LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК–517.535.4

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ ИНДИКАТОР ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ НУЛЯМИ. II

А. А. КОНДРАТЮК

Настоящая работа является непосредственным продолжением статьи [1], ее второй частью. Мы будем использовать результаты, соотношения и обозначения из [1]. Нумерация параграфов продолжена.

Здесь также рассматриваются целые функции $f(z)$ с положительными нулями $0<a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant \ldots$ порядка ρ. Пусть $\rho(r)$ – некоторый уточненный порядок, $\rho(r)\to\rho$, когда $r\to\infty$, $n_f(r)$ – число нулей функции $f(z)$ на промежутке $(0, r]$ и

$$N_f(r)=An_f(r)=\int_0^r \frac{n_f(t)}{t}\,dt. \tag{1}$$

Нижней плотностью нулей функции $f(z)$ назовем величину

$$\Delta_1(f)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{N_f(r)}{r^{\rho(r)}}, \tag{2'}$$

верхней плотностью – величину

$$\Delta_2(f)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N_f(r)}{r^{\rho(r)}}. \tag{2''}$$

Пусть $G(\rho(r), \Delta_1, \Delta_2)$ – класс таких целых функций, для которых выполняется $0\leqslant\Delta_1\leqslant\Delta_1(f)\leqslant\Delta_2(f)\leqslant\Delta_2<\infty$. Здесь мы доказываем существование экстремального индикатора для целых функций [2] из класса $G(\rho(r), \Delta_1, \Delta_2)$. В первой части статьи [1] рассматривался случай $\Delta_1=0$.

Аналогичную задачу, где Δ_1 определялось как

$$\Delta_1=\varliminf_{r\to\infty}\frac{n_f(r)}{r^{\rho(r)}},$$

а Δ_2 – как

$$\Delta_2=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n_f(t)}{r^{\rho(r)}},$$

решил А. А. Гольдберг [3]–[7].

Учитывая известную формулу Иенсена, задачу настоящей работы можно интерпретировать так (см. [1]): зная рост среднего значения $\ln|f(z)|$ на окружности $|z|=r$, оценить рост $\ln|f(z)|$ на каждом луче $\arg z=\varphi$.

Автор выражает глубокую признательность А. А. Гольдбергу за внимательное руководство.

В §§ 7–9 мы будем рассматривать целые функции нецелого порядка $\rho>[\rho]=p$. Индикаторы будем измерять относительно того же уточненного порядка $\rho(r)$, с помощью которого вводятся верхняя (2″) и нижняя (2′) плотности нулей,

$$h(\varphi; f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}},\quad 0\leqslant\varphi<2\pi. \tag{3}$$

Основным результатом §§ 7—9 является

Теорема 3. *Для всякой целой функции* $f(z)\in G(\rho(r), \Delta_1, \Delta_2)$ *нецелого порядка* ρ *справедливы неравенства*

$$\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\left\{\frac{\Delta_2+\Delta_1}{2}\cos\rho(\varphi-\pi)-(-1)^p\frac{\Delta_2+\Delta_1}{2}|\cos\rho(\varphi-\pi)|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant h(\varphi; f)\leqslant\rho l_1(\varphi, \rho, \Delta_1, \Delta_2), \tag{5}$$

где $l_1(\varphi, \rho, \Delta_1, \Delta_2)$ — *некоторая непрерывная функция от* φ, $0\leqslant\varphi<2\pi$. *При этом существует функция* $f(z)\in G(\rho(r), \Delta_1, \Delta_2)$ *такая, что*

$$h(\varphi; f)=\rho l_1(\varphi, \rho, \Delta_1, \Delta_2) \tag{6}$$

для всех φ, $0\leqslant\varphi<2\pi$. *Для фиксированного* φ, $0\leqslant\varphi<2\pi$, *можно указать целую функцию* $f(z)\in G(\rho(r), \Delta_1, \Delta_2)$ *такую, что*

$$h(\varphi; f)=\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\left\{\frac{\Delta_2+\Delta_1}{2}\cos\rho(\varphi-\pi)-(-1)^p\frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}|\cos\rho(\varphi-\pi)|\right\}. \tag{6′}$$

Вид функции $l_1(\varphi, \rho, \Delta_1, \Delta_2)$ указан в § 8. Правую часть неравенства (5) мы будем доказывать, предполагая дополнительно, что $\Delta_1>0$, так как для случая $\Delta_1=0$ она была доказана в первой части статьи. Левую часть неравенства (5) мы докажем здесь в случае $\Delta_1\geqslant 0$. Она является новой и при $\Delta_1=0$.

Рассмотрим класс $R'(\delta_1, \delta_2)$ неубывающих, непрерывных справа функций $\nu(t)$, $0<t<\infty$, $0<\delta_1\leqslant\delta_2<\infty$:

$$R'(\delta_1, \delta_2)=\{\nu(t):\delta_1 t^\rho\leqslant A\nu(t)=H(\ln t)\leqslant\delta_2 t^\rho\}. \tag{7}$$

Определим функционалы F и F_1 при $\nu(t)\in R'(\delta_1, \delta_2)$ как в § 1. В § 9 мы докажем неравенство (5), где в правой части стоит

$$\rho l_1(\varphi, \rho, \Delta_1, \Delta_2)=\sup_{\nu(t)\in R'(\Delta_1, \Delta_2)}F(\nu(t)). \tag{8}$$

Обозначим далее $R'(\Delta_1, \Delta_2)$ через R'. Целью следующих двух параграфов будет нахождение $\sup\limits_{\nu(t)\in R'}F(\nu(t))$.

§ 7. Определение и свойства операторов B_k'

Очевидно, оператор A переводит класс неубывающих, непрерывных справа функций $\nu(t)\in R'$ в класс $S'(\Delta_1, \Delta_2)=S'$ логарифмически выпуклых функций $H(\ln t)$. Обозначим $\ln t=x$. Тогда функция $H(x)$ выпукла при $-\infty<x<+\infty$. Функции $y(a, b; x)$ и $l(s; x)$ определены в § 3.

Из (7) следует, что при $H(x)\in S'$ выполняется

$$\Delta_1 e^{\rho x}\leqslant H(x)\leqslant\Delta_2 e^{\rho x}\quad\text{при}\quad -\infty<x<+\infty. \tag{7.1}$$

Пусть $x_1<x_2<x_3$ — некоторые точки на действительной оси. Определим на S' оператор $B_1'=B_1'(x_i)$ следующим образом:

$$h_1(x)=B_1'(x_i)H(x)=\begin{cases}\Delta_2 e^{\rho x} & \text{при } -\infty<x\leqslant s_i,\\ \Delta_2 l(s_i; x) & \text{при } s_i\leqslant x\leqslant s_i+\lambda_1,\\ \Delta_1 e^{\rho x} & \text{при } s_i+\lambda_1\leqslant x<+\infty,\end{cases} \tag{7.2}$$

где s_i и постоянная λ_1 удовлетворяют следующим соотношениям соответственно:

$$H(x_i)=\Delta_2\{\rho e^{\rho s_i}(x_i-s_i)+e^{\rho s_i}\},\quad s_i\leqslant x_i, \tag{7.3}$$

и

$$\Delta_2-\Delta_1 e^{\rho\lambda_1}=-\rho\Delta_2\lambda_1,\ \lambda_1\geqslant 0. \tag{7.4}$$

Из (7.3) приходим к тождеству по x

$$\Delta_2 l(s_i;\ x)\equiv\frac{x_i-x}{x_i-s_i}\ \Delta_2 e^{\rho s_i}+\frac{x-s_i}{x_i-s_i}\ H(x_i). \tag{7.5}$$

Покажем, что

$$H(x)\leqslant h_1(x)\ \text{при}\ x\leqslant x_i, \tag{7.6}$$

$$H(x)\geqslant h_1(x)\ \text{при}\ x\geqslant x_i. \tag{7.6'}$$

При $x\,\bar{\in}\,[s_i,\ s_i+\lambda_1]$ последнее неравенство и неравенство (7.6) с очевидностью следуют из (7.1). При $s_i\leqslant x\leqslant x_i$ из соотношений (3.3) и (7.5) находим, что

$$H(x)\leqslant y(s_i,\ x_i;\ x)=\frac{x_i-x}{x_i-s_i}\ H(s_i)+\frac{x-s_i}{x_i-s_i}\ H(x_i)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x_i-x}{x_i-s_i}\ \Delta_2 e^{\rho s_i}+\frac{x-s_i}{x_i-s_i}\ H(x_i)=\Delta_1 l(s_i;\ x).$$

Тем самым справедливость неравенства (7.6) установлена. Для доказательства (7.6′) при $x_1\leqslant x\leqslant s_1+\lambda_1$ рассуждаем аналогично с использованием неравенства (3.4) вместо (3.3).

Заметим, что при $s_i=\ln\,\xi_i$, $x_i=\ln\,t_i$ выполняется

$$x_i-\lambda_1\leqslant s_i\leqslant x_i,\qquad t_i\,e^{-\lambda_1}\leqslant\xi_i\leqslant t_i, \tag{7.7}$$

причем при разных $H(x)\in S'$ переменная ξ_i, очевидно, пробегает все значения от $t_i e^{-\lambda_1}$ до t_i. Утверждения, аналогичные последнему, будут справедливы в соответствующих случаях и в дальнейшем, но мы не будем их специально оговаривать.

Оператор $B_2'(x_i)=B_2'$ определим на S', положив

$$B_2'H(x)=h_2(x)=\begin{cases}\Delta_1 e^{\rho x} & \text{при}\quad -\infty<x\leqslant s_i-\lambda_2,\\ \Delta_2 l(s_i;\ x) & \text{при}\quad s_i-\lambda_2\leqslant x\leqslant s_i,\\ \Delta_2 e^{\rho x} & \text{при}\quad s_i\leqslant x<\infty,\end{cases} \tag{7.8}$$

где s_i и λ_2 удовлетворяют соответственно соотношениям

$$H(x_i)=\Delta_2\{\rho e^{\rho s_i}(x_i-s_i)+e^{\rho s_i}\},\quad s_i\geqslant x_i, \tag{7.9}$$

$$\Delta_2-\Delta_1\,e^{-\rho\lambda_2}=\Delta_2\,\rho\lambda_2,\quad \lambda_2\geqslant 0. \tag{7.9'}$$

Как и для $h_1(x)$, находим, что

$$H(x)\leqslant h_2(x)\quad\text{при}\quad x\geqslant x_i, \tag{7.10}$$

$$H(x)\geqslant h_2(x)\quad\text{при}\quad x\leqslant x_i. \tag{7.10'}$$

В этом случае мы имеем также

$$x_i\leqslant s_i\leqslant x_i+\lambda_2,\qquad t_i\leqslant\xi_i\leqslant t_i\,e^{\lambda_2}. \tag{7.11}$$

Определим теперь на S' оператор $B_3'=B_3'(x_1,\ x_2)$. При $s_2-s_1\geqslant\lambda_1+\lambda_2$ положим

$$h_3(x)=B_3'H(x)=\begin{cases}B_1(x_1)\,H(x) & \text{при}\quad x\leqslant s_1+\lambda_1,\\ \Delta_1\,e^{\rho x} & \text{при}\quad s_1+\lambda_1\leqslant x\leqslant s_2-\lambda_2,\\ B_2(x_2)\,H(x) & \text{при}\quad s_2-\lambda_2\leqslant x,\end{cases} \tag{7.12}$$

где s_1 и s_2 определяются из соотношений (7.3) и (7.9), соответственно, λ_1 и λ_2 — из (7.9) и (7.4).

При $s_2-s_1<\lambda_1+\lambda_2$ положим

$$h_3(x)=B_3'H(x)=\begin{cases} B_1(x_1)\,H(x) & \text{при} \quad x<s_0, \\ B_2(x_2)\,H(x) & \text{при} \quad x\geqslant s_0, \end{cases} \tag{7.13}$$

где функция $s_0(s_1, s_2)=s_0$ определена формулой (3.16). При $s_0=\ln\xi_0$ имеет место формула (3.16′), причем, для ξ_i, s_i, $i=1$, 2 выполняются соотношения (7.7) и (7.11) соответственно. Непосредственным следствием неравенств (7.6), (7.6′) и (7.10), (7.10′) являются следующие:

$$\begin{aligned} &H(x)\leqslant h_3(x) \quad \text{при} \quad x\in[x_1,\ x_2], \\ &H(x)\geqslant h_3(x) \quad \text{при} \quad x\in[x_1,\ x_2]. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Перейдем к определению на S' оператора $B_4'=B_4'(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Если уравнение

$$\Delta_2\,e^{\rho x}=y(x_i,\ x_{i+1};\ x) \tag{7.15}$$

не имеет корней при $i=2$, то положим

$$h_4(x)=B_4'H(x)=\begin{cases} B_1(x_1)\,H(x) & \text{при} \quad x\leqslant\tau_0, \\ y(x_2,\ x_3;\ x) & \text{при} \quad \tau_0\leqslant x\leqslant\tau_3, \\ \Delta_1\,e^{\rho x} & \text{при} \quad \tau_3\leqslant x, \end{cases} \tag{7.16}$$

где τ_0 удовлетворяет уравнению

$$h_1(\tau_0)=y(x_2,\ x_3;\ \tau_0), \qquad x_1\leqslant\tau_0\leqslant x_2, \tag{7.17}$$

а τ_3 — уравнению

$$\Delta_1\,e^{\rho\tau_3}=y(x_2,\ x_3;\ \tau_3), \quad \tau_3\geqslant x_3. \tag{7.18}$$

Такие точки τ_0 и τ_3 единственны. Это следует из (7.2), (7.6) и элементарных геометрических рассуждений, связанных с выпуклостью рассматриваемых кривых. При $\tau_0=\ln\zeta_0$, $\tau_3=\ln\zeta_3$ справедливо

$$t_1\,e^{-\lambda_1}\leqslant\xi_1\leqslant t_1\leqslant\zeta_0\leqslant t_2\leqslant t_3\leqslant\zeta_3\leqslant t_3\,e^{\lambda_2}. \tag{7.16′}$$

Если же уравнение (7.15) при $i=2$ имеет два корня, то s_2 и s_3 удовлетворяющие соотношениям (7.9) и (7.3) соответственно, дополнительно удовлетворяют неравенству $s_2\leqslant s_3$. Это также следует из простых геометрических рассуждений. В этом случае мы положим

$$h_4(x)=B_4'H(x)=\begin{cases} B_3'(x_1,\ x_2)\,H(x) & \text{при} \quad x\leqslant s_2, \\ B_1'(x_3)\,H(x) & \text{при} \quad x\geqslant s_2. \end{cases} \tag{7.19}$$

Тогда имеем

$$t_1\,e^{-\lambda_1}\leqslant\xi_1\leqslant t_1\leqslant\xi_0(\xi_1,\ \xi_2)\leqslant t_2\leqslant\xi_2\leqslant\xi_3\leqslant t_3. \tag{7.20}$$

Учитывая свойства операторов $B_1'(x_i)$ и $B_3(x_1,\ x_2)$, а также неравенства (2.2) и (2.3), находим, что

$$\begin{aligned} &h_4(x)\leqslant H(x) \quad \text{при} \quad x\in[x_1,\ x_2] \quad \text{и} \quad x\geqslant x_3, \\ &h_4(x)\geqslant H(x) \quad \text{при} \quad x\in[x_2,\ x_3] \quad \text{и} \quad x\leqslant x_1. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Определим на S' оператор $B_5'=B_5'(x_i,\ x_{i+1})$, положив

$$h_5(x)=B_5'(x_i,\ x_{i+1})\,H(x)=B_4'(-\infty,\ x_i,\ x_{i+1})\,H(x). \tag{7.22}$$

Оператор $B'_6(x_1, x_2, x_3)$ определим на S' следующим образом. Если уравнение (7.15) не имеет корней при $i=1$, то положим

$$h_6(x)=B'_6 H(x)=\begin{cases} \Delta_1 e^{\rho x} & \text{при} \quad x\leqslant\tau_1, \\ y(x_1,\ x_2;\ x) & \text{при} \quad \tau_1\leqslant x\leqslant\tau_2, \\ B_2(x_3)H(x) & \text{при} \quad \tau_2\leqslant x, \end{cases} \tag{7.23}$$

где τ_1 удовлетворяет уравнению

$$\Delta_1 e^{\rho\tau_1}=y(x_1,\ x_2;\ \tau_1),\ \tau_1\leqslant x_1, \tag{7.24}$$

а τ_2 — уравнению

$$y(x_1,\ x_2;\ \tau_2)=h_2(\tau_2),\ x_2\leqslant\tau_2\leqslant x_3. \tag{7.25}$$

В последнем равенстве $h_2(x)=B_2(x_3)\,H(x)$. Такие точки τ_1 и τ_2 единственны. Это следует из (7.8) и элементарных геометрических соображений, связанных с выпуклостью рассматриваемых кривых. Как и раньше, получаем неравенства

$$t_1 e^{-\lambda_1}\leqslant e^{\tau_1}\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant e^{\tau_2}\leqslant t_3\leqslant\xi_3\leqslant t_3 e^{\lambda_3}. \tag{7.26}$$

Если же уравнение (7.15) при $i=1$ имеет два корня, то s_1 и s_2, удовлетворяющие соотношениям (7.9) и (7.3) соответственно, дополнительно удовлетворяют неравенству $s_2\leqslant s_3$. В этом случае мы положим

$$h_6(x)=B'_6 H(x)=\begin{cases} B'_2(x_1)H(x) & \text{при} \quad x\leqslant s_1, \\ B'_3(x_2,\ x_3)H(x) & \text{при} \quad x\geqslant s_1. \end{cases} \tag{7.23'}$$

Тогда справедливы неравенства

$$t_1\leqslant\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant t_2\leqslant\xi_0(\xi_2,\ \xi_3)\leqslant t_3\leqslant\xi_3\leqslant t_3 e^{\lambda_3}. \tag{7.27}$$

Учитывая свойства операторов B'_2 и B'_3, а также неравенства (2.2) и (2.3), находим, что

$$\begin{aligned} &h_6(x)\geqslant H(x) \quad \text{при} \quad x_1\leqslant x\leqslant x_2,\ x\geqslant x_3, \\ &h_6(x)\leqslant H(x) \quad \text{при} \quad x_1\leqslant x,\ x_2\leqslant x\leqslant x_3. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Класс функций, в который оператор B'_k отображает S', обозначим через $S'_k\in\in S'$. Класс функций $v_k(t)=A^{-1}h_k(\ln t)$ обозначим через R'_k. Очевидно, что

$$R'_k\subset R'. \tag{7.29}$$

§ 8. Нахождение максимума функционала F в классе R'

Пусть действительные функции $q(t)$, $\delta(t)$, $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ определены при $0<t<\infty$, $\delta(t)>0$, $F\big(q(t)\big)$ — линейный функционал. Класс функций $q(t)\in T_0$ (см. § 4), удовлетворяющих для некоторого $\delta>0$ условию $\delta\tau_1(t)\leqslant q(t)\leqslant\delta\tau_2(t)$, обозначим через $T'(\delta)$, $T'(1)=T'$.

Так же, как и лемма 1, доказывается ее обобщение.

Лемма 2. *Если для некоторого $r>0$ и функции $q(t)\in T_0$ выполняются неравенства*

$$\delta(r)\,\tau_1(t)\leqslant q(rt)\leqslant\delta(r)\,\tau_2(t),$$

то $q(rt)\in T'\big(\delta(r)\big)$ и

$$\sup_{q(rt)\in T'(\delta(r))} F\Big(q(rt)\Big)=\delta(r)\sup_{q(t)\in T'} F\Big(q(t)\Big). \tag{8.1}$$

Далее $x_i=\ln t_i$, где t_i — нуль ядра $L(t)$ (см. (1.5)). Заметим, что $A^{-1}H(x)==D^+H(x)$, где D^+ означает правостороннюю производную.

Рассмотрим следующие случаи.

1°. $\varphi\in\Phi_{00}(+)$. Так как $L(t)>0$ при $0<t<\infty$, то, очевидно,

$$\sup_{\nu(t)\in R'} F\big(\nu(t)\big)=\Delta_2\int_0^\infty t^\rho L(t)\,dt=\Delta_2\rho\int_0^\infty t^\rho K(t)\,dt=$$

$$=\Delta_2\rho\,\frac{\pi\cos\rho(\varphi-\pi)}{\sin\pi\rho}=\rho l_1(\varphi,\ \rho,\ \Delta_1,\ \Delta_2). \tag{8.2}$$

2°. $\varphi\in\Phi_{00}(-)$. В этом случае $L(t)<0$ при $0<t<\infty$, и

$$\sup_{\nu(t)\in R'} F\big(\nu(t)\big)=\rho\Delta_1\int_0^\infty t^\rho K(t)\,dt=\rho l_1(\varphi,\ \rho,\ \Delta_1,\ \Delta_2)=$$

$$=\rho\Delta_1\,\frac{\cos\rho(\varphi-\pi)}{\sin\pi\rho}\ . \tag{8.3}$$

3°. $\varphi\in\Phi_{11}(+)$. Учитывая определение множества $\Phi_{11}(+)$ и неравенства (7.6), (7.6′), получим для $k=1$

$$F\big(A^{-1}H(\ln t)\big)=F_1\big(H(\ln t)\big)\leqslant F_1\big(h_k(\ln t)\big)=F\big(A^{-1}h_k(\ln t)\big)\ . \tag{8.4}$$

Здесь $h_1(x)=B_1(x_1)\,H(x)$. Отсюда в силу (7.29) имеем для $k=1$

$$\sup_{\nu(t)\in R'} F\big(\nu(t)\big)=\sup_{\nu(t)\in R'_k} F\big(\nu(t)\big)\,. \tag{8.5}$$

Из соотношения (7.2) находим

$$\frac{1}{\rho}\,A^{-1}h_1(\ln t)=\begin{cases}\Delta_2 t^\rho & \text{при}\quad 0<t<\xi_1,\\ \Delta_2\xi_1^\rho & \text{при}\quad \xi_1\leqslant t<\xi_1 e^{\lambda_1},\\ \Delta_1 t^\rho & \text{при}\quad \xi_1 e^{\lambda_1}\leqslant t<+\infty.\end{cases}$$

Равенство (8.5) перепишется, следовательно, в силу (7.7) таким образом

$$\sup_{\nu(t)\in R'} F\big(\nu(t)\big)=\max_{t_1e^{-\lambda_1}\leqslant\xi_1\leqslant t_1}\rho\,\Big\{\Delta_2\int_0^{\xi_1} t^\rho K(t)\,dt+$$

$$+\Delta_2\xi_1^\rho\int_{\xi_1}^{\xi_1e^{\lambda_1}} K(t)\,dt+\Delta_1\int_{\xi_1e^{\lambda_1}}^\infty t^\rho K(t)\,dt\Big\}=\rho\max_{t_1e^{-\lambda_1}\leqslant\xi_1\leqslant t_1} X_1(\xi_1).$$

Найдем

$$\frac{dX_1(\xi_1)}{d\xi_1}=\xi_1^{\rho-1}\left\{\xi_1 e^{\lambda_1}K(\xi_1e^{\lambda_1})\,[\Delta_2-\Delta_1e^{\rho\lambda_1}]-\rho\Delta_2\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right|\Big|_{t=\xi_1}^{t=\xi_1e^{\lambda_1}}\right\}. \tag{8.6}$$

Запишем уравнение по ξ_1

$$\frac{dX_1(\xi_1)}{d\xi_1}=0. \tag{8.7}$$

Учитывая равенства (7.4), (4.9) и (4.10), перепишем уравнение (8.7) в виде

$$\psi'\ \ (s_1+\lambda_1)=\frac{\psi(s_1+\lambda_1)-\psi(s_1)}{\lambda_1}\ . \tag{8.8}$$

Так как функция $\psi(x)$ строго выпукла вниз на промежутке $(-\infty,\ x_1]$ и строго выпукла вверх на промежутке $[x_1,\ +\infty)$ (см. § 2), то

$$\psi'(x_1)-\frac{\psi(x_1)-\psi(x_1-\lambda_1)}{\lambda_1}>0$$

и

$$\psi'(x_1+\lambda_1)-\frac{\psi(x_1+\lambda_1)-\psi(x_1)}{\lambda_1}<0,$$

т. е.

$$\frac{dX(te^{-\lambda_1})}{d\xi_1}>0, \qquad \frac{dX(t_1)}{d\xi_1}<0.$$

Таким образом, точку максимума функции $X_1(\xi_1)$ на промежутке $[t_1 e^{-\lambda_1}, t_1]$ можем находить из необходимого условия экстремума (8.7).

Рассмотрим уравнение для определения $\Theta=\Theta(\omega)$ при $x_1\leqslant\omega<+\infty$

$$\psi(\Theta)=\psi'(\omega)(\Theta-\omega)+\psi(\omega). \tag{8.9}$$

В силу указанного поведения функции $\psi(x)$ заключаем, что это уравнение имеет единственный корень $\Theta(\omega)<x_1$ при каждом $\omega>x_1$. Как в п. 4 § 4, показывается, что разность $\omega-\Theta(\omega)$ строго монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ и, следовательно, принимает значение λ_1 в единственной точке ω^*. Число $s_1^*=\omega^*-\lambda_1$ — требуемый единственный корень уравнения (8.8). Обозначим $\xi_1^*(\varphi)=\alpha_1(\varphi)$, тогда

$$l_1(\varphi,\ \rho,\ \Delta_1,\ \Delta_2)=\Delta_2\int\limits_0^{\alpha_1(\varphi)} t^\rho K(t)\,dt+\Delta_2\alpha_1^\rho(\varphi)\int\limits_{\alpha_1(\varphi)}^{\alpha_1(\varphi)e^{\lambda_1}} K(t)\,dt+$$
$$+\Delta_1\int\limits_{\alpha_1(\varphi)e^{\lambda_1}}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt \tag{8.10}$$

при $\varphi\in\Phi_{11}(+)$.

4°. $\varphi\in\Phi_{11}(-)$. Из неравенств (7.10), (7.10′) и определения $\Phi_{11}(-)$ получаем соотношения (8.4) и (8.5) для $k=2$, где $h_2(x)=B_2'(x_1)\,H(x)$. Таким образом, учитывая (7.8) и (7.11), находим

$$\sup_{\nu(t)\in R'} F\big(\nu(t)\big)=\rho\max_{t_1\leqslant\xi_1\leqslant t_1e^{\lambda_2}}\Bigg\{\Delta_1\int\limits_0^{\xi_1e^{-\lambda_2}} t^\rho K(t)\,dt+$$
$$+\Delta_2\xi_1^\rho\int\limits_{\xi_1e^{-\lambda_2}}^{\xi_1} K(t)\,dt+\Delta_2\int\limits_{\xi_1}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt=\rho\max_{t_1\leqslant\xi_1\leqslant t_1e^{-\lambda_2}} X_2(\xi_1).$$

Точку максимума функции $X_2(\xi_1)$ обозначим через $\xi_1^*=\xi_1^*(\varphi)=\beta_1(\varphi)$. Можно показать, что $s_1^*=\ln\xi_1^*$ находится как единственная точка, удовлетворяющая необходимому условию экстремума, которое при введенных ранее обозначениях запишется в виде

$$\psi'(s_1-\lambda_2)=\frac{\psi(s_1)-\psi(s_1-\lambda_2)}{\lambda_2}.$$

Обозначим при $\varphi\in\Phi_{11}(-)$

$$l_1(\varphi,\ \rho,\ \Delta_1,\ \Delta_2)=\Delta_1\int\limits_0^{\beta_1(\varphi)e^{-\lambda_2}} t^\rho K(t)\,dt+\Delta_2\beta_1^\rho(\varphi)\int\limits_{\beta_1(\varphi)e^{-\lambda_2}}^{\beta_1(\varphi)} K(t)\,dt+$$
$$+\Delta_2\int\limits_{\beta_1(\varphi)}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt. \tag{8.11}$$

5°. $\varphi\in\Phi_{02}(+)$. В силу (7.14), (7.24) и определения множества $\Phi_{02}(+)$ получаем неравенства (8.4) и (8.5) для $k=3$.

Рассмотрим прямоугольник

$$\Xi=\{(\xi_1,\ \xi_2): t_1 e^{-\lambda_1}\leqslant \xi_1\leqslant t_1,\ t_2\leqslant \xi_2\leqslant t_2 e^{\lambda_2}\}.$$

Через Ξ_1 обозначим подмножество из Ξ, координаты точек которого удовлетворяют дополнительному неравенству $\xi_2 e^{-\lambda_2}\geqslant \xi_1 e^{\lambda_1}$. Положим $\Xi_2=\Xi\setminus\Xi_1$. При $(\xi_1,\ \xi_2)\in\Xi_1$ обозначим

$$X_3(\xi_1,\ \xi_2)=\Delta_2\int\limits_0^{\xi_1} t^\rho K(t)\,dt+\Delta_2\xi_1^\rho\int\limits_{\xi_1}^{\xi_1 e^{\lambda_1}} K(t)\,dt+$$

$$+\Delta_1\int\limits_{\xi_1 e^{\lambda_1}}^{\xi_2 e^{\lambda_2}} t^\rho K(t)\,dt+\Delta_2\xi_2^\rho\int\limits_{\xi_2 e^{-\lambda_1}}^{\xi_2} K(t)\,dt+\Delta_2\int\limits_{\xi_2}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt. \tag{8.12}$$

Если же $(\xi_1,\ \xi_2)\in\Xi_2$, то обозначим

$$X_3(\xi_1,\ \xi_2)=\Delta_1\left\{\int\limits_0^{\xi_1} t^\rho K(t)\,dt+\xi_1^\rho\int\limits_{\xi_1}^{\xi_0(\xi_1,\ \xi_2)} K(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\xi_2^\rho\int\limits_{\xi_0(\xi_1,\ \xi_2)}^{\xi_2} K(t)\,dt+\int\limits_{\xi_2}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt\right\}. \tag{8.13}$$

Тогда, находя $A^{-1}h_3(x)$, в силу (7.7) и (7.11), равенство (8.4) для $k=3$ перепишем в виде

$$\sup_{\nu(t)\in R'} F(\nu(t))=\rho\max_{(\xi_1,\ \xi_2)\in\Xi} X_3(\xi_1,\ \xi_2).$$

Учитывая определение функции $\xi_0(\xi_1,\ \xi_2)$, легко проверить, что функция $X_3(\xi_1,\ \xi_2)$ непрерывна по обоим переменным в Ξ. Координаты точки максимума $(\xi_1^*,\ \xi_2^*)$ обозначим $\xi_1^*=\alpha_1(\varphi)$, $\xi_2^*=\beta_1(\varphi)$. Можно проверить также, что функция $X_3(\xi_1,\ \xi_2)$ непрерывно дифференцируема в Ξ по обоим переменным, и точка $(\xi_1^*,\ \xi_2^*)$ является единственной точкой, удовлетворяющей необходимому условию экстремума внутри Ξ. Обозначим $\xi_1^*=\alpha_1(\varphi)$, $\xi_2^*=\beta_1(\varphi)$ при $\varphi\in\Phi_{02}(+)$ и

$$l_1(\varphi,\ \rho,\ \Delta_1,\ \Delta_2)=X_3(\alpha_1(\varphi),\ \beta_1(\varphi)).$$

Множество тех $\varphi\in\Phi_{02}(+)$, для которых $(\alpha_1(\varphi),\ \beta_1(\varphi))\in\Xi_1$, обозначим через $\Phi_{02}^\lambda(+)$, $\Phi_{02}^0(+)=\Phi_{02}(+)\setminus\Phi_{02}^\lambda(+)$.

6°. $\varphi\in\Phi_{13}(+)$. Как и ранее, получаем соотношения (8.4) и (8.5) для $k=4$. Переобозначим $\xi_0=\zeta_0$, $\xi_2=\zeta_2$, $\xi_3 e^{\lambda_1}=\zeta_3$ и будем считать ζ_0 независимой переменной, а $\zeta_2=\zeta_2(\xi_1,\ \zeta_0)$ — функцией от двух переменных ξ_1 и ζ_0, ее мы определим равенством (3.16′), положив $\xi_0=\zeta_0$, $\xi_2=\zeta_2$ при $\zeta_0\leqslant\xi_1 e^{\lambda_1}$ и $\zeta_2(\xi_1,\ \zeta_0)=\zeta_0 e^{\lambda_2}$ при $\zeta_0\geqslant\xi_1 e^{\lambda_1}$. Учитывая равенства (7.17) и (7.18), запишем при $\zeta_0\leqslant\xi_1 e^{\lambda_1}$

$$\frac{H(x_3)-H(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{\Delta_1\zeta_3^\rho-\Delta_2\xi_1^\rho[\rho(\ln\zeta_0-\ln\xi_1)+1]}{\ln\zeta_3-\ln\zeta_0}=\varkappa(\xi_1,\ \zeta_0,\ \zeta_3) \tag{8.14}$$

и при $\zeta_0\geqslant\xi_1 e^{\lambda_1}$

$$\frac{H(x_3)-H(x_2)}{x_3-x_2}=\Delta_1\frac{\zeta_3^\rho-\zeta_0^\rho}{\ln\zeta_3-\ln\zeta_0}=\varkappa(\xi_1,\ \zeta_0,\ \zeta_3). \tag{8.14′}$$

Непрерывность функций $\zeta_2(\xi_1,\ \zeta_0)$ и $\varkappa(\xi_1,\ \zeta_0,\ \zeta_3)$ легко проверяется.

Рассмотрим многогранник Z точек $M(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)$, координаты которых удовлетворяют условию (7.16), и определим следующие подмножества множества Z:

$$Z_1=\left\{ M(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3): M\in Z,\ \zeta_0>\xi_1 e^{\lambda_1},\ \zeta_2(\xi_1, \zeta_0)>\varkappa(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)\right\},$$

$$Z_2=\left\{ M(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3): M\in Z,\ \zeta_0\leqslant\xi_1 e^{\lambda_2},\ \zeta_2(\xi_1, \zeta_0)>\varkappa(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)\right\},$$

$$Z_3=\left\{ M(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3): M\in Z,\ \zeta_0>\xi_1 e^{\lambda_1},\ \zeta_2(\xi_1, \zeta_0)\leqslant\varkappa(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)\right\},$$

$$Z_4=\left\{ M(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3): M\in Z,\ \zeta_0\leqslant\xi_1 e^{\lambda_1},\ \zeta_2(\xi_1 \zeta_0)\leqslant\varkappa(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)\right\}.$$

Справедливо $Z=\bigcup\limits_{1}^{4} Z_j$. При $M\in Z_1$ положим

$$X_4(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3,)=\Delta_2\int\limits_0^{\xi_1} t^\rho K(t)\,dt+\Delta_2\xi_1^\rho\int\limits_{\xi_1}^{\xi_1 e^{\lambda_1}} K(t)\,dt+\Delta_1\int\limits_{\xi_1 e^{\lambda_1}}^{\zeta_0} t^\rho K(t)\,dt+$$

$$+\Delta_2\zeta_2^\rho\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_0 e^{\lambda_2}} K(t)\,dt+\Delta_2\int\limits_{\zeta_0 e^{\lambda_2}}^{\zeta_3 e^{-\lambda_2}} t^\rho K(t)\,dt+\Delta_2(\zeta_3 e^{-\lambda_1})^\rho\int\limits_{\zeta_3 e^{-\lambda_1}}^{\zeta_3} K(t)\,dt+$$

$$+\Delta_1\int\limits_{\zeta_3}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt,$$

при $M\in Z_2$

$$X_4(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)=\Delta_2\int\limits_0^{\xi_1} t^\rho K(t)\,dt+\Delta_2\xi_1^\rho\int\limits_{\xi_1}^{\zeta_0} K(t)\,dt+\Delta_2\zeta_2^\rho\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_0} K(t)\,dt+$$

$$+\Delta_2\int\limits_{\zeta_2}^{\zeta_3 e^{-\lambda_1}} t^\rho K(t)\,dt+\Delta_2\zeta_3^\rho e^{-\rho\lambda_2}\int\limits_{\zeta_3 e^{-\lambda_2}}^{\zeta_3} K(t)\,dt+\Delta_1\int\limits_{\zeta_3}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt,$$

при $M\in Z_3$

$$X_4(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)=\Delta_2\int\limits_0^{\xi_1} t^\rho K(t)\,dt+\Delta_2\xi_1^\rho\int\limits_{\xi_1}^{\xi_1 e^{\lambda_1}} K(t)\,dt+$$

$$+\Delta_1\int\limits_{\xi_1 e^{\lambda_1}}^{\zeta_0} t^\rho K(t)\,dt+\frac{1}{\rho}\varkappa(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_3} K(t)\,dt+\Delta_1\int\limits_{\zeta_3}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt,$$

при $M\in Z_4$

$$X_4(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)=\Delta_2\int\limits_0^{\xi_1} t^\rho K(t)\,dt+\Delta_2\xi_1^\rho\int\limits_{\xi_1}^{\zeta_0} K(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\rho}\varkappa(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_3} K(t)\,dt+\Delta_1\int\limits_{\zeta_3}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt.$$

Непрерывность функции $X_4(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)$ на границах Z_j проверяется непосредственно. Легко видеть, что функция $X_4(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)$ непрерывна в Z. Некоторую точку максимума* функции $X_4(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)$ в Z обозначим через $(\xi_1^*, \zeta_0^*, \zeta_3^*)$, $\xi_1^*=\alpha_1(\varphi)$, $\zeta_0^*=\beta_0(\varphi)$, $\zeta_3^*=\gamma_1(\varphi)$. Положим при $\varphi\in\Phi_{13}(+)$

$$l_1(\varphi, \rho, \Delta_1, \Delta_2)=X_4\left(\alpha_1(\varphi), \beta_0(\varphi), \gamma_1(\varphi)\right).$$

Из рассуждений, аналогичных проведенным в предшествующих пунктах, вытекает, что

$$\sup_{\nu(t)\in R'} F\left(\nu(t)\right)=\rho\max_{M\in Z} X_4(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3).$$

Множество тех $\varphi\in\Phi_{13}(+)$, для которых $\left(\alpha_1(\varphi), \beta_0(\varphi), \gamma_1(\varphi)\right)\in Z_q$, обозначим $\Phi_{13}^q(+)$, $q=1, \ldots, 4$.

7°. $\varphi\in\Phi_{12}\cup\Phi_{02}(-)$. Учитывая определение множеств Φ_{12}, $\Phi_{02}(-)$ и оператора B_5', как и ранее, приходим к соотношениям (8.4) и (8.5) для $k=5$, где $B_5'=B_5'(x_2, x_3)$ при $\varphi\in\Phi_{12}$ и $B_5'=B_5'(x_1, x_2)$ при $\varphi\in\Phi_{02}(-)$. Находя $A^{-1}h_5(x)$, получаем из (8.5)

$$\sup_{\nu(t)\in R'} F\left(\nu(t)\right) = \max_{(\zeta_0, \zeta_3)\in Z'} X_5(\zeta_0, \zeta_3),$$

где Z' — прямоугольник, в который вырождается многогранник Z, определенный в п. 6° при $\xi_1\to-\infty$, аналогично определяются Z_1', Z_3', а

$$X_5(\zeta_0, \zeta_3)=\Delta_1\int_0^{\zeta_0} t^\rho K(t)\,dt+\Delta_2\zeta_2^\rho\int_{\zeta_0}^{\zeta_0 e^{\lambda_2}} K(t)\,dt+$$
$$+\Delta_2\int_{\zeta_0 e^{\lambda_2}}^{\zeta_3 e^{-\lambda_2}} t^\rho K(t)\,dt+\Delta_2\zeta_3^\rho e^{-\rho\lambda_1}\int_{\zeta_3 e^{-\lambda_1}}^{\zeta_3} K(t)\,dt+\Delta_1\int_{\zeta_3}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt$$

при $(\zeta_0, \zeta_3)\in Z_1'$ и

$$X_5(\zeta_0, \zeta_3)=\Delta_1\int_0^{\zeta_0} t^\rho K(t)\,dt+\varkappa(-\infty, \zeta_0, \zeta_3)\int_{\zeta_0}^{\zeta_3} K(t)\,dt+\Delta_1\int_{\zeta_3}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt$$

при $(\zeta_0, \zeta_3)\in Z_3'$. Некоторую точку максимума функции $X_5(\zeta_0, \zeta_3)$ в Z' обозначим через (ζ_0^*, ζ_3^*), $\zeta_0^*=\beta_0(\varphi)$, $\zeta_3^*=\gamma_1(\varphi)$. Положим

$$l_1(\varphi, \rho, \Delta_1, \Delta_2)=X_5\left(\beta_0(\varphi), \gamma_1(\varphi)\right).$$

Множество тех φ из Φ_{12}, для которых $\left(\beta_0(\varphi), \gamma_1(\varphi)\right)\in Z_1'$ обозначим через Φ_{12}^λ, $\Phi_{12}^0=\Phi_{12}\backslash\Phi_{12}^\lambda$. Так же определяются множества $\Phi_{02}^\lambda(-)$, $\Phi_{02}^0(-)$.

8°. $\varphi\in\Phi_{13}(-)$. Как и ранее заключаем о справедливости соотношений (8.4) и (8.5) для $k=6$. Переобозначим $e^{\tau_1}=\zeta_0$, $e^{\tau_2}=\zeta_3$, $\xi_0=\zeta_0$. Тогда

$$\sup_{\nu(t)\in R'} F\left(\nu(t)\right)=\rho\max_{(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)\in Z''} X_6(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3),$$

* Вопрос о том, единственна ли эта точка и является ли она внутренней для множества Z, нам не удалось разрешить.

где Z'' — некоторый замкнутый многогранник, а $X_6(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)$ — некоторая непрерывная функция в Z''. Обозначим одну из точек максимума функции X_6 через $(\alpha_2(\varphi), \beta_2(\varphi), \gamma_2(\varphi))$ и положим

$$l_1(\varphi, \rho, \Delta_1, \Delta_2) = \Delta_1 \int_0^{\alpha_2} t^\rho K(t)\,dt + \Delta_2 \alpha_2^\rho e^{\rho\lambda_2} \int_{\alpha_2}^{\alpha_2 \lambda_2} K(t)\,dt + \Delta_2 \int_{\alpha_2 e^{\lambda_2}}^{\beta_2 e^{-\lambda_1}} t^\rho K(t)\,dt +$$

$$+ \Delta_2 \beta_2^\rho e^{-\rho\lambda_1} \int_{\beta_2 e^{-\lambda_1}}^{\beta_2} K(t)\,dt + \Delta_1 \int_{\beta_2}^{\gamma_2 e^{-\lambda_2}} t^\rho K(t)\,dt + \Delta_2 \gamma_2^\rho \int_{\gamma_2 e^{-\lambda_2}}^{\gamma_2} K(t)\,dt + \Delta_2 \int_{\gamma_2}^{\infty} K(t)\,dt$$

при $\varphi \in \Phi_{13}^1\ (-)$,

$$l_1(\varphi, \rho, \Delta_1, \Delta_2) = \Delta_1 \int_0^{\alpha_2} t^\rho K(t)\,dt + \Delta_1 \alpha_2^\rho e^{\rho\lambda_2} \int_{\alpha_2}^{\alpha_2 e^{\lambda_2}} K(t)\,dt +$$

$$+ \Delta_2 \int_{\alpha_2 e^{\lambda_2}}^{\tilde{\zeta}_2} t^\rho K(t)\,dt + \Delta_2 \tilde{\zeta}_2^\rho(\beta_2, \gamma_2) \int_{\zeta_2}^{\beta_2} K(t)\,dt + \Delta_2 \gamma_2^\rho \int_{\beta_2}^{\lambda_2} K(t)\,dt +$$

$$+ \Delta_2 \int_{\gamma_2}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt$$

при $\varphi \in \Phi_{13}^2\ (-)$,

$$l_1(\varphi, \rho, \Delta_1, \Delta_2) = \Delta_1 \int_0^{\alpha_2} t^\rho K(t)\,dt + \frac{1}{\rho}\, \tilde{\varkappa}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K(t)\,dt +$$

$$+ \Delta_1 \int_{\beta_2}^{\gamma_2 e^{-\lambda_2}} t^\rho K(t)\,dt + \Delta_2 \gamma_2^\rho \int_{\gamma_2 e^{-\lambda_2}}^{\gamma_2} K(t)\,dt + \Delta_2 \int_{\lambda_2}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt$$

при $\varphi \in \Phi_{13}^3\ (-)$,

$$l_1(\varphi, \rho, \Delta_1, \Delta_2) = \Delta_1 \int_0^{\alpha_2} t^\rho K(t)\,dt + \frac{1}{\rho}\, \tilde{\varkappa}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K(t)\,dt +$$

$$+ \Delta_2 \gamma_2^\rho \int_{\beta_2}^{\gamma_2} K(t)\,dt + \Delta_2 \int_{\gamma_2}^{\infty} t^\rho K(t)\,dt$$

при $\varphi \in \Phi_{13}^4\ (-)$.

Здесь функции $\tilde{\zeta}_2(\zeta_0, \zeta_3)$ и $\tilde{\varkappa}(\xi_1, \zeta_0, \xi_3)$ определяются аналогично тому, как были определены $\zeta_2(\xi_1, \zeta_0)$ и $\tilde{\varkappa}(\xi_1, \zeta_0, \zeta_3)$, а именно: полагая в формуле (3.16′) $\zeta_0 = \xi_0$, $\xi_1 = \xi_3$, $\xi_2 = \tilde{\zeta}_2$, при $\zeta_0 > \xi_3 e^{-\lambda_2}$ определяем $\tilde{\zeta}_2$ как функцию от ξ_1 и ζ_0, при $\zeta_0 \leqslant \xi_3 e^{-\lambda_2}$ полагаем $\tilde{\zeta}_2(\zeta_0, \xi_3) = \zeta_0 e^{-\lambda_1}$; при $\zeta_0 \geqslant \xi_3 e^{-\lambda_2}$ функция $\tilde{\varkappa}(\xi_1, \zeta_0, \xi_3)$ имеет вид

$$\tilde{\varkappa}(\xi_1, \zeta_0, \xi_3) = \frac{\Delta_2 \xi_3^\rho [\rho(\ln \zeta_0 - \ln \xi_3) + 1] - \Delta_1 \xi_1^\rho}{\ln \zeta_0 - \ln \xi_1},$$

если же $\zeta_0 \leqslant \xi_3 e^{-\lambda_2}$, то

$$\tilde{\varkappa}(\xi_1, \zeta_0, \xi_3) = \Delta_1 \frac{\zeta_0^\rho - \xi_1^\rho}{\ln \zeta_0 - \ln \xi_1}.$$

Заметим, что функция $A^{-1} h_6(\ln t)$, на которой достигается максимум функционала F при $\varphi \in \Phi_{13}\ (-)$ принадлежит $R_6' \subset R'$.

§ 9. Доказательство теоремы 3

Обозначим функцию $r^{\rho(r)}$ через $V(r)$. Можем считать, не уменьшая общности, что для всех r, $0<r<\infty$,

$$\begin{aligned} &t^{\rho-\delta} V(r)\leqslant V(rt)\leqslant t^{\rho+\delta} V(r) \quad \text{при} \quad 1\leqslant t<\infty, \\ &t^{\rho+\delta} V(r)\leqslant V(rt)\leqslant t^{\rho-\delta} V(r) \quad \text{при} \quad 0<t\leqslant 1, \end{aligned} \tag{9.1}$$

где $0<\delta<\min(\rho-p,\ p+1-\delta)$ (ср. [7], стр. 171). Не уменьшая общности, можем считать также, что для каждого промежутка $[\varepsilon_0,\ \eta]\in(0,\ \infty)$, $(\Delta_2+ +e)\,\varepsilon_0<\min\left(1,\ \frac{\Delta_2}{2}\right)$, $\eta>1$, существует r_0 такое, что при $r>r_0$, $t\in[\varepsilon_0,\ \eta]$ выполняется

$$(t^\rho-\varepsilon_0^{\rho+1})\ V(r)\leqslant V(rt)\leqslant(t^\rho+\varepsilon_0^{\rho+1})\ V(r) \tag{9.2}$$

и

$$(\Delta_1-\varepsilon_0^{\rho+1})\ V(rt)\leqslant N_f(rt)\leqslant(\Delta_2+\varepsilon_0^{\rho+1})\ V(rt). \tag{9.3}$$

Эти неравенства являются непосредственным следствием свойства 2) уточненного порядка из [2] (стр. 49).

Комбинируя неравенства (9.1), (9.2) и (9.3), получаем для

$$r>r_0'\geqslant r_0,\quad \varepsilon=\varepsilon_0(\Delta_2+e)$$

$$\begin{aligned} &(\Delta_1-\varepsilon)\ V(r)\,t^{\rho+\delta}\leqslant N_f(rt)\leqslant(\Delta_2+\varepsilon)\ V(r)\,t^{\rho-\delta} \quad \text{при} \quad 0<t<\varepsilon_0, \\ &(\Delta_1-\varepsilon)\ V(r)\,t^{\rho}\leqslant N_f(rt)\leqslant(\Delta_2+\varepsilon)\ V(r)\,t^{\rho} \quad \text{при} \quad \varepsilon_0\leqslant t\leqslant\eta, \\ &(\Delta_1-\varepsilon)\ V(r)\,t^{\rho-\delta}\leqslant N_f(rt)\leqslant(\Delta_2+\varepsilon)\ V(r)\,t^{\rho+\delta} \quad \text{при} \quad \eta<t<\infty. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Действительно, при $\varepsilon_0\leqslant t\leqslant\eta$ имеем

$$\begin{aligned} &(\Delta_1-\varepsilon_0^{\rho+1})\,(t^\rho-\varepsilon_0^{\rho+1})\ V(r)=t^\rho\left[\Delta_1-\varepsilon_0^{\rho+1}\left(1+\frac{\Delta_1-\varepsilon_0^{\rho+1}}{t^\rho}\right)\right]V(r)\geqslant \\ &\geqslant t^\rho\left[\Delta_1-\varepsilon_0^{\rho+1}\left(1+\frac{\Delta_1}{\varepsilon_0^\rho}\right)\right]V(r)\geqslant \\ &\geqslant V(r)\,t^\rho\,\{\Delta_1-\varepsilon_0(\Delta_1+1)\}\geqslant V(r)\,t^\rho(\Delta_1-\varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда следует левая половина второго из неравенств (9.4). Остальные неравенства (9.4) доказываются так же, как это или как неравенство (5.5).

Из (3) следует существование последовательности $r_k\to\infty$ такой, что для $\varepsilon=\varepsilon_0\,(\Delta_2+e)$ и $k\geqslant k_0$, $r_{k_0}>r_0$ выполняется

$$h(\varphi;\ f)-\varepsilon\leqslant\frac{F\big(n_f(r_k t)\big)}{V(r_k)}\leqslant\sup_{\nu(tr_k)\in R_V^\sigma}\frac{F\big(\nu(r_k t)\big)}{V(r_k)}, \tag{9.5}$$

где $R_V^\sigma=R_V^\sigma\Big((\Delta_1-\varepsilon)\ V(r),\ (\Delta_2+\varepsilon)\ V(r)\Big)$ — класс неубывающих функций $\nu(rt)$, $0<t<\infty$, $r>r_k>r_0$, удовлетворяющих условию (9.4), где вместо $N_f(rt)$ стоит $A\nu(rt)$. Используя лемму 2 и (9.5), приходим к неравенству

$$h(\varphi;\ f)-\varepsilon\leqslant\sup_{\nu(t)\in R_1^\sigma}F\Big(\nu(t)\Big). \tag{9.6}$$

Значения функционала $F\Big(\nu(t)\Big)$ ограничены в R_1^σ (см. § 5). В классе R_1^σ существует функция $\nu_0(t)$ такая, что

$$\sup_{\nu(t)\in R_1^\sigma}F\Big(\nu(t)\Big)\leqslant F\Big(\nu_0(t)\Big)+\varepsilon.$$

Следовательно, неравенство (9.6) можно переписать в виде

$$h(\varphi;\, f)-2\varepsilon \leqslant F\big(\nu_0(t)\big)\,. \tag{9.7}$$

Предполагая дополнительно $\varepsilon_0<\eta\, e^{\lambda_1+\lambda_2}$, построим функцию

$$h_0^*(x)=\begin{cases} B_1(\ln\varepsilon_0+\lambda_1)\,h_0(x) & \text{при} \quad x\leqslant \ln\varepsilon_0+\lambda_1,\\ h_0(x) & \text{при} \quad \ln\varepsilon_0+\lambda_1\leqslant x\leqslant \ln\eta-\lambda_2,\\ B_2(\ln\eta-\lambda_2)\,h_0(x) & \text{при} \quad x\geqslant \ln\eta-\lambda_2. \end{cases}$$

При этом в определении λ_1, λ_2, B_1 и B_2 вместо Δ_1 и Δ_2 берем $\Delta_1-\varepsilon$ и $\Delta_2+\varepsilon$ соответственно. По построению $\nu_0^*(t)=A^{-1}h_0^*(\ln t)\in R'(\Delta_1-\varepsilon,\ \Delta_2+\varepsilon)$. Далее,

$$|F(\nu_0(t))-F(\nu_0^*(t))|=|F_1(A\nu_0(t))-F_1(A\nu_0^*(t))|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{\varepsilon e^{\lambda_1}}[A\nu_0(t)+A\nu_0^*(t)]\,|L(t)|\,dt+\int\limits_{\eta e^{-\lambda_2}}^{\infty}[A\nu_0(t)+A\nu_0^*(t)]\,|L(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\Delta_2\int\limits_0^{\varepsilon_0 e^{\lambda_1}}(t^{\rho}+t^{\rho-\delta})\,|L(t)|\,dt|+\int\limits_{\eta e^{-\lambda_2}}^{\infty}(t^{\rho}+t^{\rho+\delta})\,|L(t)|\,dt. \tag{9.8}$$

В силу выбора δ для произвольно малого $\varepsilon_1>0$ можно выбрать ε_0 столь малым, а η столь большим, что в силу (9.8) получим

$$F\big(\nu_0(t)\big)\leqslant F\big(\nu_0^*(t)\big)+\varepsilon_1.$$

Неравенство (9.7) можно переписать теперь следующим образом

$$h(\varphi;\, f)-2\varepsilon-\varepsilon_1\leqslant F\big((\nu_0^*(t)\big)=F_1\big(h_0^*(\ln t)\big)\,. \tag{9.9}$$

Рассмотрим функцию

$$h_1(x)=\max\left\{\frac{\Delta_2}{\Delta_2+\varepsilon}\,h_0^*(x),\quad \Delta_1 e^{\rho x}\right\}. \tag{9.10}$$

Она выпукла для всех x, и

$$\Delta_1 e^{\rho x}\leqslant h_1(x)\leqslant\Delta_2 e^{\rho x}.$$

Из (9.10) и соотношения $A^{-1}h_0(t)\in R(\Delta_1-\varepsilon,\ \Delta_2+\varepsilon)$ следует, что

$$|h_1(x)-h_0^*(x)|\leqslant\max\left\{\left(1-\frac{\Delta_2}{\Delta_2+\varepsilon}\right)(\Delta_2+\varepsilon)e^{\rho x},\ [\Delta_1-(\Delta_1-\varepsilon)]\,e^{\rho x}\right\}=\varepsilon e^{\rho x}.$$

Таким образом, обозначая $\nu_1(t)=A^{-1}\ h_1(\ln t)$, получим, что $\nu_1(t)\in R'(\Delta_1,\ \Delta_2)$ и

$$|F\big(\nu_1(t)\big)-F\big(\nu^*(t)\big)\leqslant\varepsilon\int\limits_0^{\infty}t^{\rho}\,|L(t)|\,dt=\varepsilon M.$$

Отсюда и из (9.10) получаем, что

$$\begin{aligned} h(\varphi;\, f)-\varepsilon(2+M)-\varepsilon_1\leqslant F\big(\nu_1(t)\big)\leqslant \sup_{\nu(t)\in R'(\Delta_1,\,\Delta_2)}F\big(\nu(t)\big)=\\ =\rho\, l_1(\varphi,\ \rho,\ \Delta_1,\ \Delta_2). \end{aligned} \tag{9.11}$$

В силу произвольной малости ε_1, ε_0, а, следовательно, и ε из (9.11) получаем правую часть неравенства (5) для $\varphi\in(0{,}2\pi)$. Непрерывность функции $l_1(\varphi)$ будет установлена позже.

Построим теперь функцию $f(z)$, для которой выполняется (6), аналогично тому, как это было сделано в § 5. Ограничимся случаем, когда $\rho(r)\equiv\rho$. Построение примера в общем случае проводится аналогично.

Пусть $\{r_k\}$ — строго монотонно возрастающая последовательность. Выбор ее мы уточним ниже. Обозначим

$$\alpha_i(\varphi_k)=\alpha_{ik},\ \beta_i(\varphi_k)=\beta_{ik},\ \gamma_i(\varphi_k)=\gamma_{ik},\ \xi_0(\alpha_{1k},\ \beta_{1k})=\xi_{0k},$$
$$\zeta_2(\beta_{1k},\ \gamma_{1k})=\zeta_{2k},\ \varkappa(\alpha_{1k},\ \beta_{0k},\ \gamma_{1k})=\varkappa_k,\ \tilde{\varkappa}(\alpha_{2k},\ \beta_{2k},\ \gamma_{2k})=\tilde{\varkappa}_k.$$

Здесь через $\{\varphi_k\}$ мы обозначаем последовательность

$$\tilde{\varphi}_1,\ \tilde{\varphi}_1,\ \tilde{\varphi}_2,\ \tilde{\varphi}_1,\ \tilde{\varphi}_2,\ \tilde{\varphi}_3,\ \tilde{\varphi}_1,\ \tilde{\varphi}_2,\ \tilde{\varphi}_3,\ \tilde{\varphi}_4,\ \ldots,$$

где $\{\tilde{\varphi}_k\}$ — некоторое счетное множество, плотное на $(0,2\pi)$, которое мы обозначим через Q.

Введем множества $J_j\,(j=1,2,\ldots,16)$ индексов k, каждое из которых соответствует в порядке записи множествам:

$$1)\ \Phi_{00}(+),\quad 2)\ \Phi_{00}(-),\quad 3)\ \Phi_{11}(+),\quad 4)\ \Phi_{11}(-),\quad 5)\ \Phi_{02}^{\lambda}(+),$$
$$6)\ \Phi_{02}^{0}(+),\quad 7)\ \Phi_{13}^{1}(+),\quad 8)\ \Phi_{13}^{2}(+),\quad 9)\ \Phi_{13}^{3}(+),\quad 10)\ \Phi_{13}^{4}(+),$$
$$11)\ \Phi_{02}^{\lambda}(-)\cup\Phi_{12}^{\lambda},\quad 12)\ \Phi_{02}^{0}(-)\cup\Phi_{12}^{0},\quad 13)\ \Phi_{13}^{1}(-),$$
$$14)\ \Phi_{13}^{2}(-),\quad 15)\ \Phi_{13}^{3}(-),\quad 16)\ \Phi_{13}^{4}(-),$$

а именно, $k\in J_j$, если φ_k принадлежит соответствующему множеству. Положим далее

$$p_{14k}=\sqrt{r_k}\ \text{ для всех } k,$$

$$p_{14k+1}=\begin{cases} r_k^2 & \text{при } k\in J_2,\\ \beta_{1k}e^{-\lambda_2}r_k & \text{при } k\in J_4,\\ \beta_{0k}r_k & \text{при } k\in J_{11},\\ \alpha_{2k}r_k & \text{при } k\in J_{13}\cup J_{14},\\ p_{14k} & \text{для остальных } k,\end{cases}$$

$$p_{14k+2}=\begin{cases} \beta_{1k}r_k, & k\in J_4,\\ \beta_{0k}e^{\lambda_2}r_k, & k\in J_{11},\\ p_{14k+1} & \text{для остальных } k,\end{cases}$$

$$p_{14k+3}=\begin{cases} r_k^2, & k\in J_4,\\ \gamma_{1k}e^{-\lambda_2}r_k, & k\in J_{11},\\ \zeta_{2k}r_k, & k\in J_{13}\cup J_{14},\\ \alpha_{1k}r_k, & k\in J_3\cup J_5\cup J_7\cup J_8\cup J_6,\\ p_{14k+2} & \text{для остальных } k,\end{cases}$$

$$p_{14k+4}=\begin{cases} \alpha_{1k}e^{\lambda_1}r_k, & k\in J_3\cup J_5\cup J_7,\\ \gamma_{1k}r_k, & k\in J_{11},\\ \beta_{0k},r_k, & k\in J_8,\\ \beta_{2k}r_k, & k\in J_{13}\cup J_{14},\\ \zeta_{0k}r_k, & k\in J_6,\\ p_{14k+3} & \text{для остальных } k,\end{cases}$$

$$p_{14k+5}=\begin{cases} r_k^2, & k\in J_3\cup J_{11},\\ \alpha_{2k}\,r_k, & k\in J_{15}\cup J_{16},\\ p_{14k+4} & \text{для остальных } k,\end{cases}$$

$$p_{14k+6}=\begin{cases} \beta_{2k}\,r_k, & k\in J_{15}\cup J_{16},\\ p_{14k+5} & \text{для остальных } k,\end{cases}$$

$$p_{14k+7}=\begin{cases} \beta_{1k}\,e^{-\lambda_1}r_k, & k\in J_5,\\ \gamma_{1k}\,e^{-\lambda_1}r_k, & k\in J_8,\\ \gamma_{2k}\,e^{-\lambda_2}r_k, & k\in J_{13}\cup J_{15},\\ p_{14k+6} & \text{для остальных } k,\end{cases}$$

$$p_{14k+8}=\begin{cases} \beta_{1k}\,r_k, & k\in J_5\cup J_6,\\ \gamma_{1k}\,r_k, & k\in J_7\cup J_8,\\ \gamma_{2k}\,r_k, & k\in J_{13}\cup J_{14}\cup J_{16},\\ p_{14k+7} & \text{для остальных } k,\end{cases}$$

$$p_{14k+9}=\begin{cases} r_k^2, & k\in J_5\cup J_6\cup J_7\cup J_8\cup J_{13}\cup J_{14}\cup J_{15}\cup J_{16},\\ \alpha_{1k}\,r_k, & k\in J_9\cup J_{10},\\ p_{14k+8} & \text{для остальных } k,\end{cases}$$

$$p_{14k+10}=\begin{cases} \alpha_{1k}\,e^{\lambda_1}r_k, & k\in J_9,\\ \beta_{0k}\,r_k, & k\in J_{10},\\ p_{14k+9} & \text{для остальных } k,\end{cases}$$

$$p_{14k+11}=\begin{cases} \beta_{0k}\,r_k, & k\in J_9\cup J_{12},\\ p_{14k+10} & \text{для остальных } k,\end{cases}$$

$$p_{14k+12}=\begin{cases} \gamma_{1k}\,r_k, & k\in J_9\cup J_{10}\cup J_{12},\\ p_{14k+11} & \text{для остальных } k,\end{cases}$$

$$p_{14k+13}=r_k^2 \text{ для всех } k.$$

Последовательность $\{r_k\}$ выберем так, чтобы

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{r_{k+1}}}{r_k^2}=0,\quad \frac{k}{r_k^\rho}\to 0\quad\text{при}\quad k\to\infty,$$

$$r>\max\{\alpha_{1k}^{-2},\ \alpha_{2k}^{-2},\ \xi_{0k}^2,\ \beta_{0k}^{-2},\ (\beta_{1k}e^{-\lambda_1})^{-2},\ \alpha_{1k}e^{\lambda_1},$$
$$\alpha_{2k},\ \beta_{0k},\ \beta_{1k}e^{-\lambda_1},\ \xi_{0k},\ \gamma_{1k},\ \gamma_{2k}\}.$$

Тогда $0<p_i\leqslant p_{i+1}$.

Построим теперь каноническое произведение $f(z)$ рода $p=[\rho]$, множество нулей которого определим по индукции. Будем считать, что $f(z)$ имеет нуль порядка $[\rho\Delta_1 p_0^\rho]$ в точке p_0, нули порядка $\max\{0,\ [\rho\Delta_1 p_{14k}^\rho]-n(p_{14k})\}$ в точках p_{14k}, где $n(r)$ — число нулей на отрезке $(0,\ r]$; нули порядка $[\rho\Delta_2 p_{14k+2}^\rho]-[\rho\Delta_1 p_{14k+1}^\rho]$ в точках p_{14k+1}, простые нули во всех точках вида $\left(\frac{\nu}{\Delta_2\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$, попадающих в интервалы $(p_{14k+2},\ p_{14k+3})$, $(p_{14k+8},\ p_{14k+9})$ и в точках вида $\left(\frac{\nu}{\Delta_1\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$, попадающих в интервалы $(p_{14k},\ p_{14k+1})$, $(p_{14k+2},\ p_{14k+4})$, $(p_{14k+4},\ p_{14k+5})$, $(p_{14k+6},\ p_{14k+7})$, $(p_{14k+10},\ p_{14k+11})$; нули порядка $[\rho\tilde{\varkappa}(p_{14k+5},\ p_{14k+6},\ p_{14k+7})]-[\rho\Delta_2 p_{14k+5}^\rho]$ в точках p_{14k+5}; нули порядка

$[\rho\Delta_2 p_{14k+4}^\rho]-[\rho\Delta_2 p_{14k+7}^\rho]$ в точках p_{14k+7}; нули порядка $[\rho\tilde{\varkappa}(p_{14k+10},\ p_{14k+11},\ p_{14k+12})]-[\rho\Delta_2 p_{14k+11}^\rho]$ в точках p_{14k+11}. Тогда

$$n_f(r)=\begin{cases}\rho\Delta_1 r^\rho, & r\in(p_{14k},\ p_{14k+1})\cup(p_{14k+4},\ p_{14k+5})\cup(p_{14k+6},\ p_{14k+7})\cup\\ \quad\cup(p_{14k+10},\ p_{14k+11})\cup(p_{14k+12},\ p_{14k+14}),\\ [\rho\Delta_2 p_{14k+2}^\rho], & r\in(p_{14k+1},\ p_{14k+2}),\\ [\rho\Delta_2 r^\rho], & r\in(p_{14k+2},\ p_{14k+3})\cup(p_{14k+8},\ p_{14k+9}),\\ [\rho\Delta_2 p_{14k+3}], & r\in(p_{14k+3},\ p_{14k+4}),\\ [\rho\tilde{\varkappa}(p_{14k+5},\ p_{14k+6},\ p_{14k+7})], & r\in(p_{14k+4},\ p_{14k+5}),\\ [\rho\Delta_2 p_{14k+8}^\rho], & r\in(p_{14k+7},\ p_{14k+8}),\\ [\rho\Delta_2 p_{14k+9}^\rho], & r\in(p_{14k+9},\ p_{14k+10}),\\ [\rho\varkappa(p_{14k+10},\ p_{14k+11},\ p_{14k+12})], & r\in(p_{14k+11},\ p_{14k+12}).\end{cases}$$

Можно проверить, что в силу определения последовательности $\{r_k\}$ и функций $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \zeta_2,\ \zeta_2,\ \varkappa,\ \tilde{\varkappa}$ выполняется

$$\Delta_1 r^\rho+o(r^\rho)\leqslant N_f(r)\leqslant\Delta_2 r^\rho+o(r^\rho).$$

Действительно, в силу определения чисел p_n функцию $N_f(r)$ можно представить в виде $N_f(r)=A\nu(r)+o(r^\rho)$, где $\nu(r)\in R'(\Delta_1,\ \Delta_2)$. Непосредственную проверку можно провести при $r\in[p_{14k+i},\ p_{14k+i+1}]$, $k\in J_j$ для каждого $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 13,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ 16$.

Пусть, например, $k\in J_6$, $r\in[p_{14k+7},\ p_{14k+8}]$, т. е. $r\in[\xi_{0k}r_k,\ \beta_{1k}r_k]$. Тогда $p_{14k}=p_{14k+1}=p_{14k+2},\ p_{14k+4}=p_{14k+5}=p_{14k+6}=p_{14k+7}$. Поскольку $n_f(p_{14k})=[\rho\Delta_1 p_{14k}^\rho]$ и $p_{14k}=\sqrt{r_k}$, то

$$\int\limits_0^{p_{14k}} n_f(t)\,d\ln(t)\leqslant\int\limits_{p_0}^{p_{14k}}(\rho\Delta_1 p_{14k}^\rho+1)\,d\ln t=$$

$$=\frac{1}{2}\rho\Delta_1\sqrt{r_k^\rho}\ln r_k+o(\ln r_k)=o(r_k^\rho)=o(r^\rho).$$

Таким образом

$$N_f(r)=\int\limits_0^{p_{14k}} n_f(t)\,d\ln t+\int\limits_{p_{14k+2}}^{p_{14k+3}} n_f(t)\,d\ln t+\int\limits_{p_{14k+3}}^{p_{14k+4}} n_f(t)\,d\ln t+$$

$$+\int\limits_{p_{14k+7}}^{r} n_f(t)\,d\ln t=\rho\Delta_1\int\limits_0^{\sqrt{r_k}} t^\rho\,d\ln t+\rho\Delta_2\int\limits_{\sqrt{r_k}}^{\alpha_{1k}r_k} t^\rho\,d\ln t+$$

$$+\rho\Delta_2(\alpha_{1k}r_k)^\rho\int\limits_{\alpha_{1k}r_k}^{\xi_{0k}r_k} d\ln t+\rho\Delta_2(\xi_{0k}r_k)^\rho\int\limits_{\xi_{0k}r_k}^{r} d\ln t+o(r^\rho).$$

Отсюда заключаем в силу определения $\alpha_{1k},\ \xi_{0k},\ \beta_{1k}$, что функция $N_f(r)$ представима в виде $N_f(r)=A\nu(r)+o(r^\rho)$, где $\nu(r)\in R'(\Delta_1,\ \Delta_2)$ и получаем требуемые оценки снизу и сверху для функции $N_f(r)$. Следовательно, $N_f(r)$ — не более чем нормального типа порядка ρ, и каноническое произведение рода $p=[\rho]$ абсолютно сходится, причем $f(z)$ — целая функция не более чем нормального типа порядка ρ.

Зафиксируем $\tilde{\varphi}_q \in Q$. Пусть $\varphi_{k_m} = \tilde{\varphi}_q$. Покажем, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln|f(r_{k_m} e^{i\varphi_q})|}{r_{k_m}^{\rho}} \geqslant \rho l_1(\tilde{\varphi}_q).$$

Для упрощения записи ниже вместо k_m будем писать k. Обозначим

$$f_1(re^{i\varphi}) = \prod_{a_\nu \leqslant p_{14k+1}} E\left(\frac{r}{a_\nu} e^{i\varphi}, p\right),$$

$$f_2(re^{i\varphi}) = \prod_{p_{14k-1} < a_\nu < p_{14k+14}} E\left(\frac{r}{a_\nu} e^{i\varphi}, p\right);$$

$$f_3(re^{i\varphi}) = \prod_{p_{14(k+1)} \geqslant a_\nu} E\left(\frac{r}{a_\nu} e^{i\varphi}, p\right).$$

Очевидно,

$$f(re^{i\varphi}) = \prod_{\alpha=1}^{3} f_\alpha(re^{i\varphi}).$$

Как и в § 5 (см. также [3]), можно показать, что

$$\left|\ln|f_1(r_k e^{i\varphi_k})|\right| = o(r_k^{\rho}),$$

$$\left|\ln|f_3(r_k e^{i\varphi_k})|\right| = o(r_k^{\rho}).$$

Пусть $n_k(r)$ – число нулей функции $f(z)$ на пересечении $(0, r] \cap [p_{14k-1}, p_{14(k+1)}]$. Тогда

$$\ln|f_2(re^{i\varphi})| = \int_0^\infty \ln\left|E\left(\frac{r_k}{\tau} e^{i\varphi_k}\right)\right| dn_k(\tau) =$$

$$= \int_{\frac{p_{14k-1}}{r_k}}^{\frac{p_{14k+14}}{r_k}} n_k(r_k t) K(t, \varphi_k)\, dt \geqslant \int_{\frac{p_{14k-1}}{r_k}}^{\frac{p_{14k+14}}{r_k}} n(r_k t) K(r_k t)\, dt -$$

$$- n(p_{14k-1}) \int_0^\infty |K(t, \varphi_k)|\, dt = \int_{\frac{p_{14k-1}}{r_k}}^{\frac{p_{14k+14}}{r_k}} n(r_k t) K(t, \varphi_k)\, dt + o(r_k^{\rho}).$$

Подставляя сюда значение $n(r)$ и учитывая определение p_i, получаем

$$\ln|f_2(r_k e^{i\varphi_k})| \geqslant r_k^{\rho} l_1(\varphi_k) + o(r_k^{\rho}).$$

Отсюда с учетом (5) получаем равенство (6) для построенной нами функции $f(z)$, которую мы обозначим через $f_Q(z)$ и $\varphi \in Q$.

Положим

$$\sup_{f(z) \in G(\rho(r), \Delta_1, \Delta_2)} h(\varphi; f) = \mathrm{H}(\varphi).$$

Отсюда следует, что функция Н (φ) тригонометрически выпукла и, следовательно, непрерывна. Из (5) вытекает неравенство

$$H(\varphi) \leqslant \rho l_1(\varphi).$$

Но для $\varphi \in Q$ и построенной нами функции имеем

$$H(\varphi) \leqslant \rho l_1(\varphi) = h(\varphi;\ f_Q),$$

т. е.

$$H(\varphi) = \rho l_1(\varphi),\quad \varphi \in Q \subset (0,\ 2\pi).$$

Так как множество Q — произвольное счетное множество, плотное на $(0{,}2\,\pi)$, то последнее равенство выполняется для всех $\varphi \in (0{,}2\,\pi)$. Таким образом, функция $l_1(\varphi)$ непрерывна и тригонометрически выпукла. Следовательно, равенство

$$\rho l_1(\varphi) = h(\varphi;\ f_Q)$$

выполняется для всех $\varphi \in (0{,}2\,\pi)$. Доопределив теперь функцию $l_1(\varphi)$ для $\varphi = 0$ по непрерывности, получим правую часть неравенства (5) для $\varphi \in [0{,}2\,\pi)$ и равенство (6) для $f(z) = f_Q(z)$ и $\varphi \in [0{,}2\,\pi)$.

Так же как в [6], стр. 414, можно показать, что левая часть неравенства (5) непосредственно следует из следующего неравенства, доказанного И. В. Островским (см. [8], стр. 30):

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{N_f(r)} \geqslant \frac{\pi\rho\cos\rho(\varphi-\pi)}{\sin\pi\rho} \geqslant \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{N_f(r)},$$

которое справедливо для всякой функции $f(z) \in G\left(\rho(r),\ \Delta_1,\ \Delta_2\right)$. Фукнции из класса $G\left(\rho(r),\ \Delta_1,\ \Delta_2\right)$, для которых имеет место равенство (6′), хорошо известны [2]. Тем самым доказательство теоремы 3 закончено.

§ 10. Оценки для индикаторов целых функций целого порядка

Теорема 4, которую мы сформулируем ниже, аналогична следствию 3 из [5] и является обобщением теоремы 2. Доказательство ее аналогично доказательству теоремы 2 и следствия 3 из [5], поэтому мы не приводим его здесь полностью.

Пусть $f(z) \in G\left(\rho(r),\ \Delta_1,\ \Delta_2\right)$ и ρ — целое число. Класс сходимости C и расходимости D, а также индикаторы $h_j(\varphi;\ f)$, функции $V_j(r)$, $j = 1,\ 2$ и число $\alpha(f)$ определим, как в [5] (см. также § 6).

Теорема 4. *Для всякой целой функции $f(z)$ целого порядка ρ справедливы неравенства*

$$\rho\left\{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\cos\rho\varphi - \frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}|\cos\rho\varphi|\right\} \leqslant h_1(\varphi;\ f) \leqslant$$
$$\leqslant \rho\left\{\frac{\Delta_2+\Delta_1}{2}\cos\rho\varphi + \frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}|\cos\rho\varphi|\right\} \tag{10.1}$$

при $\rho(r) \in D$ *и*

$$\rho\left\{-\frac{\Delta_2+\Delta_1}{2}\cos\rho\varphi - \frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}|\cos\rho\varphi|\right\} \leqslant h_2(\varphi;\ f) \leqslant$$
$$\leqslant \rho\left\{-\frac{\Delta_2+\Delta_1}{2}\cos\rho\varphi + \frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}|\cos\rho\varphi|\right\} \tag{10.2}$$

при

$$\rho(r)\in C \quad \text{и} \quad \alpha(f)=0.$$

Существует целая функция $f(z)\in G(\rho(r),\Delta_1,\Delta_2)$ *такая, что при* $\rho(r)\in D$

$$h_1(\varphi;f)\equiv\rho\left\{\frac{\Delta_2+\Delta_1}{2}\cos\rho\varphi+\frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}|\cos\rho\varphi|\right\}, \tag{10.3}$$

а при $\rho(r)\in C$ *и* $\alpha(f)=0$ — *такая, что*

$$h_2(\varphi;f)\equiv-\rho\,\frac{\Delta_2+\Delta_1}{2}\cos\rho\varphi+\rho\,\frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}|\cos\rho\varphi|. \tag{10.4}$$

Для фиксированного φ, $0\leqslant\varphi<2\pi$, *можно указать целую функцию* $f(z)\in G(\rho,\Delta_1,\Delta_2)$ *такую, что при* $\rho(r)\in D$

$$h_1(\varphi;f)=\rho\left\{\frac{\Delta_2+\Delta_1}{2}\cos\rho\varphi-\frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}|\cos\rho\varphi|\right\}, \tag{10.5}$$

а при $\rho(r)\in C$ *и* $\alpha(f)=0$ — *такую, что*

$$h_2(\varphi;f)=-\rho\,\frac{\Delta_2+\Delta_1}{2}\cos\rho\varphi-\rho\,\frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}|\cos\rho\varphi|. \tag{10.6}$$

В качестве примера рассмотрим доказательство оценки сверху для $h_1(\varphi;f)$ при $\rho(r)\in D$. Представим $f(z)$ в следующем виде [5]:

$$f(z)=f_r^{(1)}(z)\cdot f_r^{(2)}(z),$$

где

$$f_r^{(1)}(z)=\exp\left\{\frac{1}{\rho}z^\rho\sum_{a_k\leqslant r}a_k^{-\rho}\right\},$$

$$f_r^{(2)}(z)=\exp\{Q(z)\}\prod_{a_k\leqslant r}E\left(\frac{z}{a_k},\rho-1\right)\cdot\prod_{a_k>r}E\left(\frac{z}{a_k},\rho\right)=$$

$$=\exp\{Q(z)\}f_r^{(3)}(z),$$

а $Q(z)$ — многочлен степени не выше p. Известно (см. соотношение (2.3) из § 3 статьи [4]), что

$$\ln M\left(r,f_r^{(2)}(z)\right)\leqslant o\left(V_1(r)\right). \tag{10.7}$$

Для всякого $\varepsilon>0$ существует $r_0=r_0(\varepsilon)$ такое, что при $r>r_0$ выполняется

$$(\Delta_1-\varepsilon)^+V(r)\leqslant N_f(r)\leqslant(\Delta_2+\varepsilon)V(r).$$

Заметим, что $N_f(er)\geqslant n_f(r)$, а также

$$V(er)=o\left(V_1(r)\right). \tag{10.8}$$

Тогда, интегрируя по частям, получаем (см. [1]):

$$\ln|f_r^{(1)}(re^{i\varphi})|=\frac{1}{\rho}r^\rho\sum_{a_k\leqslant r}a_k^{-\rho}\cos\rho\varphi=$$

$$=\frac{1}{\rho}r^\rho\cos\rho\varphi\left\{\frac{n_f(r)}{r^\rho}+\rho\,\frac{N_f(r)}{r^\rho}+\rho^2\int_1^r\frac{N_f(t)}{t^{\rho(t)}}t^{\rho(t)-\rho-1}dt\right\}.$$

Отсюда

$$\ln|f_r^{(1)}(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{\Delta_2}{\rho}(1+\varepsilon)[V(er)+\rho V(r)]+$$

$$+\rho(1+\varepsilon)V_1(r)\left[\frac{\Delta_2+\Delta_1}{2}\cos\rho\varphi+\frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}|\cos\rho\varphi|\right].$$

Учитывая (10.7) и (10.8), в силу произвольной малости ε получаем правую часть неравенства (10.1).

г. Львов

Поступило в редакцию
10.VI.1967

Литература

1. А. А. Кондратюк, Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями, Лит. мат. сб., **VII**, № 1 (1967), 79–117.

2. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Москва, Гостехиздат, 1956.

3. А. А. Гольдберг, Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, I, Мат. сб., 58(100), (1962), 289–334.

4. А. А. Гольдберг, Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, II, Мат. сб., 61(103), (1963), 334–349.

5. А. А. Гольдберг, Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, III, Мат. сб., 65(107), (1964), 414–453.

6. А. А. Гольдберг, Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, IV, Мат. сб., 66(108), (1965), 411–457.

7. А. А. Гольдберг, Экстремальный индикатор для целой функции с положительными нулями, Сибирск. матем. журнал, **3** (1962), 170–177.

8. И. В. Островский, О некоторых асимптотических свойствах целых функций с вещественными отрицательными нулями, Записки мех.-мат. фак. ХГУ и ХМО, **XXVIII**, сер. 4(1961), 23–32.

SVEIKŲ FUNKCIJŲ SU TEIGIAMAIS NULIAIS EKSTREMALINIS INDIKATORIUS. II

A. KONDRATJUK

(*Reziumė*)

Šis darbas yra [1] straipsnio tęsinys.

Nagrinėjamos sveikos funkcijos $f(z)$ eilės ρ, $0<\rho<\infty$, su teigiamais nuliais. Nulių apatinis $\Delta_1(f)$ ir viršutinis $\Delta_2(f)$ tankiai apibrėžiami šitaip:

$$\Delta_1(f)=\varliminf_{r\to\infty} r^{-\rho(r)}N(r,0,f),$$

$$\Delta_2(f)=\varlimsup_{r\to\infty} r^{-\rho(r)}N(r,0,f);$$

čia $N(r,0,f)$ – nulių skaičiaus R. Nevanlinos funkcija; $\rho(r)$ – patikslinta eilė, $\rho(r)\to\rho$, kai $r\to\infty$.

Gaunami sveikų funkcijų $f(z)$, patenkinančių reikalavimą $0\leqslant\Delta_1\leqslant\Delta_1(f)\leqslant\Delta_2(f)\leqslant\Delta_2<\infty$, indikatorių tikslūs įvertinimai iš viršaus ir apačios. Pirmoje straipsnio dalyje buvo išnagrinėtas tik tas atvejis, kai $\Delta_1=0$, ir nebuvo gautas įvertinimas iš apačios.

EXTREMALINDIKATOR DER GANZEN FUNKTIONEN MIT POSITIVEN NULLSTELLEN. II

A. KONDRATJUK

(*Zusammenfassung*)

Dieser Artikel ist eine Fortsetzung des Artikels [1], sein zweiter Teil.

Es handelt sich um die ganzen Funktionen der Ordnung ρ, $0<\rho<\infty$, mit positiven Nullstellen, derer untere und obere Dichte als

$$\Delta_1(f) = \varliminf_{r\to\infty} r^{-\rho(r)} N(r, 0, f),$$

$$\Delta_2(f) = \varlimsup_{r\to\infty} r^{-\rho(r)} N(r, 0, f)$$

definiert wird, wo $N(r, 0, f)$ Nevanlinnasche Anzahlfunktion, $\rho(r)$ eine gewisse verfeinerte Ordnung ($\rho(r)\to\rho$ bei $r\to\infty$) sind.

Es werden exakte untere und obere Grenzen für die Indikatoren der ganzen Funktionen aus der Klasse, die durch die Bedingung $0\leqslant\Delta_1 \leqslant \Delta_1(f) \leqslant \Delta_2(f) \leqslant \Delta_2<\infty$ bestimt wird hergeleitet. Man hat im ersten Teil des Artikels nur den Fall $\Delta_1=0$ und keine untere Grenze betrachtet.