LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VIII Nr. 1, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VIII № 1, 1968

УДК – 517.92 : 517.5

ПОВЕДЕНИЕ ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А. В. НАГЯЛЕ, Ш. И. СТРЕЛИЦ

Введение

Пусть $f(z)$ – голоморфная в круге $|z|<1$ функция. Обозначим через $M(r, f)$ максимум $|f(z)|$ на окружности $|z|=r<1$, т. е.

$$M(r, f)=\max_{|z|=r}|f(z)|.$$

Порядком функции $f(z)$ в круге $|z|<1$ мы называем число

$$\rho=\overline{\lim_{r\to 1}}\ \frac{\ln\ln M(r, f)}{\ln\frac{1}{1-r}}.$$

Функции голоморфные в круге $|z|<1$ и удовлетворяющие условию

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ \frac{\ln M(r, f)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\infty,$$

по аналогии с целой трансцендентной функцией $g(z)$, для которой

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\ln M(r, g)}{\ln r}=\infty,$$

назовем трансцендентными в круге $|z|<1$.

В настоящей работе мы исследуем порядок любого трансцендентного в конечном круге $|z|<R$ решения дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(z,\ w,\ w')=0, \tag{1}$$

где F – многочлен от всех своих переменных.

Ж. Валирон в [1] показал отсутствие у уравнения (1) трансцендентных в круге решений нулевого порядка.

Мы ставим себе целью определить порядок любого решения, трансцендентного в круге $|z|<1$, уравнения (1) (очевидно, не ограничивая общности, можно вместо круга $|z|<R$ взять круг $|z|<1$; этого легко добиться заменой $z=Rz'$).

Из наших результатов вытекает и результат Ж. Валирона.

§ 1. 1. Хорошо известно, что $\ln M(r)$ есть выпуклая функция от $\ln r$ (см. [9]). Введем функцию

$$K(r)=K(r, f)=\frac{r M'(r, f)}{M(r)}, \tag{1.1}$$

где под $M'(r, f)$ мы понимаем производную справа от функции $M(r, f)$ (последняя всегда существует). Из вышесказанного следует, что функция $K(r)$, как производная справа от выпуклой функции $\ln M(r, f)$ по $\ln r$, возрастающая. Кроме того, в силу указанной выпуклости,

$$K(r_1)\ln \frac{r_2}{r_1} \leqslant \ln M(r_2) - \ln M(r_1) \leqslant K(r_2) \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{1.2}$$

Докажем следующее вспомогательное предложение.

Лемма 1. *Для того, чтобы трансцендентная в круге* $|z|<1$ *функция* $f(z)$ *была порядка* $\rho\,(0 \leqslant \rho \leqslant \infty)$:

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln\ln M(r, f)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \rho, \tag{1.3}$$

необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \rho + 1. \tag{1.4}$$

Доказательство. а) Положим сначала $\rho>0$. Пусть $\{\tilde r_j\}$ — последовательность точек, на которой

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln\ln M(\tilde r_j)}{\ln \frac{1}{1-\tilde r_j}} = \rho. \tag{1.5}$$

Из (1.5) немедленно следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln M(\tilde r_j)}{\ln \frac{1}{1-\tilde r_j}} = \infty. \tag{1.6}$$

Сейчас мы покажем, что можно найти такую последовательность $\{r_j\}$; $r_j \uparrow 1$, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln M(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}} = \infty, \tag{1.7}$$

причем

$$\left(\frac{\ln M(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}}\right)' \geqslant 0 \tag{1.8}$$

(здесь производная означает производную слева). Рассмотрим функцию

$$\psi(r) = \frac{\ln M(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} \tag{1.9}$$

при $r \leqslant \tilde r_j$. Если в точке $\tilde r_j$ имеет место (1.8), то полагаем $r_j = \tilde r_j$. Заметим, как это вытекает из (1.6), что функция (1.9) не может быть невозрастающей для всех $r>r_0$ при произвольном постоянном r_0. Пусть теперь в $\tilde r_j$ (1.8) не выполнено, причем функция (1.9) не неубывающая для всех r при $r>r_0$ с произвольным r_0. В этом случае из того, что непрерывная функция $\psi(r)\to\infty$ $(j\to\infty)$, мы заключаем, что существует бесконечное множество точек, в которых функция $\psi(r)$ не убывает. Действительно в наших предположениях функция $\psi(r)$ имеет на луче $r>r_0$ бесконечно много локальных максимумов с предельной точкой в бесконечности. В качестве r_j берем точку, ближайшую $\tilde r_j$ слева $(r_j<\tilde r_j)$, в которой достигается локальный максимум функции $\psi(r)$. При таком выборе r_j будем иметь

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln\ln M(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}} = \rho. \tag{1.10}$$

В самом деле, по построению последовательности $\{r_j\}$; $r_j \uparrow 1$ $(r_j < \tilde r_j)$ имеем:

$$\frac{\ln M(\tilde r_j)}{\ln \frac{1}{1-\tilde r_j}} \leqslant \frac{\ln M(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}}. \tag{1.11}$$

Так как, кроме того,

$$\ln \frac{1}{1-\tilde r_j} > \ln \frac{1}{1-r_j},$$

то из (1.11) вытекает

$$\frac{\ln\ln M(\tilde r_j) - \ln\ln \frac{1}{1-\tilde r_j}}{\ln \frac{1}{1-\tilde r_j}} \leqslant \frac{\ln\ln M(r_j) - \ln\ln \frac{1}{1-r_j}}{\ln \frac{1}{1-r_j}}. \tag{1.12}$$

Из (1.12) с учетом (1.5) следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln\ln M(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}} = \rho. \tag{1.13}$$

При таком выборе точек r_j производная слева от $\psi(r)$ неотрицательна, т. е.

$$\psi'(r_j) = \left(\frac{\ln M(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}}\right)' \geqslant 0,$$

причем $\psi(r_j) > \psi(\tilde r_j)$, так что в согласии с (1.6) $\psi(r_j) \to \infty$, когда $j \to \infty$. Итак, всегда можно найти последовательность $\{r_j\}$; $r_j \uparrow 1$, в точках которой выполнены одновременно соотношения (1.7) и (1.8).

В точках построенной последовательности $\{r_j\}$ имеем:

$$\left(\frac{\ln M(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}}\right)' = \frac{1}{1-r_j}\left[\frac{(1-r_j)M'(r_j)}{M(r_j)\ln \frac{1}{1-r_j}} - \frac{\ln M(r_j)}{\ln^2 \frac{1}{1-r_j}}\right] \geqslant 0.$$

Но

$$K(r_j) \geqslant \frac{r M'(r_j - 0)}{M(r_j)}.$$

Поэтому тем более

$$\frac{1}{1-r_j}\left[\frac{(1-r_j)K(r_j)}{r_j \ln \frac{1}{1-r_j}} - \frac{\ln M(r_j)}{\ln^2 \frac{1}{1-r_j}}\right] \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает, что при $j > j_0$, где j_0 достаточно велико

$$(1-r_j)K(r_j) \geqslant \frac{r_j \ln M(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}}. \tag{1.14}$$

Прологарифмировав последнее неравенство, находим:

$$\ln K(r_j) \geqslant \ln \frac{1}{1-r_j} + \ln\ln M(r_j) + \ln r_j - \ln\ln \frac{1}{1-r_j}.$$

Разделив полученное соотношение на $\ln \frac{1}{1-r_j}$ и переходя затем к пределу при $j\to\infty$, с учетом (1.3) получим:

$$\varliminf_{r\to 1} \frac{\ln K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} \geqslant 1+\rho. \tag{1.15}$$

Теперь найдем оценку сверху для

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}}.$$

Воспользуемся соотношением (1.2), полагая там $r_1=r$ и $r_2=re^{\tau}$, где

$$\tau\leqslant \frac{1-r}{[\ln\ln M(r)]^{1+\alpha}}; \qquad (0<\alpha=\text{const}). \tag{1.16}$$

Имеем:

$$K(r)\,\tau\leqslant \ln M(re^{\tau})-\ln M(r). \tag{1.17}$$

Для оценки выражения $\ln M(re^{\tau})-\ln M(r)$ воспользуемся следующим предложением.

Лемма А. *Пусть $h(x)$ — неубывающая и непрерывная справа на полуоси $0\leqslant x<1$ функция и $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=\infty$. Тогда вне некоторого множества интегралов E полусегмента $0\leqslant x<1$ имеет место неравенство:*

$$|\,h(xe^{\tau})-h(x)\,|<h^{\delta}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}h(x),$$

где

$$|\tau|\leqslant(1-x)\,h^{\delta-1}(x)\,[\ln h(x)]^{-(1+\alpha)(1-\gamma)}.$$

Здесь $0<\alpha=\text{const}$, $0\leqslant\gamma<1$, $0\leqslant\delta\leqslant 1$. Исключенное множество зависит от чисел α, δ, γ и

$$\int\limits_E \frac{dx}{1-x}<\infty$$

(см. [8] лемма 1). В статье [8] лемма доказана при $0\leqslant\delta<1$. Нетрудно видеть, что эта же лемма при незначительной модификации доказательства верна и при $\delta=1$.

Это утверждение ($\delta=1$; $\gamma=0$), приложенное к функции $\ln M(r)$ с τ, определенным в (1.16), дает нам:

$$\ln M(re^{\tau})-\ln M(r)<\ln M(r)\cdot\ln^{1+\alpha}\ln M(r), \tag{1.18}$$

где

$$r\notin E;\qquad \int\limits_E \frac{dr}{1-r}<\infty.$$

Поставив (1.18) в (1.17), находим:

$$\frac{(1-r)\,K(r)}{\ln^{1+\alpha}\ln M(r)}\leqslant \ln M(r)\cdot\ln^{1+\alpha}\ln M(r);\qquad r\notin E.$$

Следовательно,

$$\ln K(r)\leqslant \ln\frac{1}{1-r}+\ln\ln M(r)+2(1+\alpha)\ln\ln\ln M(r);\qquad r\notin E.$$

Отсюда в соответствии с (1.3) вытекает, что

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}}\leqslant\rho+1;\qquad r\notin E. \tag{1.19}$$

Покажем теперь, что

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ \frac{K(r)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\overline{\lim_{\substack{r\to 1\\ r\notin E}}}\ \frac{\ln K(r)}{\ln\frac{1}{1-r}}. \tag{1.20}$$

Пусть $\{\rho_j\}$ – последовательность точек, в которых

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ \frac{\ln K(r)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\lim_{j\to\infty}\frac{\ln K(\rho_j)}{\ln\frac{1}{1-\rho_j}}. \tag{1.21}$$

Для любой последовательности $\{\rho_j^*\}$:

$$\rho_j<\rho_j^*<\frac{2\rho_j}{1+\rho_j}, \tag{1.22}$$

в силу неубывания $K(r)$,

$$\ln K(\rho_j)\leqslant\ln K(\rho_j^*)\leqslant\ln K\left(\frac{2\rho_j}{1+\rho_j}\right). \tag{1.23}$$

Кроме того, в силу

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{1+\rho_j}=\frac{1-\frac{2\rho_j}{1+\rho_j}}{1-\rho_j}<\frac{1-\rho_j^*}{1-\rho_j}<1,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}(1-\rho_j)<1-\rho_j^*<1-\rho_j;\quad 1-\frac{2\rho_j}{1+\rho_j}<2(1-\rho_j^*)$$

и

$$\ln\frac{1}{1-\rho_j^*}<\ln\frac{1}{1-\rho_j}+\ln 2;$$

$$\ln\frac{1}{1-\frac{2\rho_j}{1+\rho_j}}-\ln 2<\ln\frac{1}{1-\rho_j^*}.$$

По (1.23) отсюда вытекает, что

$$\frac{\ln K(\rho_j)}{\ln\frac{1}{1-\rho_j}+\ln 2}<\frac{\ln K(\rho_j^*)}{\ln\frac{1}{1-\rho_j^*}}<\frac{\ln K\left(\frac{2\rho_j}{1+\rho_j}\right)}{\ln\frac{1}{1-\frac{2\rho_j}{1+\rho_j}}-\ln 2},$$

Так что в силу (1.21)

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ \frac{\ln K(r)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\lim_{j\to\infty}\frac{\ln K(\rho_j)}{\ln\frac{1}{1-\rho_j}}=\lim_{j\to\infty}\frac{\ln K(\rho_j^*)}{\ln\frac{1}{1-\rho_j^*}}. \tag{1.24}$$

Итак, для любой последовательности $\{\rho_j^*\}$: $\rho_j<\rho_j^*<\frac{2\rho_j}{1+\rho_j}$ имеет место (1.24). Рассмотрим теперь логарифмическую меру интервалов E^*: $\left\{\rho_j;\ \frac{2\rho_j}{1+\rho_j}\right\}$, считая, что эти интервалы не перекрываются, что, очевидно, всегда можно достигнуть, переходя в случае надобности к подпоследовательности. Имеем

$$\int\limits_{E^*}\frac{dr}{1-r}=\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\rho_j}^{\frac{2\rho_j}{1+\rho_j}}\frac{dr}{1-r}=\sum_{j=1}^{\infty}\ln\frac{1-\rho_j}{1-\frac{2\rho_j}{1+\rho_j}}=\sum_{j=1}^{\infty}\ln(1+\rho_j)=\infty,$$

потому, что $\rho_j \to 1$ ($j \to \infty$). Отсюда следует, что для того, чтобы для какого то множества E^* было

$$\varlimsup_{\substack{r\to 1\\ r\notin E}} \frac{\ln K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} < \varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}},$$

необходимо выполнение условия

$$\int_{E^*} \frac{dr}{1-r} = \infty.$$

Последнее и доказывает (1.20), так как для исключенного нами множества E

$$\int_{E} \frac{dr}{1-r} < \infty.$$

Итак, из (1.15) и (1.19), с учетом (1.3) ($\rho>0$), окончательно получаем, что

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \rho + 1. \tag{1.25}$$

Из доказанного далее следует, что при выполнении (1.25) верно также равенство

$$\rho' = \varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \rho.$$

Действительно, если допустить $\rho' \neq \rho$, то из доказанного вытекало бы, что

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \rho' + 1,$$

т. е. соотношение, противоречащее (1.25).

б) Пусть теперь $\rho=0$, т. е.

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} = 0. \tag{1.26}$$

Полагая в (1.2) $r_1=r$; $r_2=\frac{2r}{1+r}$, находим:

$$K(r)\ln \frac{2}{1+r} \leqslant \ln M\left(\frac{2r}{1+r}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\ln K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} + \frac{\ln\ln \frac{2}{1+r}}{\ln \frac{1}{1-r}} \leqslant \frac{\ln\ln M\left(\frac{2r}{1+r}\right)}{\ln\left(1-\frac{2r}{1-r}\right)} \cdot \frac{\ln\left(1-\frac{2r}{1-r}\right)}{\ln \frac{1}{1-r}}. \tag{1.27}$$

Далее:

$$\frac{\ln\ln \frac{2}{1+r}}{\ln \frac{1}{1-r}} = \frac{\ln\ln\left(1-\frac{1-r}{1+r}\right)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \frac{\ln\left\{\frac{1-r}{1+r} - \frac{1}{2}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 + \dots\right\}}{\ln \frac{1}{1-r}} =$$

$$= \frac{\ln \frac{1-r}{1+r} + \ln\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-r}{1+r}\right) + \dots\right\}}{\ln \frac{1}{1-r}} \underset{r\to 1}{\longrightarrow} -1. \tag{1.28}$$

Кроме того, по (1.22)

$$\lim_{r\to 1} \frac{\ln\left(1-\frac{2r}{1-r}\right)}{\ln\frac{1}{1-r}} = 1. \tag{1.29}$$

При условии (1.26) из (1.27), (1.28) и (1.29) следует, что

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln K(r)}{\ln\frac{1}{1-r}} \leqslant 1. \tag{1.30}$$

Но соотношения (1.14) в соответствии с (1.7) далее показывают, что существует такая последовательность точек r_j, что

$$(1-r_j)K(r_j) > 2.$$

Таким образом

$$\ln K(r_j) > \ln 2 + \ln\frac{1}{1-r_j}\cdot$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln K(r)}{\ln\frac{1}{1-r}} \geqslant \lim_{j\to\infty} \frac{\ln K(r_j)}{\ln\frac{1}{1-r_j}} \geqslant 1. \tag{1.31}$$

Из (1.30) и (1.31) при (1.26) вытекает, что

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln K(r)}{\ln\frac{1}{1-r}} = 1.$$

Что отсюда вытекает (1.26), доказывается буквально также как и в случае $\rho > 0$.

Лемма доказана.

2. **Лемма 2.** *Пусть $f(z)$ — трансцендентная в круге $|z| < 1$ функция порядка $\rho \geqslant 0$. При любом постоянном p существует на полуоси $0 \leqslant r < 1$ такая последовательность точек $\{r_j\}$, на которой*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{K^p(r_j)}{M(r_j)} = 0, \tag{1.32}$$

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln\ln M(r_j, f)}{\ln\frac{1}{1-r_j}} = \rho \tag{1.33}$$

и

$$\lim_{\to\infty} \frac{\ln K(r_j)}{\ln\frac{1}{1-r_j}} = \rho + 1 \tag{1.34}$$

$$\left[M(r) = M(r, f) \text{ и } K(r) = \frac{rM(r, f)}{M(r)}\right].$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи: $\rho = 0$, $0 < \rho < \infty$ и $\rho = \infty$.

а) Пусть $\rho = 0$. Так как

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln\frac{1}{1-r}} = 0$$

и

$$\frac{\ln\ln M(r)}{\ln\frac{1}{1-r}} > 0 \qquad \text{при всех } r, \text{ то}$$

$$\lim_{r\to 1} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln\frac{1}{1-r}} = 0. \tag{1.35}$$

Тогда из (1.4) с учетом (1.35) имеем

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} = 1,$$

откуда

$$K(r) < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\varepsilon}, \tag{1.36}$$

для всех $r > R_0(\varepsilon)$.

Так как функция $f(z)$ трансцендентная в круге $|z|<1$, то на некоторой последовательности $\{r_j\}$ при $j>j_0(N)$, где j_0 достаточно велико, имеем:

$$\ln M(r_j) > N \ln \frac{1}{1-r_j},$$

где N можно взять произвольно большим. Следовательно,

$$M(r_j) > \left(\frac{1}{1-r_j}\right)^N. \tag{1.37}$$

Из (1.36) и (1.37) следует, что на $\{r_j\}$

$$\frac{K^p(r_j)}{M(r_j)} < \left(\frac{1}{1-r_j}\right)^{(1+\varepsilon)p-N} \underset{j\to\infty}{\to} 0,$$

если только $N > (1+\varepsilon)p$.

б) Займемся доказательством леммы при $0<\rho<\infty$.

Существует последовательность $\{r_j\}$; $r_j \uparrow 1$, на которой имеют место соотношения:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln\ln M(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}} = \rho \qquad (0<\rho<\infty) \tag{1.38}$$

и

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln M(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}} = \infty. \tag{1.39}$$

(Последнее вытекает из того, что при $\frac{\ln M(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}} < C < \infty$ было бы в (1.38) $\rho=0$.)

При $j>j_0$, где j_0 достаточно большое число, получаем:

$$\ln M(r_j) > N \ln \frac{1}{1-r_j}$$

или

$$M(r_j) > \left(\frac{1}{1-r_j}\right)^N. \tag{1.40}$$

По лемме 1 имеем, что

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \rho + 1$$

и следовательно при $j > j_0^*(\varepsilon)$

$$\frac{\ln K(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}} < \rho + 1 + \varepsilon,$$

т. е.

$$K(r_j) < \left(\frac{1}{1-r_j}\right)^{\rho+1+\varepsilon}. \tag{1.41}$$

Из (1.40) и (1.41) имеем:

$$\frac{K^p(r_j)}{M(r_j)} < \frac{\left(\frac{1}{1-r_j}\right)^{(\rho+1+\varepsilon)p}}{\left(\frac{1}{1-r_j}\right)^N} = \left(\frac{1}{1-r_j}\right)^{(\rho+1+\varepsilon)p-N} \underset{j\to\infty}{\to} 0,$$

так как можно подобрать такое число N, чтобы было $(\rho+1+\varepsilon)\,p-N<0$.

в) Рассмотрим, наконец, последний случай: $\rho=\infty$.

Возьмем последовательность $\{\rho_j\}$; $\rho_j \uparrow 1$, построенную при доказательстве леммы 1, для которой теперь

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln\ln M(\rho_j)}{\ln \frac{1}{1-\rho_j}} = \infty$$

и

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln K(\rho_j)}{\ln \frac{1}{1-\rho_j}} = \infty. \tag{1.42}$$

Существование такой последовательности: $\{\rho_j\}$; $\rho_j \uparrow 1$ следует из леммы 1 и (1.14).

Как это было показано при доказательстве леммы 1 для любой последовательности точек $\left\{r_j\colon\ \rho_j \leqslant r_j \leqslant \frac{2\rho_j}{1+\rho_j}\right\}$ справедливы соотношения:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln\ln M(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}} = \infty \tag{1.43}$$

и

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln K(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}} = \infty. \tag{1.44}$$

Заметим, что для последовательности

$$E^* = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\rho_j;\ \frac{2\rho_j}{1+\rho_j}\right)$$

верно

$$\int_{E^*} \frac{dr}{1-r} = \infty. \tag{1.45}$$

Далее, из (1.2) на основании выпуклости функции $\ln M(r)$ выводим, что

$$K(r)\,\tau \leqslant \ln M(re^{\tau}) - \ln M(r); \qquad r \notin E. \tag{1.46}$$

При

$$\tau \leqslant \frac{1-r}{\ln^{1+\alpha} \ln M(r)} \qquad (0<\alpha=\mathrm{const})$$

по лемме А (см. доказательство леммы 1) можем оценить правую сторону (1.46) соотношения следующим образом:

$$\ln M(re^{\tau}) - \ln M(r) < \ln M(r) \cdot \ln^{1+\alpha} \ln M(r),$$

при $r \notin E$ с $\int\limits_E \frac{dr}{1-r} < \infty$. (1.46) сейчас принимает следующий вид:

$$(1-r)\,K(r) < \ln M(r) \cdot \left(\ln^{1+\alpha} \ln M(r)\right)^2 < \ln^3 M(r), \tag{1.47}$$

где $r \notin E$ и $0<\alpha=\mathrm{const}$.

Можно подобрать последовательность точек $\{r_j\} \notin E$, на которой верны предельные равенства (1.43) и (1.44) (это вытекает из того, что логарифмическая мера E конечна, а множества E^* бесконечна).

По (1.44)

$$\frac{\ln K(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}} > \sigma,$$

где $\sigma > 1$; $j > j_0(\sigma)$, т. е.

$$K(r_j) > \left(\frac{1}{1-r_j}\right)^{\sigma},$$

и

$$K^{\frac{1}{\sigma}}(r_j) > \frac{1}{1-r_j}.$$

Следовательно,

$$(1-r_j)\, K^{\frac{1}{\sigma}}(r_j) \cdot K^{1-\frac{1}{\sigma}}(r_j) > K^{1-\frac{1}{\sigma}}(r_j);\ K(r_j) > 0; \frac{1}{\sigma} < 1.$$

Таким образом,

$$(1-r_j)\, K(r_j) > K^{1-\frac{1}{\sigma}}(r_j). \tag{1.48}$$

Из (1.47) и (1.48) теперь выводим, что

$$\ln^3 M(r_j) > K^{1-\frac{1}{\sigma}}(r_j),$$

откуда

$$M(r_j) > \exp\{K^{\frac{\sigma-1}{3\sigma}}(r_j)\}.$$

Итак,

$$\frac{K^p(r_j)}{M(r_j)} < \frac{K^p(r_j)}{\exp\left\{K^{\frac{\sigma-1}{3\sigma}}(r_j)\right\}} \underset{j\to\infty}{\to} 0,$$

так как $\frac{\sigma-1}{3\sigma} > 0$ (p — любое постоянное число).

Лемма полностью доказана.

§ 2. 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, алгебраическое относительно z, w и w':

$$F(z,\ w,\ w') = 0 \tag{2.1}$$

(здесь F — многочлен от всех своих переменных).

Пусть уравнению (2.1) удовлетворяют значения z_0, w_0 и w_0' так, что

$$F(z_0,\ w_0,\ w_0') = 0.$$

В том случае, когда начальные значения z_0, w_0 и w_0' таковы, что

$$\frac{\partial F(z_0,\ w_0,\ w_0')}{\partial w'} \neq 0, \tag{2.2}$$

уравнение (2.1) определяет единственную функцию $w(z)$, голоморфную в окрестности z_0 и могущую быть представленной рядом

$$w - w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{2.3}$$

сходящимся внутри некоторого круга $|z-z_0| < R$ (см. [5]).

Мы будем брать $z_0=0$ и $R=1$, что очевидно, не ограничивает общности. Следовательно, в этом случае решение $w(z)$ можем записать (при соблюдении условий (2.2)) в виде ряда

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k; \quad a_0=w_0, \tag{2.4}$$

сходящегося в круге $|z|<1$.

Нашей целью является изучение роста трансцендентных в круге $|z|<1$ решений вида (2.4), то есть таких решений, для которых

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln M(r, w)}{\ln \dfrac{1}{1-r}}=\infty, \tag{2.5}$$

где $M(r, f)=\max\limits_{|z|=r} |w(z)|$.

4. Уравнению (2.1) придаем следующий вид:

$$F^*\left(z, w, \frac{zw'}{w}\right)=0, \tag{2.6}$$

где F^* — многочлен от всех своих переменных (что всегда возможно). Предположим, что функция F^* в равенстве (2.6) степени n по w. Полином F^* разложим теперь по степеням

$$\sum_{i=0}^{n} Q_i\left(z, \frac{zw'}{w}\right) w^{n-i}=0. \tag{2.7}$$

$\Bigl($Здесь $Q_k\left(z, \frac{zw'}{w}\right)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ — полиномы$\Bigr)$. По (2.7) далее,

$$Q_0\left(z, \frac{zw'}{w}\right)=-\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i\left(z, \frac{zw'}{w}\right)}{w^i(z)}. \tag{2.8}$$

Обозначим через ζ точку максимума модуля решения $w(z)$ на окружности $|z|=r$:

$$w(\zeta)=\max_{|z|=r} |w(z)|=M(r).$$

Известно, что при подходящем выборе точек ζ

$$\frac{\zeta w'(\zeta)}{w(\zeta)}=K(r) \tag{2.9}$$

(см. (1.1), [4], [6]). Подставим в уравнение (2.8) его решение (2.4) и положим затем в полученное тождество $z=\zeta$:

$$Q_0(\zeta, K)=-\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i(\zeta, K)}{w^i(\zeta)}. \tag{2.10}$$

Заметим еще, что

$$\frac{Q_i\left(\zeta, \frac{\zeta w'}{w}\right)}{w^i(\zeta)}=\frac{Q_i(\zeta, K)}{w^i(\zeta)}$$

есть выражение следующего типа:

$$\frac{Q_i(\zeta, K)}{w^i(\zeta)}=\sum_{j=0}^{j_i} P_j(\zeta) \frac{K^j}{w^i(\zeta)}; \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n), \tag{2.11}$$

где $P_j^{(i)}(z)$ — полиномы от z.

5. Дальше будем считать решение $w(z)$ трансцендентной функцией в круге $|z|<1$. В соответствии с леммой 2 (см. § 1) существует некоторая последовательность точек G: $\{r_j\}$; $r_j \uparrow 1$, в точках которой верна лемма 1 и на которой

$$\lim_{j\to\infty} \frac{K^p(r_j)}{M(r_j)} = 0 \tag{2.12}$$

с любым постоянным p. Из (2.10), (2.11) и (2.12) при $r_j \in G$ ($|\zeta_j|=r_j$) находим:

$$Q_0(\zeta_j, K) = \omega^*(\zeta_j), \tag{2.13}$$

где $\omega^*(\zeta_j) \to 0$ при $r_j \uparrow 1$. Кроме того,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\omega^*(\zeta_j)}{(1-r_j)^N} = 0 \tag{2.14}$$

при любом постоянном N. В самом деле, при доказательстве леммы 2 в случае трансцендентной функции $w(z)$ конечного порядка ρ мы нашли, что

$$\frac{K^p(r_j)}{M(r_j)} < (1-r_j)^{N_j^* - (\rho'+1)p}; \quad \rho' > \rho; \ j > j_0(\rho'),$$

где $N_j^* \to \infty$ ($j \to \infty$). Отсюда в силу (2.10)

$$|\omega^*(\zeta_j)| < C(1-r_j)^{N_j^* - \beta}; \quad |\zeta_j| = r_j,$$

$C>0$ и $\beta>0$ — некоторые постоянные, а $N_j^* \underset{j\to\infty}{\to} \infty$. В случае же бесконечного порядка

$$|\omega^*(\zeta_j)| < \frac{K^q(r_j)}{\exp\left\{K(r_j)^{\frac{\sigma-1}{3\sigma}}\right\}} < \bar{C}(1-r_j)^{\tilde{N}_j},$$

где $\tilde{N}_j \underset{j\to\infty}{\to} \infty$, так как по лемме 1 (§ 1)

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln K(r_j)}{\ln \frac{1}{1-r_j}} = \infty,$$

и поэтому

$$K(r_j) > (1-r_j)^{-N_j^{**}}; \quad N_j^{**} \underset{j\to\infty}{\to} \infty.$$

Итак, в любом случае ($\rho \leqslant \infty$)

$$|\omega^*(\zeta_j)| < C(1-r_j)^{N_j}, \tag{2.15}$$

где $N_j \underset{j\to\infty}{\to} \infty$, а $C>0$ — некоторая постоянная.

6. Разложив теперь Q_0 по степеням K, мы из (2.13) получаем следующее равенство:

$$\sum_{i=0}^{m} P_i(\zeta_j) K^{m-i} = \omega(\zeta_j), \tag{2.16}$$

здесь $P_i(\zeta_j)$; ($i=0, 1, \ldots, m$) суть полиномы, причем $P_0(z) \not\equiv 0$, а многочлены $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$, $\ldots$, $P_m(z)$ не имеют общих нулей, причем для $\omega(\zeta_j)$ также верно (2.14), т. е.

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\omega(\zeta_j)}{(1-r_j)^N} = 0 \tag{2.17}$$

при любом постоянном N.

Так как функция $w(z)$, удовлетворяющая уравнение (2.1) (или (2.3), представляется сходящимся в круге $|z|<1$ рядом (2.4), то особые точки функции $w(z)$ могут лежать только на окружности $|z|=1$ или вне этой окружности.

7. Отметим сейчас все различные между собой нули многочлена $P_0(z)$: $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Напомним, что по предположению $w(z)$ трансцендентная в круге $|z|<1$ функция. Покажем, что в таком случае хотя бы один нуль полинома $P_0(z)$ должен находиться на окружности $|z|=1$, причем существует такая последовательность точек $\{\zeta_j\}$; $\zeta_j \uparrow 1$, которая обязательно сходится к некоторому нулю функции $P_0(z)$ на единичной окружности. Действительно, в противном случае мы имели бы $|P_0(\zeta_j)| \geqslant \alpha^0 > 0$; $j > j_0$, так что любой корень алгебраического уравнения (2.16) оказался бы ограниченным

$$K(r_j) < C < \infty; \quad C = \text{const}.$$

Последнее противоречит нашему допущению, что решение $w(z)$ — трансцендентная функция, удовлетворяющая условию (2.5).

Пусть a один из нулей полинома $P_0(z)$, лежащий на окружности $|z|=1$, к которому сходится последовательность точек $\{\zeta_j\}$. Разложим каждый полином P_i $(i=0, 1, \ldots, m)$ соотношения (2.16) в окрестности точки $z=a$ по степеням $z-a$:

$$P_i(z) = A_{k_i}^{(i)}(z-a)^{k_i} + A_{k_i-1}^{(i)}(z-a)^{k_i-1} + \ldots + A_0^{(i)} \tag{2.18}$$

$(i=0, 1, \ldots, m)$. Из (2.16) выводим:

$$P_0(\zeta_j) + P_1(\zeta_j)\frac{1}{K} + \ldots + P_m(\zeta_j)\frac{1}{K^m} = \frac{\omega(\zeta_j)}{K^m}, \tag{2.19}$$

где $K = K(r_j)$ и $r_j = |\zeta_j|$. Подставим в последнее равенство разложения (2.17) и приведем его левую часть по степеням $\eta = \zeta_j - a$:

$$R_0\left(\frac{1}{K}\right)\eta^s + R_1\left(\frac{1}{K}\right)\eta^{s-1} + \ldots + R_s\left(\frac{1}{K}\right) = \frac{\omega(\zeta_j)}{K^m}, \tag{2.20}$$

R_i; $(i=0, 1, \ldots, s)$ — многочлены относительно $\frac{1}{K}$, причем $R_0\left(\frac{1}{K}\right) \not\equiv 0$ и не все числа $R_i(0)$ $(i=0, 1, \ldots, s)$ равны нулю. Рассмотрим теперь алгебраическое уравнение

$$R_0\left(\frac{1}{K}\right)\eta^s + R_1\left(\frac{1}{K}\right)\eta^{s-1} + \ldots + R_s\left(\frac{1}{K}\right) = 0. \tag{2.21}$$

Положим

$$R_0\left(\frac{1}{K}\right) = \left(\frac{1}{K}\right)^{\nu} \cdot \tilde{R}_0\left(\frac{1}{K}\right), \tag{2.22}$$

где ν: $m \geqslant \nu \geqslant 0$ — натуральное число, а $\tilde{R}_0\left(\frac{1}{K}\right)$ многочлен, не обращающийся в нуль в точке $\frac{1}{K}=0$, т. е.

$$\tilde{R}_0\left(\frac{1}{K}\right) = a_0\left(\frac{1}{K}\right)_l + a_1\left(\frac{1}{K}\right)_l^{-1} + \ldots + a_l, \tag{2.23}$$

с $a_l \neq 0$. Кроме того, в соответствии с (2.19) $l \leqslant m - \nu$. Пользуясь известными в теории алгебраических функций теоремами (см., например, [9]), корни уравнения (2.21) в окрестности точки $\frac{1}{K}=0$ можем записать в виде:

$$\eta_k = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(k)}\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{j-p_k}{q_k}}, \tag{2.24}$$

здесь $q_k>0$ и p_k — целые числа $(k=1, 2, \ldots, i)$. Представим теперь (2.19) следующим образом:

$$(\zeta_j-a-\eta_1)^{\mu_1}(\zeta_j-a-\eta_2)^{\mu_2}\ \ldots\ (\zeta_j-a-\eta_i)^{\mu_i}=\frac{\omega(\zeta_j)}{K^{m-\nu}\tilde{R}_0\left(\frac{1}{K}\right)}, \qquad (2.25)$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i$ — соответствующие кратности корней η_k $(k=1, 2, \ldots, i)$. Легко видеть, что правая сторона вместе с $\omega(\zeta_j)$ стремится к нулю при $\zeta_j\to 1$. Действительно, так как $m-\nu-l\geqslant 0$ и $K(r_j)\underset{j\to\infty}{\to}\infty$, то

$$\left|K^{m-\nu}R_0\left(\frac{1}{K}\right)\right|=|a_0K^{m-\nu-l}+a_1K^{m-\nu-l+1}+\ldots+a_lK^{m-\nu}|=$$

$$=|a_0|K^{m-\nu-l}\left(1+O\left(\frac{1}{K}\right)\right)\geqslant\frac{1}{2}|a_0|=\alpha_0>0,$$

при $K>K_0>\frac{1}{2}$, потому что $l+\nu\leqslant m$, и поэтому

$$\frac{|\omega(\zeta_j)|}{\left|K^{m-\nu}\tilde{R}_0\left(\frac{1}{K}\right)\right|}\leqslant\frac{1}{\alpha_0}|\omega(\zeta_j)|\underset{j\to\infty}{\to}0.$$

8. Найдется такая последовательность точек $\zeta_j^{(l)}\underset{j\to\infty}{\to}a$ и в левой стороне равенства (2.25) такой множитель $\zeta_j-a-\eta_l$, что

$$\zeta_j^{(l)}-a-\eta_l=\tilde{\omega}(\zeta_j^{(l)}),$$

где

$$|\tilde{\omega}(\zeta_j^{(l)})|<C_0|\omega(\zeta_j)|^{\frac{1}{\mu}},$$

с

$$C_0=\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}\ \text{и}\ \mu=\sum_{k=1}^{i}\mu_k=s.$$

Для простоты вместо $\zeta_j^{(l)}$, $C_j^{(k)}$, p_k, q_k положим ζ, C_j, p, q. По (2.21) и (2.23) теперь имеем:

$$\zeta-a=\eta_l+\tilde{\omega}(\zeta)=\sum_{j=0}^{\infty}C_j\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{j-p}{q}}+\tilde{\omega}(\zeta). \qquad (2.28)$$

Введем обозначения:

$$\zeta=re^{i\varphi},\quad a=|a|e^{i\vartheta}=e^{i\vartheta}\ (|a|=1),\quad C_j=A_j+iB_j.$$

Из (2.28) получаем:

$$re^{i\varphi}-e^{i\vartheta}=\sum_{j=0}^{\infty}(A_j+iB_j)\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{j-p}{q}}+\tilde{\omega}(\zeta)$$

или

$$re^{i(\varphi-\vartheta)}=\sum_{j=0}^{\infty}(A_j+iB_j)\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{j-p}{q}}e^{-i\vartheta}+\tilde{\omega}^*(\zeta)+1 \qquad (2.29)$$

$\left(\tilde{\omega}^*(\zeta)=\tilde{\omega}(\zeta)e^{-i\vartheta};\ |\tilde{\omega}^*(\zeta)|=|\tilde{\omega}(\zeta)|\right)$. Отделяя в (2.29) действительную и мнимую части, найдем:

$$r\cos(\varphi-\vartheta)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{j-p}{q}}\cos\vartheta+\operatorname{Re}\tilde{\omega}^*(\zeta)+1$$

и

$$r\sin(\varphi-\vartheta) = -\sum_{j=0}^{\infty} B_j \left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{j-p}{q}} \sin\vartheta + \operatorname{Im}\tilde{\omega}^*(\zeta). \tag{2.30}$$

Возведем каждое из равенств (2.30) в квадрат и полученные выражения сложим. Мы выводим:

$$r^2-1=\left[\sum_{j=0}^{\infty} A_j \left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{j-p}{q}} \cos\vartheta\right]^2 + 2\sum_{j=0}^{\infty} A_j \left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{j-p}{q}} \cos\vartheta +$$

$$+\left[\sum_{j=0}^{\infty} B_j \left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{j-p}{q}} \sin\vartheta\right]^2 + \tilde{\omega}^{**}(\zeta), \tag{2.31}$$

где

$$\tilde{\omega}^{**}(\zeta) = 2\operatorname{Re}\tilde{\omega}^*(\zeta)\cos\vartheta\cdot\sum_{j=0}^{\infty} A_j \left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{j-p}{q}} - 2\operatorname{Im}\tilde{\omega}^*(\zeta)\sin\vartheta\,\times$$

$$\times\sum B_j \left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{j-p}{q}} + 2\operatorname{Re}\tilde{\omega}^*(\zeta) + [\operatorname{Re}\tilde{\omega}^*(\zeta)]^2 + [\operatorname{Im}\tilde{\omega}^*(\zeta)]^2. \tag{2.32}$$

Очевидно, что для $\tilde{\omega}^{**}(\zeta)$ верно (2.17):

$$\lim_{j\to\infty} \tilde{\omega}^{**}(\zeta)(1-r_j)^{-N} = 0. \tag{2.33}$$

Возводя ряды в (2.31) в квадрат и собрав все члены в один ряд, представим (2.31) в следующем виде:

$$r^2-1=\sum_{j=0}^{\infty} C_j(\vartheta)\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{j-p}{q}} + \tilde{\omega}^{**}(\zeta), \tag{2.34}$$

где коэффициенты $C_j(\vartheta)$ выражаются через A_j, B_j, $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$.

9. Не все коэффициенты $C_j(\vartheta)=0$, $j=0, 1, \ldots$ В самом деле, допустим, что эте не так и что все $C_j(\vartheta)=0$. Тогда по (2.34)

$$r-1=\frac{\tilde{\omega}^{**}(\zeta)}{1+r}. \tag{2.35}$$

Но, в силу

$$\tilde{\omega}^{**}(\zeta) < D(1-r)^2, \tag{2.36}$$

где $D=\text{const}$. Таким образом, (2.35) и (2.36) дает нам противоречивое неравенство при $r\to 1$:

$$1-r < D(1-r)^2.$$

Итак, не все $C_j(\vartheta)=0$; $j=0, 1, 2, \ldots$ Пусть $C_l(\vartheta)$ – первый коэффициент в (2.34) не равный нулю. Из (2.34) сейчас находим

$$\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{l-p}{q}} C_l(\vartheta)\left[1+O\left(\frac{1}{K^{\frac{1}{q}}}\right)\right] = (r-1)(r+1)-\tilde{\omega}^{**}(\zeta). \tag{2.37}$$

Но, по (2.33)

$$(r-1)(r+1)-\tilde{\omega}^{**}(\zeta)=(r-1)(r+1)\Big(1+O(1-r)\Big).$$

(2.37) дает нам теперь:

$$K=\left[\frac{|C_l(\vartheta)|}{2}\cdot\frac{1}{1-r}\right]^{\frac{q}{l-p}}\Big(1+o(1)\Big). \tag{2.38}$$

Последовательность ζ_j была нами выбрана так (см. п. 5), чтобы выполнялась лемма 2. Поэтому порядок функции $\ln K(r)$ больше порядка функции $w(z)$ на единицу. (2.38) показывает, что порядок функции $w(z)$ равен

$$\rho = \frac{q}{l-p} - 1.$$

Для получения указанного порядка мы предпологали, что $\zeta_j^{(l)} \to a + \eta_e$. Но априори можно предположить, что существуют подпоследовательности $\zeta_j^{(l)}$, сходящиеся к каждому из корней $\eta_e + a$. Поэтому, для того, чтобы найти все возможные порядки трансцендентных решений уравнения (2.1), следует проделать указанные нами операции около каждого из корней полинома $P_0(z)$ в (2.16), лежащих на окружности $|z|=1$.

Из приведенного нами исследования следует сразу и результат Валирона об отсутствии трансцендентных решений нулевого порядка уравнений (2.1).

Укажем еще на следующее. Если в разложениях (2.24) около каждого из корней соответствующих всем нулям $P_0(z)$ $\big($см. (2.19)$\big)$ уравнений (2.21) $\frac{q_k}{p_k} \leqslant 1$, то уравнение (2.1) голоморфных трансцендентных решений в окрестности начала координат не имеет.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
20.VI.1967

Литература

1. G. Valiron, Fonctions analytiques et équations differentielles, J. math. pures et appl., **31** (1952), 293–303.

2. G. Valiron, Fonctions entières et équations differentielles, Bull. Soc. Math. France, **176** (1952), 144–148.

3. Ж. Валирон, Аналитические функции, М., 1957.

4. A. J. Macintyre, On the Bloch's theorem, Math. Zeitschrift, **44** (1939), 536–540.

5. В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М.–Л., 1950.

6. Ш. И. Стрелиц, О максимальных модулях аналитических функций, УМН, **X**, 4 (66), (1955), 153–160.

7. Ш. И. Стрелиц, Поведение аналитической функции при больших значениях ее модуля, Лит. мат. сб., **III** № 2 (1963), 357–408.

8. А. В. Нагяле, Поведение голоморфной в круге функции при больших значениях ее модуля, Лит. мат. сб., **VI** № 3 (1966), 397–421.

9. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М.–Л., 1950.

PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ HOLOMORFINIŲ SPRENDINIŲ ELGIMASIS SKRITULYJE

A. NAGELĖ, Š. STRELICAS

(Reziumė)

Holomorfinę funkciją $f(z)$ skritulyje $|z|<R$ vadiname transcendentine, kai ji patenkina sąlygą

$$\overline{\lim_{r\to R}} \frac{\ln M(r, f)}{\ln \dfrac{1}{R-r}} = \infty,$$

čia $M(r, f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Darbe nustatoma pirmos eilės diferencialinės lygties

$$F(z, w, w') = 0 \tag{1}$$

sprendinio, transcendentinio baigtiniame skritulyje $|z| < R$, eilė. Iš darbe gautų rezultatų seka Valirono tvirtinimas, kad (1) lygtis neturi nulinės eilės transcendentinių sprendinių.

DAS VERHALTEN HOLOMORPHEN IM KREISE LÖSUNGEN EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG

A. NAGELE, S. STRELITZ

(Zusammenfassung)

Die im Kreise $|z| < R$ holomorphe Funktion $f(z)$ nennen wir transzendent, wenn sie die Bedingung

$$\overline{\lim_{r \to R}} \frac{\ln M(r, f)}{\ln \frac{1}{R-r}} = \infty$$

befriedigt, wo $M(r, f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

In der vorliegenden Arbeit bestimmen wir die Ordnung einer im endlichen Kreise $|z| < R$ transzendenten Lösung der Differentialgleichung

$$F(z, w, w') = 0. \tag{1}$$

Aus den Resultaten dieser Arbeit folgt im einzelnen die Valironsche Behauptung, dass die Gleichung (1) keine transzendente Lösung der nullten Ordnung besitzt.