LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК–519.21

О МНОГОМЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

А. БИКЯЛИС

Введение

Обозначим: $\mathbf{t}=(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ – векторы k-мерного евклидово пространства R_k; $|\mathbf{x}|$, $|\mathbf{t}|$ – их нормы; $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ – скалярное произведение; $\mathbf{0}$ – нулевой вектор.

Положим $f(\mathbf{t})$ и $F(\mathbf{x})$ – соответственно, характеристическая функция и функция распределения случайного вектора $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ с ковариационной матрицей V. Определитель матрицы V обозначим через Δ. $Q(\mathbf{t})$ – квадратическая форма, соответствующая V. $\alpha_r(\mathbf{t})=M[(\xi, \mathbf{t})^r]$ и $\beta_r(\mathbf{t})=M|(\xi, \mathbf{t})|^r$ – момент и абсолютный момент случайной величины $(\xi, \mathbf{t})$. Пусть $\beta_j^{(r)}=M|\xi_j|^r$ и $\sigma_j^2=M(\xi_j-M\xi_j)^2$.

В случае $\sigma_j>0$, $j=1, 2, \ldots, k$, рассмотрим случайный вектор

$$\frac{\xi}{\sigma}=\left(\frac{\xi_1}{\sigma_1}, \frac{\xi_2}{\sigma_2}, \ldots, \frac{\xi_k}{\sigma_k}\right)$$

с характеристической функцией

$$f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)=f\left(\frac{t_1}{\sigma_1}, \frac{t_2}{\sigma_2}, \ldots, \frac{t_k}{\sigma_k}\right).$$

Через $\frac{\mathbf{t}}{\sigma}$ обозначим k-мерный вектор $\left(\frac{t_1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{t_k}{\sigma_k}\right)$.

Не ограничит общности полученных результатов, но значительно упростит их доказательства, если положим, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ имеют равные нулю математические ожидания.

Настоящая работа посвящена изучению остаточного члена в асимптотическом разложении для характеристической функции $f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)$. Хорошо известно, что

$$f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)=e^{-\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})}\left(1+\sum_{j=1}^{s-3}P_j(i\mathbf{t})\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\right)+R_n(\mathbf{t}), \tag{1}$$

когда случайный вектор ξ имеет конечные моменты s-того порядка ($s\geqslant 3$). Многочлены $P_j(i\mathbf{t})$ определены равенством (9).

Оценка остаточного члена $R_n(\mathbf{t})$ впервые получена Гсу в [1]. Для этого, кроме существования моментов s-того порядка, он потребовал, чтобы ковариационная матрица V была невырожденной. Им показано, что

$$|R_n(\mathbf{t})|\leqslant\frac{\Theta_{sk}}{n^{\frac{s-2}{2}}}\left\{\sum_{\nu=1}^{k}[\beta_\nu^{(s)}]^{\frac{3(s-2)}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times(|t_\nu|^s+|t_\nu|^{s+1}+\cdots+|t_\nu|^{3(s-2)})\right\}e^{-\frac{\Delta|\mathbf{t}|^2}{4k^{k-1}}} \tag{2}$$

для $|t_\nu| \leqslant (b_{sk}\Delta \sqrt{n})/[\beta_\nu^{(s)}]^{\frac{3}{s}}$, $\nu=1, 2, \ldots, k$. Здесь $\sigma_j^2=1$, $j=1, 2, \ldots, k$, а Θ_{sk} и b_{sk} зависят только от k и s. По вычислениям нетрудно заметить, что $\Theta_{sk}\to\infty$ и $b_{sk}\to 0$ при $k\to\infty$.

Надо заметить, что оценки $R_n(\mathbf{t})$ (как правило без доказательств), приведенные другими авторами, по существу не лучше (2).

Результат Гсу теряет смысл в двух ситуациях: когда $\Delta\to 0$ или $k\to\infty$. Здесь мы получили (теорема 1) оценку остаточного члена не требуя, чтобы было $\Delta>0$:

$$|R_n(\mathbf{t})| \leqslant \left(\frac{2}{0.99}\right)^{s-1} \frac{M|(\xi, \mathbf{t})|^s}{n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})}$$

при

$$\left[\frac{M|(\xi, \mathbf{t})|^s}{Q(\mathbf{t})}\right]^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}.$$

Кроме того получена оценка остаточного члена в асимптотических разложениях для частных производных функции $f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)$ (теорема 2).

Одномерные аналоги полученных здесь неравенств можно найти в работе автора [2].

§ 1. Леммы

Сперва докажем несколько лемм. Большинство из них будет использовано в доказательствах теорем 1 и 2, а некоторые в доказательствах предельных теорем для плотностей и функций распределений, сформулированных в [3].

Лемма 1. *Пусть $h(\mathbf{t})=h(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ — некоторая s-раз дифференцируемая функция, тогда*

$$d^s \ln h(\mathbf{t}) = \frac{1}{h(\mathbf{t})} d^s h(\mathbf{t}) +$$

$$+\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j_i=i}^{s-1}\sum_{j_{i-1}=i-1}^{j_i-1}\ldots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}\frac{(-1)^i(s-1)!}{(s-j_i)!\,(j_i-j_{i-1})!\ldots(j_2-j_1)!\,(j_1-1)!}\times$$

$$\times\frac{d^{s-j_i}h(\mathbf{t})\,d^{j_i-j_{i-1}}h(\mathbf{t})\ldots d^{j_2-j_1}h(\mathbf{t})\,d^{j_1}h(\mathbf{t})}{[h(\mathbf{t})]^{i+1}}. \qquad (3)$$

Здесь $d^\nu h(t)$ — дифференциал ν-того порядка функции $h(\mathbf{t})$.

Для сокращения записи положим

$$\sum{}^{*}\frac{(-1)^i(s-1)!}{(s-j_i)!\,(j_i-j_{i-1})!\ldots(j_2-j_1)!\,(j_1-1)!}\times$$

$$\times\frac{d^{s-j_i}h(\mathbf{t})\,d^{j_i-j_{i-1}}h(\mathbf{t})\ldots d^{j_2-j_1}h(\mathbf{t})\,d^{j_1}h(\mathbf{t})}{[h(\mathbf{t})]^{i+1}}=$$

$$=\sum_{j_i=i}^{s-1}\sum_{j_{i-1}=i-1}^{j_i-1}\ldots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}\frac{(-1)^i(s-1)!}{(s-j_i)!\,(j_i-j_{i-1})!\ldots(j_2-j_1)!\,(j_1-1)!}\times$$

$$\times\frac{d^{s-j_i}h(\mathbf{t})\,d^{j_i-j_{i-1}}h(\mathbf{t})\ldots d^{j_2-j_1}h(\mathbf{t})\,d^{j_1}h(\mathbf{t})}{[h(\mathbf{t})]^{i+1}}.$$

Лемма 2. *При выполнении условий леммы 1 имеет место равенство*

$$\frac{1}{h(\mathbf{t})}\, d^s h(\mathbf{t}) = d^s \varkappa(\mathbf{t}) +$$
$$+\sum_{i=1}^{s-1} \sum\nolimits^{*} \frac{(s-1)!\, d^{s-j_i}\varkappa(\mathbf{t})\, d^{j_i-j_{i-1}}\varkappa(\mathbf{t}) \ldots d^{j_2-j_1}\varkappa(\mathbf{t})\, d^{j_1}\varkappa(\mathbf{t})}{j_i j_{i-1} \ldots j_2 j_1 (s-j_i-1)!\,(j_i-j_{i-1}-1)! \ldots (j_2-j_1-1)!\,(j_1-1)!},$$

где $\varkappa(\mathbf{t}) = \ln h(\mathbf{t})$.

Леммы доказываются методом математической индукции. Их одномерные аналоги доказаны в работе [2].

С помощью равенства (3) семиинвариант $\varkappa_s(\omega)$ s-того порядка случайной величины $(\xi, \omega) = \xi_1\omega_1 + \xi_2\omega_2 + \cdots + \xi_k\omega_k$ можем выразить через моменты $\alpha_1(\omega)$, $\alpha_2(\omega)$, $\ldots$, $\alpha_s(\omega)$. Для этого в равенстве (3) вместо $h(\mathbf{t})$ надо поставить характеристическую функцию $f(\mathbf{t})$ и дифференциалы dt_1, dt_2, $\ldots$, dt_k заменить, соответственно, на ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_k. При $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ получим

$$\varkappa_s(\omega) = \alpha_s(\omega) + \sum_{i=1}^{s-1} \sum\nolimits^{*} \frac{(-1)^i (s-1)!\, \alpha_{s-j_i}(\omega)\, \alpha_{j_i-j_{i-1}}(\omega) \ldots \alpha_{j_2-j_1}(\omega)\, \alpha_{j_1}(\omega)}{(s-j_i)!\,(j_i-j_{i-1})! \ldots (j_2-j_1)!\,(j_1-1)!}.$$

Обозначим

$$\alpha_{(r;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)} = \frac{1}{i^r} \left.\frac{\partial^r f(\mathbf{t})}{\partial t_1^{\nu_1} \partial t_2^{\nu_2} \ldots \partial t_k^{\nu_k}}\right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}$$

и

$$\varkappa_{(r;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)} = \frac{1}{i^r} \left.\frac{\partial^r \ln f(\mathbf{t})}{\partial t_1^{\nu_1} \partial t_2^{\nu_2} \ldots \partial t_k^{\nu_k}}\right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}.$$

Момент $\alpha_{(r;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)}$ и семиинвариант $\varkappa_{(r;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)}$ „порядка" $(r;\ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ $r = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k$ случайного вектора ξ можем получить с помощью равенств:

$$\alpha_{(r;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)} = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r \alpha_r(\omega)}{\partial\omega_1^{\nu_1} \partial\omega_2^{\nu_2} \ldots \partial\omega_k^{\nu_k}}$$

и

$$\varkappa_{(r;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)} = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r \varkappa_r(\omega)}{\partial\omega_1^{\nu_1} \partial\omega_2^{\nu_2} \ldots \partial\omega_k^{\nu_k}}.$$

Кроме того

$$\frac{\partial^m \alpha_r(\omega)}{\partial t_l^m} = r(r-1)\ldots(r-m+1) \int_{R_k} (\mathbf{x}, \omega)^{r-m} x_l^m\, dF(\mathbf{x}) =$$
$$= r(r-1)\ldots(r-m+1)\, M[(\xi, \omega)^{r-m} \xi_l^m]. \tag{4}$$

В дифференциалах $d^r f(\mathbf{t})$ и $d^r \ln f(\mathbf{t})$ dt_1, dt_2, $\ldots$, dt_k заменим на ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_k и новые выражения обозначим, соответственно, через $\Delta_\omega^r f(\mathbf{t}$ и $\Delta_\omega^r \ln f(\mathbf{t})$, где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$. Например,

$$\Delta_\omega^r f(\mathbf{t}) = i^r \int_{R_k} (\mathbf{x}, \omega)^r e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{t})}\, dF(\mathbf{x}).$$

Очевидно

$$|\Delta_\omega^r f(\mathbf{t})| \leqslant M|(\xi, \mathbf{t})|^r.$$

Лемма 3. *Если вектор ξ имеет конечные моменты s-того порядка, то*

$$|\Delta_\omega^s \ln f(\mathbf{t})| \leqslant \frac{(s-1)!\, 2^{s-1} M|(\xi, \omega)|^s}{|f(\mathbf{t})|^s}.$$

Следствие.

$$|\varkappa_s(\omega)| \leqslant (s-1)!\, 2^{s-1} \beta_s(\omega).$$

Лемма 4. *Если случайный вектор* ξ *имеет нулевой вектор математических ожиданий и конечные моменты* s*-того порядка, то*

$$|\varkappa_s(\omega)| \leqslant (s-1)!\, \beta_s(\omega). \tag{5}$$

Лемма 4 доказана в [2], а утверждение леммы 3 немедленно следует из равенства (3). Только надо заметить, что

$$[\beta_r(\omega)]^{s-\nu} \leqslant [\beta_s(\omega)]^{r-\nu} [\beta_\nu(\omega)]^{s-r} \tag{6}$$

при $0 \leqslant \nu \leqslant r \leqslant s$ (см. [4]).

Лемма 5. *При* $m \leqslant r$ *имеем*

$$\left| \frac{\partial^m \alpha_r(\omega)}{\partial t_l^m} \right| \leqslant r(r-1)\ldots(r-m+1)[\beta_r(\omega)]^{\frac{r-m}{r}} [\beta_l^{(m)}]^{\frac{m}{r}}$$

и

$$\left| \frac{\partial^m \alpha_r(\omega)}{\partial t_l^m} \right| \leqslant r(r-1)\ldots(r-m+1)|\omega|^{r-m} M|\xi|^r, \qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Утверждения леммы 5 следуют из (4) и (6).

Лемма 6. *При* $m=1,\ 2,\ \ldots$ *имеем*

$$\left| \frac{\partial^m \varkappa_r(\omega)}{\partial \omega_l^m} \right| \leqslant r^m (r-1)!\, [\beta_r(\omega)]^{\frac{r-m}{r}} [\beta_l^{(m)}]^{\frac{m}{r}} \tag{7}$$

и

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial \omega_l^m} \Delta_\omega^r \ln f(\mathbf{t}) \right| \leqslant r^m (r-1)!\, 2^r \frac{[\beta_r(\omega)]^{\frac{r-m}{r}} [\beta_l^{(m)}]^{\frac{m}{r}}}{|f(\mathbf{t})|^r}, \quad l=1,\ 2,\ldots,\ k. \tag{8}$$

Доказательство леммы 6. Очевидно

$$f(\mathbf{t})\, d^r \ln f(\mathbf{t}) = d^r f(\mathbf{t}) - \sum_{\nu=1}^{r-1} \binom{r-1}{\nu} d^\nu f(\mathbf{t})\, d^{r-\nu} \ln f(\mathbf{t}).$$

Здесь дифференциалы $dt_1,\ dt_2,\ \ldots,\ dt_k$ заменяем, соответственно на $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots$ $\ldots,\ \omega_k$ и при $\mathbf{t}=\mathbf{0}$ получаем

$$\varkappa_r(\omega) = \alpha_r(\omega) - \sum_{\nu=2}^{r-2} \binom{r-1}{\nu} \alpha_\nu(\omega)\, \varkappa_{r-\nu}(\omega).$$

Заметим, что $\alpha_1(\omega) = \varkappa_1(\omega) = 0$. Далее, для всех l

$$\frac{\partial^m \varkappa_r(\omega)}{\partial \omega_l^m} = \frac{\partial^m \alpha_r(\omega)}{\partial \omega_l^m} -$$

$$- \sum_{\nu=2}^{r-2} \binom{r-1}{\nu} \sum_{\substack{p=0 \\ \nu-r+m \leqslant p \leqslant \nu}}^{m} \binom{m}{p} \frac{\partial^p \alpha_\nu(\omega)}{\partial \omega_l^p} \cdot \frac{\partial^{m-p} \varkappa_{r-\nu}(\omega)}{\partial \omega_l^{r-p}}.$$

Справедливость неравенства (7) покажем методом математической индукции. Легко проверить, что оно имеет место для всех целых $m \leqslant r$ и $r=1,\ 2,\ 3$. Положим, что (7) верно для всех $m \leqslant \nu \leqslant r-1$ и покажем, что имеет место для всех $m \leqslant r$.

В силу леммы 5

$$\left|\frac{\partial^m \varkappa_r(\omega)}{\partial \omega_l^m}\right| \leqslant r(r-1)\ldots(r-m+1)\,[\beta_r(\omega)]^{\frac{r-m}{r}}\,[\beta_l^{(r)}]^{\frac{m}{r}} + \sum_{\nu=2}^{r-2}\sum_{p=0}^{m} \times$$

$$\times \frac{(r-1)!\,m!\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-p+1)\,[\beta_\nu(\omega)]^{\frac{\nu-p}{\nu}}\,[\beta_l^{(\nu)}]^{\frac{p}{\nu}}\,(r-\nu)^{m-p}\,[\beta_{r-\nu}(\omega)]^{\frac{r-\nu-m+p}{r-\nu}}\cdot[\beta_l^{(r-\nu)}]^{\frac{m-p}{r-\nu}}}{\nu!\,(m-p)!\,p!} \leqslant$$

$$\leqslant r(r-1)^{m-1}\,[\beta_r(\omega)]^{\frac{r-m}{r}}\,[\beta_l^{(r)}]^{\frac{m}{r}} +$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{r-2}\ \sum_{\substack{p=0\\ \nu-r+m\leqslant p\leqslant\nu}}^{m} \frac{(r-1)!\,m!\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-p+1)\,(r-\nu)^{m-p}\,[\beta_r(\omega)]^{\frac{\nu-m}{r}}\,[\beta_l^{(r)}]^{\frac{m}{r}}}{\nu!\,(m-p)!\,p!} \leqslant$$

$$\leqslant (r-1)!\,r^m\,[\beta_r(\omega)]^{\frac{r-m}{r}}\,[\beta_l^{(r)}]^{\frac{m}{r}}\left(\frac{1}{(r-1)(r-1)!} + \sum_{\nu=2}^{r-2}\frac{1}{\nu!}\right) \leqslant$$

$$\leqslant r^m(r-1)!\,[\beta_r(\omega)]^{\frac{r-m}{r}}\,[\beta_l^{(r)}]^{\frac{m}{r}}.$$

Неравенство (8) выводится без особых изменений.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 7. *Имеем*

$$\left|\frac{\partial^m \varkappa_r(\omega)}{\partial \omega_l^m}\right| \leqslant r^m(r-1)!\,|\omega|^{r-m}\,M|\xi|^r$$

и

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial \omega_l^m}\,\Delta_\omega^r \ln f(\mathbf{t})\right| \leqslant r^m(r-1)!\,2^r\,\frac{|\omega|^{r-m}\,M|\xi|^{(r)}}{|f(\mathbf{t})|^{(r)}}$$

для $l=1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Формальным равенством

$$\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varkappa_{\nu+2}(\omega)}{(\nu+2)!}\,u^\nu\right\} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} P_r(\omega)\,u^r$$

определим многочлены $P_r(\omega)$. С помощью леммы 2 их можно выразить через семиинварианты:

$$P_r(\omega) = \frac{\varkappa_{r+2}(\omega)}{(r+2)!} + \sum_{l=1}^{r-1}\sum{}^{*} \times$$

$$\times \frac{(r-j_l)(j_l-j_{l-1})\ldots(j_2-j_1)\,\varkappa_{r-j_l+2}(\omega)\,\varkappa_{j_l-j_{l-1}+2}(\omega)\ldots\varkappa_{j_2-j_1+2}(\omega)\,\varkappa_{j_1+2}(\omega)}{r j_l j_{l-1}\ldots j_2 j_1\,(r-j_l+2)!\,(j_l-j_{l-1}+2)!\ldots(j_2-j_1+2)!\,(j_1+2)!}. \quad (9)$$

Лемма 8. *При* $r \leqslant s-2$ *имеем*

$$|P_r(\omega)| \leqslant 2^r\left[\frac{\beta_s(\omega)}{Q(\omega)}\right]^{\frac{r}{s-2}}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{[Q(\omega)]^\nu}{4^\nu\,\nu!}.$$

Доказательство леммы 8. Лемму докажем методом математической индукции. По определению

$$P_1(\omega) = \frac{1}{6}\,\varkappa_3(\omega)$$

и

$$P_2(\omega) = \frac{1}{24}\,\varkappa_4(\omega) + \frac{1}{72}\,[\varkappa_3(\omega)]^2.$$

Отсюда и (6) вытекает

$$|P_1(\omega)| \leqslant \frac{1}{6}\, [\beta_s(\omega)]^{\frac{1}{s-2}}\, [Q(\omega)]^{\frac{s-3}{s-2}}$$

и

$$|P_2(\omega)| \leqslant \left[\frac{\beta_s(\omega)}{Q(\omega)}\right]^{\frac{2}{s-2}} \left[\frac{1}{6}\, Q(\omega) + \frac{1}{72}\, [Q(\omega)]^2\right].$$

Следовательно, лемма верна для $r=1$, 2. Положим теперь, что она справедлива для всех $r \leqslant s-2$.

Нетрудно показать, что

$$P_{s-2}(\omega) = \frac{1}{s!}\, \varkappa_s(\omega) + \sum_{r=1}^{s-3} \frac{(s-r-2)\,\varkappa_{s-r}(\omega)}{(s-2)\,(s-r)!}\, P_r(\omega). \tag{10}$$

Здесь

$$\varkappa_3(\omega) = \alpha_3(\omega),$$
$$\varkappa_4(\omega) = \alpha_4(\omega) - 3\,[\alpha_2(\omega)]^2,$$
$$\varkappa_5(\omega) = \alpha_5(\omega) - 10\alpha_3(\omega)\,\alpha_2(\omega),$$
$$\varkappa_6(\omega) = \alpha_6(\omega) - 15\alpha_4(\omega)\,\alpha_2(\omega) - 10\,[\alpha_3(\omega)]^2 + 30\,[\alpha_2(\omega)]^3,$$
$$\varkappa_7(\omega) = \alpha_7(\omega) - 21\alpha_5(\omega)\,\alpha_2(\omega) - 35\alpha_4(\omega)\,\alpha_3(\omega) + 210\alpha_3(\omega)\,[\alpha_2(\omega)]^2.$$

Очевидно,

$$|\varkappa_3(\omega)| \leqslant \beta_3(\omega),\quad |\varkappa_4(\omega)| \leqslant 4\beta_4(\omega),\quad |\varkappa_5(\omega)| \leqslant 11\beta_5(\omega),\quad |\varkappa_6(\omega)| \leqslant 56\,\beta_6(\omega$$

и

$$|\varkappa_7(\omega)| \leqslant 267\,\beta_7(\omega).$$

В равенстве (10) используем оценки (5) и (6) и получаем

$$|P_{s-2}(\omega)| \leqslant \frac{\beta_s(\omega)}{s} + \frac{\beta_3(\omega)}{6\,(s-2)}\, |P_{s-3}(\omega)| + \frac{\beta_4(\omega)}{3\,(s-2)}\, |P_{s-4}(\omega)| +$$
$$+ \frac{33\beta_5(\omega)}{5!\,(s-2)}\, |P_{s-5}(\omega)| + \frac{224\beta_6(\omega)}{6!\,(s-2)}\, |P_{s-6}(\omega)| + \frac{1335\beta_7(\omega)}{7!\,(s-2)}\, |P_{s-7}(\omega)| +$$
$$+ \sum_{r=1}^{s-8} \frac{(s-r-2)\,\beta_{s-r}(\omega)}{(s-2)\,(s-r)}\, |P_r(\omega)| \leqslant \frac{\beta_s(\omega)}{s} +$$
$$+ \frac{[\beta_s(\omega)]^{\frac{1}{s-2}}\, [Q(\omega)]^{\frac{s-3}{s-2}}}{6\,(s-2)}\, 2^{s-3} \left[\frac{\beta_s(\omega)}{Q(\omega)}\right]^{\frac{s-3}{s-2}} \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{[Q(\omega)]^\nu}{4^\nu\,\nu!} +$$
$$+ \frac{[\beta_s(\omega)]^{\frac{2}{s-2}}\, [Q(\omega)]^{\frac{s-4}{s-2}}}{3\,(s-2)}\, 2^{s-4} \left[\frac{\beta_s(\omega)}{Q(\omega)}\right]^{\frac{s-4}{s-2}} \sum_{\nu=1}^{s-4} \frac{[Q(\omega)]^\nu}{4^\nu\,\nu!} +$$
$$+ \frac{33\,[\beta_s(\omega)]^{\frac{3}{s-2}}\, [Q(\omega)]^{\frac{s-5}{s-2}}}{5!\,(s-2)}\, 2^{s-5} \left[\frac{\beta_s(\omega)}{Q(\omega)}\right]^{\frac{s-5}{s-2}} \sum_{\nu=1}^{s-5} \frac{[Q(\omega)]^\nu}{4^\nu\,\nu!} +$$
$$+ \frac{7\,[\beta_s(\omega)]^{\frac{4}{s-2}}\, [Q(\omega)]^{\frac{s-6}{s-2}}}{30\,(s-2)}\, 2^{s-6} \left[\frac{\beta_s(\omega)}{Q(\omega)}\right]^{\frac{s-6}{s-2}} \sum_{\nu=1}^{s-6} \frac{[Q(\omega)]^\nu}{4^\nu\,\nu!} +$$
$$+ \frac{1335\,[\beta_s(\omega)]^{\frac{5}{s-2}}\, [Q(\omega)]^{\frac{s-7}{s-2}}}{7!\,(s-2)}\, 2^{s-7} \left[\frac{\beta_s(\omega)}{Q(\omega)}\right]^{\frac{s-7}{s-2}} \sum_{\nu=1}^{s-7} \frac{[Q(\omega)]^\nu}{4^\nu\,\nu!} +$$

$$+\sum_{r=1}^{s-8}\frac{(s-r-2)\,[\beta_s(\omega)]^{\frac{s-r-2}{s-2}}\,[Q(\omega)]^{\frac{r}{s-2}}}{(s-2)(s-r)}\,2^r\left[\frac{\beta_s(\omega)}{Q(\omega)}\right]^{\frac{r}{s-2}}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{[Q(\omega)]^\nu}{4^\nu\nu!}=$$

$$=\frac{2^{s-2}\beta_s(\omega)}{Q(\omega)}\left\{\frac{Q(\omega)}{s2^{s-2}}+\frac{1}{3(s-2)}\,\frac{[Q(\omega)]^{s-2}}{4^{s-2}(s-3)!}+\frac{2}{3(s-2)}\,\frac{[Q(\omega)]^{s-3}}{4^{s-3}(s-4)!}+\right.$$

$$+\frac{193}{240(s-2)}\,\frac{[Q(\omega)]^{s-4}}{4^{s-4}(s-5)!}+\frac{7}{120(s-2)}\,\frac{[Q(\omega)]^{s-5}}{4^{s-5}(s-6)!}+\frac{1335}{8!(s-2)}\,\frac{[Q(\omega)]^{s-6}}{4^{s-6}(s-7)!}+$$

$$\left.+\sum_{\nu=2}^{s-7}\frac{[Q(\omega)]^\nu}{4^\nu(\nu-1)!(s-2)}\left(\frac{193}{240}+\frac{7}{120}+\frac{1335}{8!}+\sum_{r=\nu-1}^{s-8}\frac{s-r-2}{s-r}\,2^{r+4-s}\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{s-2}\beta_s(\omega)}{Q(\omega)}\left\{\frac{Q(\omega)}{s2^{s-2}}+\frac{[Q(\omega)]^{s-2}}{4^{s-2}(s-2)!}+\frac{[Q(\omega)]^{s-3}}{4^{s-3}(s-3)!}+\right.$$

$$\left.+\frac{[Q(\omega)]^{s-4}}{4^{s-4}(s-4)!}+\sum_{\nu=2}^{s-5}\frac{[Q(\omega)]^\nu}{4^\nu\nu!}\right\}\leqslant 2^{s-2}\,\frac{\beta_s(\omega)}{Q(\omega)}\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{[Q(\omega)]^\nu}{4^\nu\nu!}.$$

Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Имеем*

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\omega_m^r}P_\nu(\omega)\right|\leqslant r!\,(\nu+2)^{r-2}\,2^{\nu-1}\,|\omega|^{\nu+2-r}M\,|\xi|^{\nu+2}\sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{|\omega|^{2i}(M|\xi|^2)^i}{i!}\qquad(11)$$

для $m=1,\,2,\,\ldots,\,k$.

Доказательство леммы 9. Очевидно

$$\frac{\partial^r}{\partial\omega_m^r}P_\nu(\omega)=\frac{1}{(\nu+2)!}\,\frac{\partial^r\varkappa_{\nu+2}(\omega)}{\partial\omega_m^r}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\nu-1}\sum{}^{*}\frac{(\nu-j_i)(j_i-j_{i-1})\ldots(j_2-j_1)}{\nu j_i\ldots j_1(\nu-j_i+2)!\,(j_i-j_{i-1}+2)!\ldots(j_2-j_1+2)!\,(j_1+2)!}\times$$

$$\times\frac{\partial^r}{\partial\omega_m^r}\left[\varkappa_{\nu-j_i+2}(\omega)\,\varkappa_{j_i-j_{i-1}+2}(\omega)\ldots\varkappa_{j_2-j_1+2}(\omega)\,\varkappa_{j_1+2}(\omega)\right].$$

Здесь

$$I=\frac{\partial^r}{\partial\omega_m^r}\left[\varkappa_{\nu-j_i+2}(\omega)\,\varkappa_{j_i-j_{i-1}+2}(\omega)\ldots\varkappa_{j_2-j_1+2}(\omega)\,\varkappa_{j_1+2}(\omega)\right]=$$

$$=\sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{i+1}=r}\frac{r!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_{i+1}!}\,\frac{\partial^{\nu_1}\varkappa_{\nu-j_i+2}(\omega)}{\partial\omega_m^{\nu_1}}\,\frac{\partial^{\nu_2}\varkappa_{j_i-j_{i-1}+2}(\omega)}{\partial\omega_m^{\nu_2}}\cdots$$

$$\cdots\frac{\partial^{\nu_i}\varkappa_{j_2-j_1+2}(\omega)}{\partial\omega_m^{\nu_i}}\,\frac{\partial^{\nu_{i+1}}\varkappa_{j_1+2}(\omega)}{\partial\omega_m^{\nu_{i+1}}}.$$

В силу леммы 7

$$|I|\leqslant\sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{i+1}=r}\times$$

$$\times\frac{r!\,(\nu-j_i+2)^{\nu_1}(j_i-j_{i-1}+2)^{\nu_2}\ldots(j_2-j_1+2)^{\nu_i}(j_1+2)^{\nu_{i+1}}(\nu-j_i+2)!\,(j_i-j_{i-1})+2)!\ldots\ldots(j_2-j_1+2)!\,(j_1+2)!\,|\omega|^{\nu+2(i+1)-r}M\,|\xi|^{\nu+2}(M|\xi|^2)^i}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_{i+1}!}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\omega_m^r}P_\nu(\omega)\right|\leqslant(\nu+2)^{r-1}|\omega|^{\nu-r+2}M|\xi|^{\nu+2}+\sum_{i=1}^{\nu-1}\sum\nolimits^*\sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{i+1}=r}\times$$

$$(\nu-j_i)(j_i-j_{i-1})\dots(j_2-j_1)\,r!\,(\nu-j_i+2)^{\nu_1-1}(j_i-j_{i-1}+2)^{\nu_2-1}\dots$$

$$\times\frac{\dots(j_2-j_1+2)^{\nu_i-1}(j_1+2)^{\nu_{i+1}-1}|\omega|^{\nu+2(i+1)-r}M|\xi|^{\nu+2}(M|\xi|^2)^i}{\nu j_i\dots j_2j_1\nu_1!\,\nu_2!\dots\nu_{i+1}!}\leqslant$$

$$\leqslant(\nu+2)^{2r}r!\,|\omega|^{\nu+2-r}M|\xi|^{\nu+2}\left\{\frac{1}{(\nu+2)^r}+\sum_{i=1}^{\nu-1}\frac{|\omega|^{2i}(M|\xi|^2)^i}{i!}\sum\nolimits^*1\right\}.$$

В [2] показано, что

$$\sum\nolimits^*1=\sum_{j_i=i}^{\nu-1}\;\sum_{j_{i-1}=i-1}^{j_i-1}\dots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}1\leqslant2^{\nu-1}. \qquad (12)$$

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Для*

$$|\mathbf{t}|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{M|\xi|^2}{M|\xi|^s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$$

имеем

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\sum_{\nu=2}^{s-1}\frac{\varkappa_\nu(i\mathbf{t})}{\nu!\,n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right|\leqslant(s-1)^rM|\xi|^2|\mathbf{t}|^{2-r},\qquad m=1,\ 2,\ \dots,\ k. \qquad (13)$$

Доказательство леммы 10. Пусть $2\leqslant r\leqslant s-1$. В силу леммы 7

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\sum_{\nu=2}^{s-1}\frac{\varkappa_\nu(i\mathbf{t})}{\nu!\,n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right|=\left|\sum_{\nu=r}^{s-1}\frac{1}{\nu!\,n^{\frac{\nu-2}{2}}}\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\varkappa_\nu(i\mathbf{t})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu=r}^{s-1}\frac{\nu^r(\nu-1)!\,M|\xi|^\nu|\mathbf{t}|^{\nu-r}}{\nu!\,n^{\frac{\nu-2}{2}}}\leqslant\sum_{\nu=r}^{s-1}\frac{\nu^{r-1}|\mathbf{t}|^{\nu-r}(M|\xi|^s)^{\frac{\nu-2}{s-2}}(M|\xi|^2)^{\frac{\nu-2}{s-2}}}{n^{\frac{\nu-2}{2}}}=$$

$$=M|\xi|^2|\mathbf{t}|^{2-r}\sum_{\nu=r}^{s-1}\nu^{r-1}\left(\frac{|\mathbf{t}|}{\sqrt{n}}\left(\frac{M|\xi|^s}{M|\xi|^2}\right)^{\frac{1}{s-2}}\right)^{\nu-2}\leqslant(s-1)^rM|\xi|^2|\mathbf{t}|^{2-r}.$$

В случае $r=1$ лемма доказывается аналогично. При $r=s,\ s+1,\ \dots$ оценка (13) тривиальна, поскольку

$$\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\sum_{\nu=2}^{s-1}\frac{\varkappa_\nu(i\mathbf{t})}{\nu!\,n^{\frac{\nu-2}{2}}}=0.$$

Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Если случайный вектор ξ имеет конечные моменты s-того порядка ($s\geqslant3$), то для* $|\mathbf{t}|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{M|\xi|^2}{M|\xi|^s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\ln f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right|\leqslant s^{r-1}2^{\frac{3s}{2}}M|\xi|^2|\mathbf{t}|^{2-r},$$

где $r\leqslant s$, а $m=1,\ 2,\ \dots,\ k$.

Доказательство леммы 11. Сперва покажем, что для всех $\mathbf{t}$, удовлетворяющих неравенство $|\mathbf{t}| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{10} \frac{M|\xi|^2}{M|\xi|^3}$

$$\left| f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right| \geqslant 0.99.$$

Очевидно,

$$f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{2n} \int\limits_{R_k} (\mathbf{x},\ \mathbf{t})^2 e^{i\Theta \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{t})}{\sqrt{n}}} dF(\mathbf{x}), \qquad 0 < \Theta < 1. \tag{14}$$

Следовательно,

$$\left| f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right| \geqslant 1 - \frac{Q(\mathbf{t})}{2n} \geqslant 1 - \frac{(M|\xi|^2)^3}{100(M|\xi|^3)^2} \geqslant 0.99.$$

Нетрудно заметить, что

$$\left\{ \mathbf{t} : |\mathbf{t}| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{10} \left(\frac{M|\xi|^2}{M|\xi|^s}\right)^{\frac{1}{s-2}} \right\} \subset \left\{ \mathbf{t} : |\mathbf{t}| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{10} \frac{M|\xi|^2}{M|\xi|^3} \right\}.$$

По формуле Тейлора

$$\frac{\partial^r}{\partial t_m^r} \ln f^n \left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{\nu=r}^{s-1} \frac{1}{\nu!\, n^{\frac{\nu-2}{2}}} \frac{\partial^r \varkappa_\nu(i\mathbf{t})}{\partial t_m^r} + \frac{1}{s!\, n^{\frac{s-2}{2}}} \frac{\partial^r}{\partial t_m^r} \Delta_{\mathbf{t}}^s \ln f\left(\frac{\mathbf{t}_0}{\sqrt{n}}\right).$$

Здесь $\mathbf{t}_0 = \Theta \mathbf{t}$, $0 < \Theta < 1$.

С помощью леммы 7 получаем

$$\left| \frac{1}{s!\, n^{\frac{s-2}{2}}} \frac{\partial^r}{\partial t_m^r} \Delta_{\mathbf{t}}^s \ln f\left(\frac{\mathbf{t}_0}{\sqrt{n}}\right) \right| \leqslant \frac{(s-1)!\, s^r 2^s M|\xi|^s |\mathbf{t}|^{s-r}}{s!\, n^{\frac{s-2}{2}}\, 0.99^s} \leqslant$$

$$\leqslant s^{r-1} 2^{\frac{3s}{2}-1} |\mathbf{t}|^{2-r} M|\xi|^2.$$

Теперь отсюда и (13) вытекает утверждение леммы 11.

Следующая лемма является многомерным аналогом известной леммы Крамера [5], стр. 93.

Лемма 12. *Если случайный вектор ξ имеет конечные моменты третьего порядка, то*

$$\left| f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right| \leqslant e^{-\frac{1}{3n} Q(\mathbf{t})}$$

при

$$\frac{M|(\xi,\ \mathbf{t})|^3}{Q(\mathbf{t})} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{4}.$$

Доказательство леммы 12. Имеем

$$\left| f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^2 = \int\limits_{R_k} \int\limits_{R_k} \cos \frac{(\mathbf{t},\ \mathbf{x}-\mathbf{y})}{\sqrt{n}} dF(\mathbf{x})\, dF(\mathbf{y}).$$

Здесь

$$\cos \frac{(\mathbf{t},\ \mathbf{x}-\mathbf{y})}{\sqrt{n}} \leqslant 1 - \frac{(\mathbf{t},\ \mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{2n} + \frac{1}{6n^{\frac{3}{2}}} |(\mathbf{t},\ \mathbf{x}-\mathbf{y})|^3.$$

Следовательно,

$$\left| f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right|^2 \leqslant 1-\frac{Q(\mathbf{t})}{n}+\frac{4\beta_3(\mathbf{t})}{3n^{\frac{3}{2}}}.$$

В силу (6)

$$\left| f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right| \leqslant e^{-\frac{Q(\mathbf{t})}{2n}+\frac{2}{3}\frac{\beta_3(\mathbf{t})}{n^{\frac{3}{2}}}} \leqslant e^{-\frac{1}{3n}Q(\mathbf{t})}$$

при

$$\frac{\beta_3(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{4}.$$

Лемма 12 доказана.

§ 2. Асимптотическое разложение для характеристической функции

Переходим к доказательству основного неравенства.

Теорема 1. *Пусть случайный вектор ξ имеет нулевой вектор математических ожиданий и конечные моменты s-того порядка ($s \geqslant 3$), тогда*

$$\left| f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3} P_\nu(i\mathbf{t})\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{0.99}\right)^{s-1}\frac{M\,|(\xi,\mathbf{t})|^s}{n^{\frac{s-2}{2}}}\,e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})}$$

при

$$\left[\frac{M\,|(\xi,\mathbf{t})|^s}{Q(\mathbf{t})}\right]^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}.$$

Доказательство теоремы 1. Из (14) вытекает

$$\left| f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right| \geqslant 1-\frac{Q(\mathbf{t})}{2n} \geqslant 1-\frac{Q^3(\mathbf{t})}{100\,[\beta_3(\mathbf{t})]^2} \geqslant 0.99 \tag{15}$$

при

$$\frac{\beta_3(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}.$$

В силу (6)

$$\left\{\mathbf{t}:\left[\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right]^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}\right\} \subset \left\{\mathbf{t}:\frac{\beta_3(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}\right\}.$$

Заметим, что $\beta_s(\mathbf{t})=M\,|(\xi,\mathbf{t})|^s$.

По формуле Тейлора

$$\ln f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{\nu=2}^{s-1}\frac{\varkappa_\nu(i\mathbf{t})}{\nu!\,n^{\frac{\nu-2}{2}}}+\frac{1}{s!\,n^{\frac{s-2}{2}}}\,\Delta_{\mathbf{t}}^s \ln f\left(\frac{\Theta\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right), \qquad 0<\Theta<1.$$

Следовательно,

$$e^{\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})} f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left\{\sum_{\nu=3}^{s-1} \frac{\varkappa_\nu(i\mathbf{t})}{\nu!\, n^{\frac{\nu-2}{2}}} + \frac{1}{s!\, n^{\frac{s-2}{2}}} \Delta_{\mathbf{t}}^s \ln f\left(\frac{\Theta\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right\} =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_\nu(i\mathbf{t}) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu + R_n(\mathbf{t}) e^{\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})}.$$

Здесь

$$R_n(\mathbf{t}) e^{\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})} = \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \bar{P}_\nu(i\mathbf{t}) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu +$$

$$+ \left[\exp\left\{\frac{1}{s!\, n^{\frac{s-2}{2}}} \Delta_{\mathbf{t}}^s \ln f\left(\frac{\Theta\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right\} - 1\right] \exp\left\{\sum_{\nu=3}^{s-1} \frac{\varkappa_\nu(i\mathbf{t})}{\nu!\, n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right\}.$$

Многочлены $\bar{P}_\nu(i\mathbf{t})$ определяем равенством

$$\exp\left\{\sum_{\nu=3}^{s-1} \frac{\varkappa_\nu(i\mathbf{t})}{\nu!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu-2}\right\} = 1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_\nu(i\mathbf{t}) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu +$$

$$+ \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \bar{P}_\nu(i\mathbf{t}) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu. \tag{16}$$

Методом математической индукции (аналогично тому, как была доказана лемма 8) можно показать, что для всех целых $r \geqslant s-2$

$$|\bar{P}_r(\boldsymbol{\omega})| \leqslant 2^r \left[\frac{\beta_s(\boldsymbol{\omega})}{Q(\boldsymbol{\omega})}\right]^{\frac{r}{s-2}} \sum_{\nu=1}^{r} \frac{[Q(\boldsymbol{\omega})]^\nu}{4^\nu \nu!}. \tag{17}$$

В силу леммы 4 при $\left[\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right]^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}$

$$\left|\sum_{\nu=3}^{s-1} \frac{\varkappa_\nu(i\mathbf{t})}{\nu!\, n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right| \leqslant \sum_{\nu=3}^{s-1} \frac{1}{\nu} \frac{\beta_\nu(\mathbf{t})}{n^{\frac{\nu-2}{2}}} \leqslant \sum_{\nu=3}^{s-1} \frac{1}{\nu} \frac{[\beta_s(\mathbf{t})]^{\frac{\nu-2}{s-2}} [Q(\mathbf{t})]^{\frac{s-\nu}{s-2}}}{n^{\frac{\nu-2}{2}}} \leqslant \frac{Q(\mathbf{t})}{21}$$

и

$$\left|\exp\left\{\frac{1}{s!\, n^{\frac{s-2}{2}}} \Delta_{\mathbf{t}}^s \ln f\left(\frac{\Theta\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right\} - 1\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{s!\, n^{\frac{s-2}{2}}} \left|\Delta_{\mathbf{t}}^s \ln f\left(\frac{\Theta\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right| e^{\frac{1}{s!\, n^{\frac{s-2}{2}}} \left|\Delta^s \ln f\left(\frac{\Theta\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{s-1}}{sn^{\frac{s-2}{2}}} \frac{\beta_s(\mathbf{t})}{\left|f\left(\frac{\Theta\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right|^s} \exp\left\{\frac{2^{s-1}}{sn^{\frac{s-2}{2}}} \frac{\beta_s(\mathbf{t})}{\left|f\left(\frac{\Theta\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right|^s}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{s-1}\beta_s(\mathbf{t})}{s\cdot 0.99^s n^{\frac{s-2}{2}}} \exp\left\{\frac{2^{s-1}\beta_s(\mathbf{t})}{s\cdot 0.99^s n^{\frac{s-2}{2}}}\right\} \leqslant \frac{2^{s-1}\beta_s(\mathbf{t})}{s\cdot 0.99^s n^{\frac{s-2}{2}}} e^{\frac{1}{5}Q(\mathbf{t})}.$$

Теперь

$$|R_n(\mathbf{t})| \leqslant \frac{2^{s-1}\beta_s(\mathbf{t})}{s\cdot 0.09^s n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})} +$$

$$+\sum_{r=s-2}^{\infty}\frac{2^r}{n^{\frac{r}{2}}}\left[\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right]^{\frac{r}{s-2}}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{[Q(\mathbf{t})]^r}{4^\nu \nu!}e^{-\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})} \leqslant \frac{2^{s-1}\beta_s(\mathbf{t})}{s\cdot 0.99^s n^{\frac{s-2}{2}}}e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})}+$$

$$+\frac{2^{s-2}\beta_s(\mathbf{t})}{4n^{\frac{s-2}{2}}}e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})}\sum_{r=s-2}^{\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{n}}\left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{1}{s-2}}\right]^{r-(s-2)} \leqslant \left(\frac{2}{0.99}\right)^{s-1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{n^{\frac{s-2}{2}}}e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})}$$

при

$$\left[\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right]^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}.$$

Теорема 1 доказана.

§ 3. Асимптотическое разложение для частных производных характеристической функции

В этом параграфе рассмотрим случайный вектор ξ с невыражденной ковариационной матрицей V. К ранее введенным обозначениям добавим еще следующие: $\bar{V}$ — ковариационная матрица случайного вектора $\frac{\xi}{\sigma}$, $\bar{\Delta}$ — ее определитель; $\lambda=\min\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$, λ_j — характеристические числа матрицы $\bar{V}$; $\bar{\beta}_s(\mathbf{t})=M\left|\frac{\xi}{\sigma}\right|^s$ — момент s-того порядка случайной величины $\left\{\left(\frac{\xi_1}{\sigma_1}\right)^2+\right.$ $\left.+\left(\frac{\xi_2}{\sigma_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\xi_k}{\sigma_k}\right)^2\right\}^{\frac{s}{2}}$, $\varkappa_\nu\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$ — семиинвариант случайной величины $\left(\frac{\xi}{\sigma}, \omega\right)=\frac{\xi_1}{\sigma_1}\omega_1+\frac{\xi_2}{\sigma_2}\omega_2+\cdots+\frac{\xi_k}{\sigma_k}\omega_k$. Кроме того, пусть

$$\varkappa(\mathbf{t})=\ln f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

$$\psi(\mathbf{t})=\sum_{\nu=2}^{s-1}\frac{\varkappa_\nu\left(\frac{i\mathbf{t}}{\sigma}\right)}{\nu!\, n^{\frac{\nu-2}{2}}}$$

и

$$b(\mathbf{t})=\frac{1}{s!\, n^{\frac{s-2}{2}}}\Delta^s_{\mathbf{t}:\sigma}\ln f\left(\frac{\mathbf{t}_0}{\sigma\sqrt{n}}\right), \qquad \mathbf{t}_0=\Theta\mathbf{t}, \quad 0<\Theta<1.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Если случайный вектор ξ с невырожденной матрицей V имеет конечные моменты s-того порядка ($s\geqslant 3$), то*

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\left[f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{1}{2}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}P_\nu\left(\frac{i\mathbf{t}}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right)\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_{sk}\bar{\beta}_s\left(|\mathbf{t}|^{s-r}+|\mathbf{t}|^{3(s+3)}\right)}{n^{\frac{s-2}{2}}}e^{-\frac{1}{4}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}$$

для $r \leqslant s$, $m=1, 2, \ldots, k$ *и* $|\mathbf{t}| \leqslant \dfrac{\lambda \sqrt{n}}{16 e k \beta_s^{\frac{1}{s-2}}}$. *Здесь*

$$C_{sk} \leqslant (2s+r+6)(r+1)!\, k^{s+1} s^{2s} 2^{3sr}.$$

Доказательство теоремы 2. С помощью леммы 2 частную производную r-того порядка функции $f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ выражаем через частные производные $\varkappa(\mathbf{t})$. После этого вместо $\varkappa(\mathbf{t})$ подставляем сумму $\psi(\mathbf{t})+b(\mathbf{t})$. Очевидно

$$\frac{\partial^r}{\partial t_m^r} f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{e^{\psi(\mathbf{t})}} \frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r} = f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right) \frac{\partial^r b(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} +$$
$$+ f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right) \sum_{i=1}^{r-1} \sum{}^{*} \sum_{l=0}^{i} \frac{(r-1)!}{j_i j_{i-1}\ldots j_1 (j_{i+1}-j_i-1)!\ldots(j_2-j_1-1)!\,(j_2-j_1-1)!} \times$$
$$\times \frac{\partial^{j_{i+1}-j_i}\varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{i+1}-j_i}} \cdots \frac{\partial^{j_{i-l+2}-j_{i-l+1}}\varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{i-l+2}-j_{i-l+1}}} \cdot \frac{\partial^{j_{i-l+1}-j_{i-l}} b(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{i-l+1}-j_{i-l}}} \times$$
$$\times \frac{\partial^{j_{i-l}-j_{i-l-1}}\psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{i-l}-j_{i-l-1}}} \cdots \frac{\partial^{j_1-j_0}\psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_1-j_0}}, \tag{18}$$

где $j_{i+1}=r$, $j_0=0$.

Положим

$$g\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right) = e^{-\frac{1}{2} Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_\nu\left(\frac{i\mathbf{t}}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\right).$$

Имеем

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\left[f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)\right]\right| \leqslant I_1+I_2+I_3. \tag{19}$$

Здесь

$$I_1 = \left|\frac{\partial^r}{\partial t_m^r} f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{e^{\psi(\mathbf{t})}} \cdot \frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r}\right|,$$
$$I_2 = |e^{-\psi(\mathbf{t})}| \left|\frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r}\right| \left\{\left|g\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right) - e^{\psi(\mathbf{t})}\right| +\right.$$
$$\left. + \left|f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|\right\} \tag{20}$$

и

$$I_3 = \left|\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\left[e^{\psi(\mathbf{t})} - g\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)\right]\right|.$$

Оценка I_1. В силу леммы 7

$$\left|\frac{\partial^r b(\mathbf{t})}{\partial t_m^r}\right| \leqslant \frac{s^r (s-1)!\, 2^s |\mathbf{t}|^{s-r} \beta_s}{s!\, n^{\frac{s-2}{2}} \left|f\left(\frac{\mathbf{t}_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^s}.$$

Поскольку

$$Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right) \geqslant \lambda |\mathbf{t}|^2,$$

то

$$\left\{\mathbf{t} : |\mathbf{t}| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}\left(\frac{\lambda}{\beta_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}\right\} \subset \left\{\mathbf{t} : \left[\frac{M\left|\left(\frac{\xi}{\sigma}, \mathbf{t}\right)\right|^s}{Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}\right]^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}\right\}.$$

Из (15) вытекает $\left| f\left(\frac{\mathbf{t}_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| \geqslant 0.99$. Следовательно,

$$\left|\frac{\partial^r b(\mathbf{t})}{\partial t_m^r}\right| \leqslant \frac{s^{r-1} 2^{\frac{3s}{2}} |\mathbf{t}|^{s-r} \bar{\beta}_s}{n^{\frac{s-2}{2}}}. \tag{21}$$

Заметим, что

$$\left|\frac{\partial^r \psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^r}\right| \leqslant k(s-1)^r |\mathbf{t}|^{2-r} \tag{22}$$

и

$$\left|\frac{\partial^r \varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^r}\right| \leqslant k s^{r-1} 2^{\frac{3s}{2}} |\mathbf{t}|^{2-r}$$

при $|\mathbf{t}| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{k}{\bar{\beta}_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$ (см. леммы 10 и 11).

Из (18) и (21 – 23) и леммы 12 следует

$$I_1 \leqslant e^{-\frac{1}{3}\varrho\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)} \left\{ \frac{s^{r-1} 2^{\frac{3s}{2}} \bar{\beta}_s |\mathbf{t}|^{s-r}}{n^{\frac{s-2}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{r-1} \sum{}^{*} \sum_{l=0}^{i} \frac{(r-1)!\, k^i 2^{r-i} s^{\frac{3s}{2}i+1} \bar{\beta}_s |\mathbf{t}|^{s-r+2i}}{n^{\frac{s-2}{2}} j_i j_{i-1} \ldots j_1 (j_{i+1}-j_i-1)! \ldots (j_2-j_1-1)!\,(j_2-j_1)!} \right\} =$$

$$= \frac{s^r 2^{\frac{3s}{2}} \bar{\beta}_s |\mathbf{t}|^{s-r} e^{-\frac{1}{3}\varrho\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}}{n^{\frac{s-2}{2}}} \left\{ \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j_i=i}^{r-1} \sum_{j_{i-1}=i-1}^{j_i-1} \cdots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \sum_{l=0}^{i} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(r-1)!\, k^i s^{-i} 2^{\frac{3s}{2}i} |\mathbf{t}|^{2i}}{j_i j_{i-1} \ldots j_1 (j_{i+1}-j_i-1)! \ldots (j_2-j_1-1)!\,(j_2-j_1)!} \right\}.$$

С помощью неравенства (12) последнее выражение можем упростить:

$$I_1 \leqslant \frac{s^r 2^{\frac{3s}{2}} \bar{\beta}_s |\mathbf{t}|^{s-r} e^{-\frac{1}{3}\varrho\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}}{n^{\frac{s-2}{2}}} \left\{ \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{(r-1)!\,(i+1)\, k^i 2^{\frac{3s}{2}i+r-1} |\mathbf{t}|^{2i}}{s^i i!} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(r-1)!\, s^r 2^{\frac{3s}{2}+r} \bar{\beta}_s |\mathbf{t}|^{s-r} e^{-\frac{1}{3}\varrho\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}}{n^{\frac{s-2}{2}}} \sum_{i=0}^{r-1} k^i 2^{\frac{3(s-1)i}{2}} |\mathbf{t}|^{2i}.$$

Поскольку

$$\sum_{i=0}^{r-1} a^i \leqslant r(1+a^r) \tag{24}$$

при $a > 0$, то

$$I_1 \leqslant \frac{r!\, s^r 2^{\frac{3s}{2}+r} \bar{\beta}_s \left(|\mathbf{t}|^{s-r} + k^r 2^{\frac{3(s-1)r}{2}} |\mathbf{t}|^{s+r}\right)}{n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{1}{3}\varrho\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)} \tag{25}$$

для

$$|\mathbf{t}| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{k}{\bar{\beta}_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}.$$

Оценка I_2. Сперва оценим

$$e^{-\psi(t)}\frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r} = \frac{\partial^r \psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} +$$

$$+\sum_{i=1}^{r-1}\sum{}^{*}\frac{(r-1)!}{j_i j_{i-1}\ldots j_1 (r-j_i-1)!\,(j_i-j_{i-1}-1)!\ldots(j_2-j_1-1)!\,(j_1-1)!}\times$$

$$\times\frac{\partial^{r-j_i}\psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{r-j_i}}\cdot\frac{\partial^{j_i-j_{i-1}}\psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_i-j_{i-1}}}\cdots\frac{\partial^{j_2-j_1}\psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_2-j_1}}\,\frac{\partial^{j_1}\psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_1}}.$$

Отсюда, (12) и (22) получаем

$$|e^{-\psi(\mathbf{t})}|\left|\frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r}\right| \leqslant (s-1)^r k\,|\mathbf{t}|^{2-r}+$$

$$+\sum_{i=1}^{r-1}\sum{}^{*}\frac{(r-1)!\,(s-1)^r k^{i+1}\,|\mathbf{t}|^{2(i+1)-r}}{i!} \leqslant$$

$$\leqslant r!\,(s-1)^r\,2^{r-1}k\,|\mathbf{t}|^{2-r}(1+k^r|\mathbf{t}|^{2r}). \tag{26}$$

Из утверждения теоремы 1 следует, что при $|\mathbf{t}| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}\left(\frac{\lambda}{\bar{\beta}_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}$

$$f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right) \leqslant \frac{2^{\frac{3s}{2}}\,\bar{\beta}_s\,|\mathbf{t}|^s\,e^{-\frac{1}{4}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}}{n^{\frac{s-2}{2}}}. \tag{27}$$

Осталось оценить разность $e^{\psi(\mathbf{t})} - g\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)$. Очевидно

$$\left|e^{\psi(\mathbf{t})} - g\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)\right| = e^{-\frac{1}{2}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}\left|\sum_{\nu=s-2}^{\infty}\bar{P}_\nu\left(\frac{i\mathbf{t}}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right|, \tag{28}$$

где многочлены $\bar{P}_\nu(i\mathbf{t})$ определены равенством (16). С помощью (17) после несложных вычислений получаем

$$\left|\sum_{\nu=s-2}^{\infty}\bar{P}_\nu\left(\frac{i\mathbf{t}}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right| \leqslant \frac{2^{s-1}\,\bar{\beta}_s\,|\mathbf{t}|^s\,e^{\frac{1}{4}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}}{n^{\frac{s-2}{2}}}. \tag{29}$$

Из (20) и (26—29) вытекает

$$I_2 \leqslant r!\,(s-1)^r\,2^{r-1}k\,|\mathbf{t}|^{2-r}(1+k^r|\mathbf{t}|^{2r})\times$$

$$\times\left(\frac{2^{\frac{3s}{2}}\,\bar{\beta}_s\,|\mathbf{t}|^s}{n^{\frac{s-2}{2}}} + \frac{2^{s-1}\,\bar{\beta}_s\,|\mathbf{t}|^s}{n^{\frac{s-2}{2}}}\right)e^{-\frac{1}{4}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r!\,(s-1)^r\,2^{\frac{3s}{2}+r}\,k\,\bar{\beta}_s\,(|\mathbf{t}|^{s+2}+k^r|\mathbf{t}|^{s+r+2})}{n^{\frac{s-2}{2}}}\,e^{-\frac{1}{4}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)} \tag{30}$$

при

$$|\mathbf{t}| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}\left(\frac{\lambda}{\bar{\beta}_s}\right)^{\frac{1}{s-2}}.$$

Оценка I_3. Имеем

$$\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\left[e^{\psi(\mathbf{t})} - g\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)\right] = \frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\left[e^{-\frac{1}{2}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}\sum_{\nu=s-2}^{\infty}\bar{P}_\nu\left(\frac{i\mathbf{t}}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{r}\sum_{\nu=s-2}^{\infty}\frac{r!}{p!\,(r-p)!\,n^{\frac{\nu}{2}}}\cdot\frac{\partial^p e^{-\frac{1}{2}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}}{\partial t_m^p}\cdot\frac{\partial^{r-p}\bar{P}_\nu\left(\frac{i\mathbf{t}}{\sigma}\right)}{\partial t_m^{r-p}}.$$

Здесь в силу леммы 2

$$\frac{\partial^p e^{-\frac{1}{2}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}}{\partial t_m^p} = e^{-\frac{1}{2}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial^p Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}{\partial t_m^p} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{p-1}\sum{}^{*}\frac{(-1)^{i+1}(p-1)!}{j_i j_{i-1}\ldots j_1(p-j_i-1)!\,(j_i-j_{i-1}-1)!\ldots(j_2-j_1-1)!\,(j_1-1)!\,2^{i+1}}\times$$

$$\left.\times\frac{\partial^{p-j_i}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}{\partial t_m^{p-j_i}}\cdot\frac{\partial^{j_i-j_{i-1}}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}{\partial t_m^{j_i-j_{i-1}}}\cdots\frac{\partial^{j_2-j_1}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}{\partial t_m^{j_2-j_1}}\cdot\frac{\partial^{j_1}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}{\partial t_m^{j_1}}\right\}.$$

Так как

$$\left|\frac{\partial^\nu Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}{\partial t_m^\nu}\right| \leqslant 2k|\mathbf{t}|^{2-\nu}$$

при $\nu = 1, 2, \ldots,$ то

$$\left|\frac{\partial^p e^{-\frac{1}{2}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}}{\partial t_m^p}\right| \leqslant e^{-\frac{1}{2}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}\left\{k|\mathbf{t}|^{2-p} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{p-1}\sum{}^{*}\frac{(p-1)!\,k^{i+1}|\mathbf{t}|^{2(i+1)-p}}{i!}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant k(p-1)!\,2^{p-1}|\mathbf{t}|^{2-p}\sum_{i=0}^{p-1}(k|\mathbf{t}|^2)^i e^{-\frac{1}{2}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant kp!\,2^{p-1}|\mathbf{t}|^{2-p}(1 + k^p|\mathbf{t}|^{2p})\,e^{-\frac{1}{2}Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}. \tag{31}$$

Аналогично получению оценки (11) мы можем показать, что

$$\left|\frac{\partial^{r-p}\bar{P}_\nu\left(\frac{i\mathbf{t}}{\sigma}\right)}{\partial t_m^{r-p}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant (\nu+2)^{2(r-p)}(r-p)!\,k2^{\nu-1}|\mathbf{t}|^{\nu+2+p-r}\bar{\beta}_s^{\frac{\nu}{s-2}}\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{k^j|\mathbf{t}|^{2j}}{j!}. \tag{32}$$

Теперь из (31, 32) следует

$$I_3 \leqslant \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\nu}{2}}} \sum_{p=0}^{r} k^2 r!\, 2^{\nu+p-2}(\nu+2)^{2(r-p)} |\mathbf{t}|^{\nu+4-r}(1+k^p|\mathbf{t}|^{2p}) \bar{\beta}_s^{\frac{\nu}{s-2}} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{k^j |\mathbf{t}|^{2j}}{j!} = \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \frac{k^2 r!\, 2^{\nu-2}(\nu+2)^{2r} |\mathbf{t}|^{\nu+4-r} \bar{\beta}_s^{\frac{\nu}{s-2}}}{n^{\frac{\nu}{2}}} \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{k^j |\mathbf{t}|^{2j}}{j!} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{r} \left(\frac{2}{\nu+2}\right)^p + \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \frac{r!\, k^2 2^{\nu-2}(\nu+2)^{2r} |\mathbf{t}|^{\nu+4-r} \bar{\beta}_s^{\frac{\nu}{s-2}}}{n^{\frac{\nu}{2}}} \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{k^j |\mathbf{t}|^{2j}}{j!} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{r} \left(\frac{2k|\mathbf{t}|}{\nu+2}\right)^p \leqslant kr!\, |\mathbf{t}|^{2-r} \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \frac{8^\nu k^\nu (\nu+2)^{2r} |\mathbf{t}|^{\nu+2} \bar{\beta}_s^{\frac{\nu}{s-2}}}{n^{\frac{\nu}{2}}} \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{|\mathbf{t}|^{2j}}{4^j j!} +$$

$$+k(r+1)!\, |\mathbf{t}|^{2-r} \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \frac{8^\nu k^\nu (\nu+2)^{2r} |\mathbf{t}|^{\nu+2} \bar{\beta}_s^{\frac{\nu}{s-2}}}{n^{\frac{\nu}{2}}} \left(1+\left(\frac{2k|\mathbf{t}|}{\nu+2}\right)^{r+1}\right) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{\nu-1} \frac{|\mathbf{t}|^{2j}}{4^j j!} = \left\{ k^2 r!\, |\mathbf{t}|^{2-r} + k(r+1)!\, 2^{-2} |\mathbf{t}|^{2-r} \left(1+(k|\mathbf{t}|)^{r+1}\right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{j=0}^{s-3} \frac{|\mathbf{t}|^{2j}}{4^j j!} \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \frac{8^\nu k^\nu (\nu+2)^{2r} |\mathbf{t}|^{\nu+2} \bar{\beta}_s^{\frac{\nu}{s-2}}}{n^{\frac{\nu}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=s-2}^{\infty} \frac{|\mathbf{t}|^{2j}}{4^j j!} \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \frac{8^\nu k^\nu (\nu+2)^{2r} |\mathbf{t}|^{\nu+2} \bar{\beta}_s^{\frac{\nu}{s-2}}}{n^{\frac{\nu}{2}}} \right\}. \tag{33}$$

Так как $(\nu+2)^{2r} \leqslant e^{\nu+2} e^{-2r} (2r)^{2r}$, то

$$I = \sum_{j=0}^{s-3} \frac{|\mathbf{t}|^{2j}}{4^j j!} \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \frac{8^\nu k^\nu (\nu+2)^{2r} |\mathbf{t}|^{2+\nu} \bar{\beta}_s^{\frac{\nu}{s-2}}}{n^{\frac{\nu}{2}}} +$$

$$+ \sum_{j=s-2}^{\infty} \frac{|\mathbf{t}|^{2j}}{4^j j!} \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \frac{8^\nu k^\nu |\mathbf{t}|^{\nu+2} \bar{\beta}_s^{\frac{\nu}{s-2}} (\nu+2)^{2r}}{n^{\frac{\nu}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{2-2r}(2r)^{2r}(2ek)^{s-2} \bar{\beta}_s |\mathbf{t}|^s}{n^{\frac{s-2}{2}}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{s-3} \frac{|\mathbf{t}|^{2j}}{4^j j!} \sum_{\nu=s-2}^{\infty} \left(\frac{8ek|\mathbf{t}| \bar{\beta}_s^{\frac{1}{s-2}}}{\sqrt{n}} \right)^{\nu-(s-2)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=s-2}^{\infty} \frac{|\mathbf{t}|^{2j}}{4^j j!} \sum_{\nu=j+1}^{\infty} \left(\frac{8ek|\mathbf{t}| \bar{\beta}_s^{\frac{1}{s-2}}}{\lambda\sqrt{n}} \right)^{\nu-(s-2)} \lambda^{\nu-(s-2)} \right\}.$$

В случае

$$\frac{8ek|\mathbf{t}| \bar{\beta}_s^{\frac{1}{s-2}}}{\lambda\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2}$$

получаем

$$I \leqslant \frac{(2e)^s k^{s-2} r^{2r} |\mathbf{t}|^s \bar{\beta}_s}{n^{\frac{s-2}{2}}} \left\{ 1 + \left(\frac{|\mathbf{t}|}{2}\right)^{2(s-3)} + \sum_{j=s-2}^{\infty} \frac{\lambda^{j-(s-2)} |\mathbf{t}|^{2j}}{4^j j!} \right\}. \tag{34}$$

Здесь $\lambda \leqslant 1$. Имеем

$$\sum_{j=s-2}^{\infty} \frac{\lambda^{j-(s-2)} |\mathbf{t}|^{2j}}{4^j j!} \leqslant \frac{|\mathbf{t}|^{2(s-2)}}{4^{s-2}} \sum_{j=s-2}^{\infty} \frac{(\lambda |\mathbf{t}|^2)^{j-(s-2)}}{4^{j-(s-2)} (j-(s-2))!} =$$

$$= \frac{|\mathbf{t}|^{2(s-2)}}{4^{s-2}} e^{\frac{\lambda |\mathbf{t}|^2}{4}} \leqslant \frac{|\mathbf{t}|^{2(s-2)}}{4^{s-2}} e^{\frac{1}{4} Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}. \tag{35}$$

Теперь из (33 – 35) следует

$$I_3 \leqslant \frac{e^s r^{2r} (r+1)! k^s \bar{\beta}_s}{n^{\frac{s-2}{2}}} \left(|\mathbf{t}|^{s-r+2} + |\mathbf{t}|^{s+3}\right)\left(2^{2(s-3)} + |\mathbf{t}|^{2(s-3)} + |\mathbf{t}|^{2(s-2)}\right) e^{-\frac{1}{4} Q\left(\frac{\mathbf{t}}{\sigma}\right)}$$

при $|\mathbf{t}| \leqslant \dfrac{\lambda \sqrt{n}}{16ek \bar{\beta}_s^{\frac{1}{s-2}}}$.

Утверждение теоремы 2 немедленно получаем из (19), (25), (30) и (36).

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 3.VI.1967

Литература

1. P. L. Hsu, The approximate distributions of the mean vand variance of a sample of independent variables, Ann. Math. Statistics (1945), 1 – 29.

2. А. Бикялис, Об остаточных членах в асимптотических разложениях для характеристических функций и их производных, Лит. мат. сб., **VII**, №4, 1967.

3. А. Бикялис, Об остаточных членах в многомерных предельных теоремах, ДАН СССР, **168**, № 4 (1966), 731 – 732.

4. A. Liapunoff, Sur une proposition de la théorie des probabilités, Bull. Acad. Sci. St-Peterbourg (5), 13 (1900), 359 – 386.

5. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ИЛ, 1947.

APIE DAUGIAMATES CHARAKTERINGAS FUNKCIJAS

A. BIKELIS

(*Reziumė*)

Nagrinėsim k-matį atsitiktinį vektorių ξ euklidinėje erdvėje R_k. Sakysime, ξ turi baigtinius s-os eilės momentus ($s \geqslant 3$). Tuomet

$$\left| f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{1}{2} Q(\mathbf{t})} \left(1 + \sum_{j=1}^{s-3} P_j(i\mathbf{t}) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{0.99}\right)^{s-1} \cdot \frac{M|(\xi, \mathbf{t})|^s}{n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{1}{4} Q(\mathbf{t})};$$

čia $\left[\dfrac{M|(\xi, \mathbf{t})|^s}{Q(\mathbf{t})}\right]^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{8}$. Čia $f(\mathbf{t})$ – atsitiktinio vektoriaus ξ charakteringa funkcija, $(\xi, \mathbf{t})$ vektorių – ξ ir $\mathbf{t}$ skaliarinė sandauga, $M|(\xi, \mathbf{t})|^s$ – atsitiktinio dydžio $|(\xi, \mathbf{t})|^s$ matematinė viltis ir $P_j(i\mathbf{t})$ – (9) lygybe apibrėžti polinomai.

ON THE MULTIVARIATE CHARACTERISTIC FUNCTIONS

A. BIKELIS

(*Summary*)

Consider a k-dimensional random vector ξ in the Euclidean space R_k. Let ξ possess finite moments of s-order ($s \geqslant 3$). Then the following inequality holds

$$\left| f^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{1}{2} Q(\mathbf{t})} \left(1 + \sum_{j=1}^{s-3} P_j(i\mathbf{t}) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{0.99}\right)^{s-1} \frac{M \mid (\xi, \mathbf{t}) \mid^s}{n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{1}{4} Q(\mathbf{t})},$$

when $\left[\frac{M \mid (\xi, \mathbf{t}) \mid^s}{Q(\mathbf{t})}\right]^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}$. There $f(\mathbf{t})$ is the characteristic function of the random vector ξ, $Q(\mathbf{t})$ is a quadratic form, $(\xi, \mathbf{t})$ is the inner product of $\mathbf{t}$ and ξ, $M \mid (\xi, \mathbf{t}) \mid^s$ is the mathematical expectation of the random variable $\mid (\xi, \mathbf{t}) \mid^s$, and the polynomials $P_j(i\mathbf{t})$ are defined by (9).