LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК – 517.941

О ПРИВОДИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. М. МЕРКИС

§ 1. Пусть дана система двух линейных дифференциальных уравнений в матричном виде

$$\frac{dX}{dt} = X\left[U_1\varphi_1(t) + U_2\varphi_2(t)\right], \tag{1}$$

где U_1 и U_2 – постоянные вещественные матрицы, обладающие свойствами:

$$U_1(U_2U_1 - U_1U_2) - (U_2U_1 - U_1U_2)U_1 = 0, \tag{2}$$

$$U_2U_1 - U_1U_2 = P(U_1) \tag{3}$$

и $P(U_1)$ – полином от U_1 с численными коэффициентами.

Далее предположим, что вещественные функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют вид

$$\varphi_k(t) = \alpha_k + f_k(t) \qquad (k=1,\ 2), \tag{4}$$

где α_k – постоянные, а $f_k(t)$ – равномерные почти-периодические функции (п.-п. функции) такие, что неопределенные интегралы

$$F_k(t) = \int_0^t f_k(\tau)\,d\tau \qquad (k=1,\ 2) \tag{5}$$

ограничены. Иначе говоря, функции $F_k(t)$ являются также равномерными п.-п. функциями [1].

Как доказано в работе [2], при условиях (2) и (3) интегральная матрица $X(t)$, нормированная при $t=0$, получается в виде

$$X(t) = e^{\int_0^t e^{U_2L_2(\tau)}U_1e^{-U_2L_2(\tau)}\varphi_1(\tau)\,d\tau}\, e^{U_2L_2(t)}, \tag{6}$$

где

$$L_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\tau)\,d\tau \qquad (k=1,\ 2),$$

или на основании (4), (5)

$$L_k(t) = \alpha_k t + F_k(t) \qquad (k=1,\ 2). \tag{7}$$

Выясним теперь, при каких условиях система (1) является приводимой, т. е. когда ее интегральная матрица (6) может быть записана в виде

$$X(t) = e^{Bt}Z(t), \tag{8}$$

где B – постоянная матрица, а $Z(t)$ и $Z^{-1}(t)$ – ограниченные матрицы.

В зависимости от вида матриц U_1 и U_2, обладающих свойствами (2) и (3), рассмотрим два случая.

1. Пусть матрицы U_1 и U_2 имеют вид

$$U_1=\begin{Vmatrix} a & 0 \\ c & a \end{Vmatrix}, \qquad U_2=\begin{Vmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Тогда условия (2) и (3) выполнены [3].

В этом случае интегральную матрицу (6), после некоторых преобразований, можно записать в виде [3]

$$X(t)=e^{aL_1(t)}\begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ c\int\limits_0^t e^{(b_2-b_1)L_2(\tau)}\varphi_1(\tau)\,d\tau, & 1 \end{Vmatrix} e^{U_2L_2(t)}. \tag{10}$$

Далее, вместо (10) будем рассматривать решение

$$X_1(t)=C_1X(t), \tag{11}$$

где

$$C_1=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ cc_1 & 1 \end{Vmatrix}$$

и c_1 пока произвольная постоянная. Подставив (10) в (11) на основании (7), интегральную матрицу $X_1(t)$ запишем в таком виде:

$$X_1(t)=e^{a\alpha_1 t}e^{aF_1(t)}\begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ c\left[c_1+\int\limits_0^t e^{(b_2-b_1)\alpha_2\tau}e^{(b_2-b_1)F_2(\tau)}\Big(\alpha_1+f_1(\tau)\Big)d\tau\right], & 1 \end{Vmatrix}\times$$

$$\times\begin{Vmatrix} e^{b_1\alpha_2 t} & 0 \\ 0 & e^{b_2\alpha_2 t} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} e^{b_1F_2(t)} & 0 \\ 0 & e^{b_2F_2(t)} \end{Vmatrix}.$$

Поменяв местами в правой части первую матрицу со второй (при этом ввиду некоммутативности, ненулевой элемент на побочной диагонали первой матрицы умножается на $\exp[(b_1-b_2)\alpha_2 t]$), окончательно получаем

$$X_1(t)=e^{\begin{Vmatrix} a\alpha_1+b_1\alpha_2 & 0 \\ 0, & a\alpha_1+b_2\alpha_2 \end{Vmatrix}t}\begin{Vmatrix} e^{\psi_1(t)}, & 0 \\ ce^{\psi_1(t)}\Phi_1(t), & e^{\psi_2(t)} \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

где

$$\Phi_1(t)=e^{(b_1-b_2)\alpha_2 t}\left[c_1+\int\limits_0^t e^{-(b_1-b_2)\alpha_2\tau}\psi(\tau)\,d\tau\right],$$

причем

$$\psi(\tau)=e^{(b_2-b_1)F_2(\tau)}\Big(\alpha_1+f_1(\tau)\Big)$$

и

$$\psi_k(t)=aF_1(t)+b_kF_2(t) \qquad (k=1,\ 2).$$

Здесь $\psi(\tau)$ и $\psi_k(t)$ являются равномерными п.-п., а следовательно и ограниченными функциями [1].

Согласно [4] (стр. 36, § 4), функция

$$\Phi_1(t)=e^{(b_1-b_2)\alpha_2 t}\left[c_1+\int\limits_0^t e^{-(b_1-b_2)\alpha_2 t}\psi(\tau)\,d\tau\right] \tag{13}$$

будет ограничена, когда $t \to +\infty$ при произвольной постоянной c_1 (а тем самым и при $c_1=0$), если

$$(b_1-b_2)\alpha_2<0, \tag{14}$$

и при

$$c_1=-\int_0^\infty e^{-(b_1-b_2)\alpha_2\tau}\psi(\tau)\,d\tau,$$

если

$$(b_1-b_2)\alpha_2>0. \tag{15}$$

Следовательно, в случае выполнения условий (14) или (15), интегральная матрица системы (1) представляется в виде (8).

Замечание. Если же $(b_1-b_2)\alpha_2=0$, т. е. $\alpha_2=0$, так как $b_1\neq b_2$ (при $b_1=b_2$ матрицы U_1 и U_2 коммутируют), то вопрос об ограниченности или неограниченности $\Phi_1(t)$ сводится к рассмотрению интеграла

$$I=\int_0^t e^{(b_2-b_1)F_2(\tau)}\varphi_1(\tau)\,d\tau. \tag{16}$$

2. Общий вид матриц U_1 и U_2, обладающих свойствами (2) и (3), можно записать в виде [3]

$$U_1=\begin{Vmatrix} a+2cm, & -cm^2 \\ c\ , & a \end{Vmatrix}, \qquad U_2=\begin{Vmatrix} b, & m^2n \\ n, & b \end{Vmatrix}, \tag{17}$$

причем

$$\xi_1=\xi_2=a+cm \tag{18}$$

и

$$\lambda_1=b+mn, \qquad \lambda_2=b-mn \tag{19}$$

соответственно характеристические числа матриц U_1 и U_2.

В этом случае решение (6) можно записать в следующем виде [3]:

$$X(t)=e^{(a+cm)L_1(t)+bL_2(t)}A^{-1}\begin{Vmatrix} 1, & 2cm\int_0^t e^{2mnL_2(\tau)}\varphi_1(\tau)\,d\tau \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}\times$$

$$\times e^{\begin{Vmatrix} mn, & 0 \\ 0\ , & -mn \end{Vmatrix}L_2(t)}A, \tag{20}$$

где

$$A=\begin{Vmatrix} 1, & m \\ 1, & -m \end{Vmatrix}, \qquad U_2=A^{-1}\begin{Vmatrix} b+mn, & 0 \\ 0\ , & b-mn \end{Vmatrix}A.$$

Далее, вместо (20) будем рассматривать интегральную матрицу

$$X_2(t)=C_2AX(t), \tag{21}$$

где

$$C_2=\begin{Vmatrix} 1 & 2cmc_2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

и c_2 пока произвольная постоянная.

Проведя те же рассуждения, что и в первом случае и принимая во внимание равенства (18) и (19), получим

$$X_2(t) = e^{\begin{Vmatrix} \xi_1\alpha_1+\lambda_1\alpha_2, & 0 \\ 0, & \xi_2\alpha_1+\lambda_2\alpha_2 \end{Vmatrix} t} \begin{Vmatrix} e^{\eta_1(t)}, & 2cme^{\eta_2(t)}\Phi_2(t) \\ 0\ , & e^{\eta_2(t)} \end{Vmatrix} A, \tag{22}$$

где

$$\Phi_2(t) = e^{-(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2 t}\left[c_2 + \int_0^t e^{(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2\tau}\eta(\tau)\,d\tau\right],$$

$$\eta(\tau) = e^{(\lambda_1-\lambda_2)F_2(\tau)}\left(\alpha_1 + f_1(\tau)\right)$$

и

$$\eta_k(t) = \xi_k F_1(t) + \lambda_k F_2(t) \qquad (k=1,\ 2),$$

причем $\eta(\tau)$ и $\eta_k(t)$ являются равномерными п.-п., следовательно и ограниченными, функциями [1].

В данном случае, как и выше, вопрос приводимости системы (1) сводится к исследованию ограниченности функции $\Phi_2(t)$ при $t \to +\infty$. Она будет ограниченной при произвольной постоянной c_2 (следовательно и при $c_2=0$), если

$$(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2 > 0 \tag{23}$$

и при

$$c_2 = -\int_0^\infty e^{(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2\tau}\eta(\tau)\,d\tau,$$

если

$$(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2 < 0. \tag{24}$$

Если же $(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2=0$, т. е. $\alpha_2=0$, то имеет место вышеуказанное замечание.

Отметим, что в предположениях (4) и (5) условия приводимости (14), (15) (в первом случае) и (23), (24) (во втором случае) системы (1) можно найти и методом Н. П. Еругина [4]. Действительно, для нашей системы уравнение Рикатти

$$\dot{\tau} = p_{12} + (p_{22}-p_{11})\tau - p_{21}\tau^2, \tag{25}$$

где $p_{\sigma\nu}(t)$ элементы матрицы

$$\begin{Vmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{Vmatrix} = U_1\varphi_1(t) + U_2\varphi_2(t), \tag{26}$$

допускает в первом случае (т. е. когда U_1 и U_2 имеют вид (9)) нулевое решение, а во втором случае (когда матрицы U_1 и U_2 имеют вид (17)) — решение $\tau = -m = \text{const}$. Тогда согласно (4) и (5) имеют место равенства

$$\int_0^t (-\tau p_{21} - p_{11})\,dt = \gamma_1 t + \Psi_1(t),$$

$$\int_0^t (\tau p_{21} - p_{22})\,dt = \gamma_2 t + \Psi_2(t), \tag{27}$$

где γ_k — постоянные, а $\Psi_k(t)$ — ограниченные функции. При этом система будет приводимой, если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, а это и есть, как нетрудно проверить, условия (14), (15) (в первом случае, когда $\tau=0$) и (23), (24) (во втором случае, когда $\tau=-m$).

Заметим, что в случае квазипериодических функций $\varphi_k(t)$ $(k=1, 2)$, удовлетворяющих условиям А. Е. Гельмана [6] (см. т. 2), соотношения (4), (5) будут выполнены.

§ 2. Укажем ещё один класс п.-п. функций, для которых выполнено (4), (5) и, следовательно, система (1) может быть приводимой.

Сформулируем одну теорему, доказанную В. Г. Спринджуком [5].

Пусть $\bar{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ набор вещественных чисел и пусть $w(\bar{\omega})$ — точная верхняя грань тех $w>0$, для которых неравенство

$$|a_0 + a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n| < h^{-w},$$

где $h=\max_{(i)}|a_i|$, имеет бесконечное число решений в целых числах $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, причем $w(\omega) < \infty$.

Пусть, далее, $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ вещественная 1-периодическая по каждой переменной функция, удовлетворяющая условию

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial x_i^s} f(x_0, x_1, \ldots, x_n)\right| \leqslant K \qquad (i=0, 1, \ldots, n)$$

для всех $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, причем $s \geqslant w(\bar{\omega})+1$.

Тогда

$$\int_0^t f(\tau, \omega_1\tau, \ldots, \omega_n\tau)\, d\tau = \beta t + O(1),$$

где

$$\beta = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, dx_0 \ldots dx_n.$$

Пусть в системе (1) функции $\varphi_k(t)$ имеют вид

$$\varphi_k(t) = \alpha_k + f_k(t) \qquad (k=1, 2),$$

где

$$f_1(t) = g_1(t, \omega_1 t, \ldots, \omega_n t),$$

$$f_2(t) = g_2(t, \mu_1 t, \ldots, \mu_m t)$$

квазипериодические функции, являющиеся значениями вещественных 1-периодических по каждой переменной функций $g_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и $g_2(y_0, y_1, \ldots, y_m)$, соответственно на прямых

$$x_0 = t, \; x_1 = \omega_1 t, \ldots, x_n = \omega_n t,$$

и

$$y_0 = t, \; y_1 = \mu_1 t, \ldots, y_m = \mu_m t,$$

причем числа $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ и $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$, а также функции $g_1(x_0, x_1, \ldots, x$ и $g_2(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ удовлетворяют условиям теоремы В. Г. Спринджука.

Тогда, согласно этой же теореме,

$$L_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\tau)\,d\tau = \tilde{\alpha}_k t + F_k(t) \qquad (k=1,\ 2), \qquad (*)$$

где

$$\tilde{\alpha}_k = \alpha_k + \beta_k \qquad (k=1,\ 2),$$

причем

$$\beta_1 = \int_0^1 \dots \int_0^1 g_1(x_0,\ x_1, \dots, x_n)\,dx_0 \dots dx_n,$$

$$\beta_2 = \int_0^1 \dots \int_0^1 g_2(y_0,\ y_1, \dots, y_m)\,dy_0 \dots dy_m$$

и

$$F_k(t) = O(1) \qquad (k=1,\ 2).$$

Из (*) видно, что мы приходим к вышерассмотренному случаю. А именно, *если*

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{\alpha}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_2 + \beta_2) \neq 0,$$

где λ_1 *и* λ_2 *— характеристические числа матрицы* U_2, *то решение системы* (1) *может быть записано в виде* (8). *Если же*

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_2 + \beta_2) = 0,$$

т. е. $\alpha_2 + \beta_2 = 0$, *вопрос сводится к рассмотрению интеграла*

$$I = \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_2) F_2(\tau)} \left(\alpha_1 + f_1(\tau)\right) d\tau.$$

Наконец, отметим, что для того, чтобы выразить первообразную функцию квазипероидической функции f в виде

$$\alpha t + F,$$

где α — постоянная, а F — ограниченная (квазипериодическая) функция, в работе [5] В. Г. Спринджука ограничения налагаются только на арифметическую природу частот $\omega_1, \dots, \omega_n$ и требуется в некотором смысле гладкости функции f (непрерывность конечного числа частных производных). Результаты же А. Е. Гельмана [6] применимы к аналитическим функциям f, причем в круге радиуса $R > 1$.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
13.VI.1967

Литература

1. Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, ГИТТЛ, 1953.

2. Н. П. Еругин, Замечание к статье Шифнера, Изв. АН СССР, серия матем., № 5, 1941.

3. Н. П. Еругин, Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений, Л., 1956.

4. Н. П. Еругин, Приводимые системы, Труды физико-математического института им. В. А. Стеклова, XIII, 1946.

5. В. Г. Спринджук, Асимптотическое поведение интегралов от квазипериодических функций, Дифференциальные уравнения, 3, № 5, 1967.

6. А. Е. Гельман, О приводимости систем с квазипериодической матрицей, Дифференциальные уравнения, I, № 3, 1965.

VIENOS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SU BEVEIK PERIODINIAIS KOEFICIENTAIS REDUKAVIMAS

V. MERKYS

(*Reziumė*)

Tariama dviejų tiesinių diferencialinių lygčių sistema

$$\frac{dX}{dt}=X[U_1\varphi_1(t)+U_2\varphi_2(t)]; \tag{1}$$

čia U_1 ir U_2 — pastovios realios matricos, patenkinančios sąlygas:

$$U_1(U_2U_1-U_1U_2)-(U_2U_1-U_1U_2)U_1=0, \tag{2}$$

$$U_2U_1-U_1U_2=P(U_1). \tag{3}$$

Čia $P(U_1)$ — polinomas su skaitiniais koeficientais U_1 atžvilgiu. Realios funkcijos $\varphi_1(t)$ ir $\varphi_2(t)$ yra pavidalo

$$\varphi_k(t)=\alpha_k+f_k(t) \qquad (k=1,\ 2); \tag{4}$$

čia α_k— konstantos, o $f_k(t)$ — tolyginės beveik periodinės funkcijos, kurių neapibrėžtiniai integralai

$$F_k(t)=\int_0^t f_k(\tau)\,d\tau \qquad (k=1,\ 2) \tag{5}$$

aprėžti.

Darbe gautos sąlygos, kad (1) sistemos integralinė matrica būtų pavidalo

$$X(t)=e^{Bt}Z(t); \tag{8}$$

čia B — pastovi matrica, o $Z(t)$ ir $Z^{-1}(t)$ — aprėžtos matricos. Remiantis šiomis sąlygomis, galimas sistemos redukavimas.

REDUZIBILITÄT EINES SYSTEMS DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT FASTPERIODISCHEN KOEFFIZIENTEN

V. MERKYS

(*Zusammenfassung*)

Es wird folgendes System zweier linearer Differentialgleichungen

$$\frac{dX}{dt}=X[U_1\varphi_1(t)+U_2\varphi_2(t)] \tag{1}$$

untersucht. Hier U_1 und U_2 sind konstante und reelle Matrizen, welche folgende Eigenschaften besitzen:

$$U_1(U_2U_1-U_1U_2)-(U_2U_1-U_1U_2)U_1=0, \tag{2}$$

$$U_2U_1-U_1U_2=P(U_1) \tag{3}$$

wo $P(U_1)$ ist ein Polynom von U_1 mit numerischen Koeffizienten. Reellen Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ sind folgender Gestalt:

$$\varphi_k(t)=\alpha_k+f_k(t) \qquad (k=1,\ 2), \tag{4}$$

wo α_k— Konstanten und $f_k(t)$ – gleichmässige fastperiodische Funktionen, deren unbestimmte Integrale

$$F_k(t) = \int_0^t f_k(\tau)\, d\tau \qquad (k = 1,\ 2) \tag{5}$$

beschränkt sind.

Es werden die Bedingungen angegeben, dass die Integralmatrix des Gleichungssystems (1) die Form

$$X(t) = e^{Bt} Z(t) \tag{8}$$

besitzt. Hier bedeuten: B – eine konstante Matrix, $Z(t)$ und $Z^{-1}(t)$ beschränkte Matrizen. Diese Bedingungen sichern auch die Reduzibilität des obengenannten Gleichungssystems.