Math., 77 (1945), 1—125.
17. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для больших уклонений, Теор. вер. и ее прим., **10**, вып. 2, (1965), 231—254.
18. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Н., Гостехиздат, 1949.
19. А. Бикялис, Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме, Лит. мат. сб., VI, 3 (1966).
20. С. Х. Сираждинов, М. Маматов. О глобальных предельных теоремах для плотностей и функции распределений, Пред. теорем., Ташкент, 1963, 91—107.

RIBINĖS TEOREMOS ERDVĖS L_1 IR l_1 METRIKOJE

A. BIKELIS, H. JASIŪNAS

(Reziumė)

Nagrinėjame nepriklausomą vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seką $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. $\bar{F}_n(x)$ — sumos S_n pasiskirstymo funkcija.

1 teorema. *Jeigu* ξ_1 *yra nerėtinis atsitiktinis dydis ir turi baigtinį trečios eilės momentą* β_3, *tai*

$$\| x^2 [\bar{F}_n(x) - \bar{H}_n(x)] \| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Čia $\|f\|$ — erdvės L_1 norma.

2 teorema. *Jeigu* ξ_1 *įgyja reikšmes* 0, ± 1, $\pm 2, \ldots$ *su maksimaliu pasiskirstymo žingsniu lygiu vienam ir turi baigtinį trečią momentą, tai*

$$\left\| \left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3 \left[P_n(s) - \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{H}_n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right] \right\| = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Čia $\|y\|$ — erdvės l_1 norma.

LIMIT THEOREMS IN THE METRIC SPACES L_1 AND l_1

A. BIKELIS, H. JASIŪNAS

(Summary)

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be a sequence of independent and equally distributed random variables. Let $\bar{F}_n(x)$ be the distribution function of S_n.

It is proved.

Theorem 1. *If ξ_1 is a nonlattice random variable with a finite thivd absolute moment β_3, then*

$$\| x^3 [\bar{F}_n(x) - H_n(x)] \| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Here $\|f\|$ is the norm of the space L_1.

Theorem 2. *If ξ_1 assumes the values $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ with a maximal distribution step 1 and ξ_1 possess finite absolute moment β_3, then*

$$\left\| \left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3 \left[P_n(s) - \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{H}_n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right] \right\| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Here $\|y\|$ is the norm of the space l_1.