УДК–512.25/.26+519.3:330.115

ПОЛИТОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

В. Б. БИСТРИЦКАС

1. *Дихотомический выбор.* Пусть процесс $f(x, y)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x, y)=\max\begin{bmatrix} A: p_1[A(x)+f(r_1 x, y)], \\ B: p_2[B(y)+f(x, r_2 y)] \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $0\leqslant p_1, p_2, r_1, r_2<1$; $0\leqslant x, y<\infty$. $A(x)$ и $B(y)$ – ограниченные функции, определенные в интервале $[0, \infty)$. Р. Беллманом было исследовано (см.[1], стр. 91) поведение бесконечношагового стохастического процесса (уравнение золотодобычи), когда функции выигрыша $A(x)=(1-r_1)x$ и $B(y)=(1-r_2)y$. В настоящей работе найдены области решения для процесса $f(x, y)$, когда обе функции $A(x)$ и $B(y)$ либо невозрастающие, либо неубывающие, либо одна из них – неубывающая, а другая – невозрастающая. Теоремы существования и единственности для данного процесса $f(x, y)$ доказываются аналогично, как и в случае $A(x)=(1-r_1)x$, $B(y)=(1-r_2)y$ (см. [1], стр. 86).

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} \alpha(x)&=p_1\sum_{i=0}^{\infty} p_1^i A(r_1^i x)=f_{A\infty}(x, y), \\ \beta(y)&=p_2\sum_{i=0}^{\infty} p_2^i B(r_2^i y)=f_{B\infty}(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть $A(x)$ – невозрастающая функция. Тогда при $f(x^0, y^0)=f_A(x^0, y^0)$*

$$f_A(x, y^0)=f_{A\infty}(x, y^0) \quad \text{для} \quad 0\leqslant x\leqslant x^0 \tag{3}$$

и при $f(x^0, y^0)\neq f_A(x^0, y^0)$

$$f(x, y^0)\neq f_A(x, y^0) \quad \text{для} \quad x^0\leqslant x<\infty. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим

$$S(x, y)=f_A(x, y)-f_B(x, y).$$

Предположив, что $x<x_0$, имеем

$$S(x, y)-S(x_0, y)=p_1[A(x)-A(x_0)]+$$
$$+p_1[f(r_1 x, y)-f(r_1 x_0, y)]-p_2[f(x, r_2 y)-f(x_0, r_2 y)].$$

Обозначим через $B^{n_1}A\ldots$, $B^{m_1}A\ldots$ оптимальные последовательности выборов, соответственно в точках $(x, r_2 y)$ и $(r_1 x_0, y)$. Тогда

$$f(x, r_2 y) = f_{B^{n_1}A}(x, r_2 y),$$
$$f(r_1 x_0, y) = f_{B^{m_1}A}(r_1 x_0, y),$$

где n_1, m_1 — целые неотрицательные числа, и

$$S(x, y) - S(x_0, y) \geqslant p_1[A(x) - A(x_0)](1 - p_2^{n_1+1}) +$$
$$+ p_1 p_2^{m_1}[f(r_1 x, r_2^{m_1} y) - f(r_1 x_0, r_2^{m_1} y)] -$$
$$- p_1 p_2^{n_1+1}[f(r_1 x, r_2^{n_1+1} y) - f(r_1 x_0, r_2^{n_1+1} y)].$$

Если $m_1 \geqslant n_1 + 1$, то

$$S(x, y) - S(x_0, y) \geqslant p_1[A(x) - A(x_0)](1 - p_2^{n_1+1}) +$$
$$+ p_1 p_2^{n_1+1}[f(r_1 x, r_2^{n_1+1} y) - f(r_1 x_0, r_2^{n_1+1} y)] -$$
$$- p_1 p_2^{n_1+1}[f(r_1 x, r_2^{n_1+1} y) - f(r_1 x_0, r_2^{n_1+1} y)] =$$
$$= p_1[A(x) - A(x_0)](1 - p_2^{n_1+1}) \geqslant 0.$$

Если $m_1 < n_1 + 1$, то, обозначив через $B^{n_2}A\ldots$, $B^{m_2}A\ldots$ оптимальные последовательности выборов соответственно в точках

$$(r_1 x, r_2^{n_1+1} y) \text{ и } (r_1^2 x_0, r_2^{m_1} y),$$

имеем, что

$$\left.\begin{aligned} &S(x, y) - S(x_0, y) \geqslant p_1[A(x) - A(x_0)](1 - p_2^{n_1+1}) + \\ &+ p_1^2 p_2^{m_1}[A(r_1 x) - A(r_1 x_0)](1 - p_2^{n_1+n_2-m_1+1}) + \\ &+ p_1^2 p_2^{m_1+m_2}[f(r_1^2 x, r_2^{m_1+m_2} y) - f(r_1^2 x_0, r_2^{m_1+m_2} y)] - \\ &- p_1^2 p_2^{n_1+n_2+1}[f(r_1^2 x, r_2^{n_1+n_2+1} y) - f(r_1^2 x_0, r_2^{n_1+n_2+1} y)]. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если $m_1 + m_2 \geqslant n_1 + n_2 + 1$, то аналогично случаю, когда $m_1 \geqslant n_1 + 1$, в правой стороне неравенства (5) останутся два неотрицательных члена. Обозначим через $B^{n_k}A\ldots$, $B^{m_k}A\ldots$ $(k = 3, 4, \ldots)$ оптимальные последовательности выборов, соответственно в точках

$$\left(r_1^{k-1} x, r_2^{\sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1} y\right) \text{ и } \left(r_1^k x_0, r_2^{\sum_{i=1}^{k-1} m_i} y\right).$$

Тогда на каждом шаге процесса в случае

$$\sum_{i=1}^{\sigma} m_i < \sum_{i=1}^{\sigma} n_i + 1 \, (\sigma = 2, 3 \ldots)$$

прибавляются неотрицательные члены вида

$$p_1^{\sigma+1} p_2^{\sum_{i=1}^{\sigma} m_i}[A(r_1^{\sigma} x) - A(r_1^{\sigma} x_0)]\left(1 - p_2^{\sum_{i=1}^{\sigma+1} n_i + 1 - \sum_{i=1}^{\sigma} m_i}\right).$$

Если же для некоторого $\sigma = 2, 3, \ldots$

$$\sum_{i=1}^{\sigma} m_i \geqslant \sum_{i=1}^{\sigma} n_i + 1,$$

то при этом σ процесс оборвется, так как

$$f\Big(r_1^\sigma x_0,\ r_2^{\sum\limits_{i=1}^{\sigma-1} m_i} y\Big)=f_{B^{m_\sigma}}\Big(r_1^\sigma x_0,\ r_2^{\sum\limits_{i=1}^{\sigma-1} m_i} y\Big)=f_{B^{\sum\limits_{i=1}^{\sigma} n_i+1-\sum\limits_{i=1}^{\sigma-1} m_i}},$$

где $m_\sigma \geqslant \sum\limits_{i=1}^{\sigma} n_i+1-\sum\limits_{i=1}^{\sigma-1} m_i$ и члены вида

$$p_1^\sigma p_2^{\sum\limits_{i=1}^{\sigma} m_i}\Big[f\Big(r_1^\sigma x,\ r_2^{\sum\limits_{i=1}^{\sigma} m_i} y\Big)-f\Big(r_1^\sigma x_0,\ r_2^{\sum\limits_{i=1}^{\sigma} m_i} y\Big)\Big]-$$

$$-p_1^\sigma p_2^{\sum\limits_{i=1}^{\sigma} n_i+1}\Big[f\Big(r_1^\sigma x,\ r_2^{\sum\limits_{i=1}^{\sigma} n_i+1} y\Big)-f\Big(r_1^\sigma x_0,\ r_2^{\sum\limits_{i=1}^{\sigma} n_i+1} y\Big)\Big]$$

сокращаются. Следовательно, в любом случае

$$S(x,\ y)-S(x_0,\ y)\geqslant 0 \quad \text{для} \quad x\leqslant x_0. \tag{6}$$

Если $f(x_0, y)=f_A(x_0, y)$, то $S(x_0, y)\geqslant 0$. После решения A точка (x_0, y) перейдет в точку $(r_1\ x_0, y)$, в которой по соотношению (6) оптимальным будет опять выбор A. Рассуждение может быть повторено, и это завершает доказательство соотношения (3). Кроме того, из соотношения (6) заключаем, что верно (4).

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $B(y)$ — невозрастающая функция. Тогда при $f(x^0, y^0)=f_B(x^0, y^0)$*

$$f_B(x^0,\ y)=f_{B\infty}(x^0,\ y) \ \text{для}\ 0\leqslant y\leqslant y^0$$

и при $f(x^0,\ y^0)\neq f_B(x^0,\ y^0)$

$$f(x^0,\ y)\neq f_B(x^0,\ y) \ \text{для}\ y^0\leqslant y<\infty.$$

На основании лемм 1 и 2 верно следующее предложение.

Теорема 1. *Если $A(x)$* и *$B(y)$ — невозрастающие функции, то*

$$f(x,\ y)=\max\,[\alpha(x),\ \beta(y)], \tag{7}$$

где функции $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ определены соотношениями (2).

Обозначим

$$E=[0,\ \infty)\times[0,\ \infty).$$

Следствие 1. *Пусть $A(x)$ и $B(y)$ — непрерывные, монотонно убывающие функции.*

При $\alpha(0)>\beta(\infty)$ и $\beta(0)>\alpha(\infty)$

$$f(x,\ y)=\left[\begin{array}{l} f_{B\infty}(x,\ y) \ \text{ниже, правее и на линии}\ y=\varphi(x), \\ f_{A\infty}(x,\ y) \ \text{выше, левее и на линии}\ y=\varphi(x) \end{array}\right], \tag{8}$$

где $y=\varphi(x)$ — непрерывная, монотонно возрастающая неявная функция, определенная уравнением $\alpha(x)-\beta(y)=0$.

При $\alpha(0)\leqslant\beta(\infty)$

$$f(x, y)=f_{B\infty}(x, y) \ \text{для всех}\ (x,\ y)\in E.$$

При $\beta(0) \leqslant \alpha(\infty)$

$$f(x, y) = f_{A^\infty}(x, y) \text{ для всех } (x, y) \in E.$$

Доказательство. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ являются непрерывными и монотонно убывающими функциями, так как таковыми являются функции $A(x)$ и $B(y)$. Кроме того, из неравенства $\alpha(\infty) < \beta(0)$ и $\beta(\infty) < \alpha(0)$ и непрерывности $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ следует существование таких x_0 и y_0, что $\alpha(x_0) = \beta(y_0)$ $(0 \leqslant x_0, y_0 < \infty)$. Таким образом, по теореме о существовании неявной функции (см. [2], стр. 449) $\varphi(x)$ существует, однозначна и непрерывна в области E. Итак, из теоремы 1 и из монотонного убывания функций $\beta(y)$ и $\alpha(x)$ следует соотношение (8).

Покажем, что функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда

$$\beta\left(\varphi(x_1)\right) = \alpha(x_1) > \alpha(x_2) = \beta\left(\varphi(x_2)\right).$$

Следовательно,

$$\varphi(x_1) < \varphi(x_2).$$

Так как $\alpha(x) > \beta(y)$ для всех $(x, y) \in E$ при $\alpha(\infty) \geqslant \beta(0)$ и $\beta(y) > \alpha(x)$ для всех $(x, y) \in E$ при $\beta(\infty) \geqslant \alpha(0)$, то в силу теоремы 1 и определения (2) верны остальные два утверждения следствия.

Аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 3. *Пусть* $B(y)$ — *неубывающая функция. Тогда при* $f(x^0, y^0) = f_B(x^0, y^0)$

$$f(x^0, y) = f_B(x^0, y) \text{ для } y^0 \leqslant y < \infty$$

и при $f(x^0, y^0) \neq f_B(x^0, y^0)$

$$f(x^0, y) \neq f_B(x^0, y) \text{ для } 0 \leqslant y \leqslant y^0.$$

Теорема 2. *Если* $A(x)$ и $B(y)$ — *неубывающие функции, то*

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f_A(x, y), \text{ когда } pA(x) > B(y), \\ f_B(x, y), \text{ когда } pA(x) < B(y), \\ f_A(x, y) = f_B(x, y), \text{ когда } pA(x) = B(y) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где

$$p = \frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)}.$$

Доказательство. Пусть

$$pA(x_0) > B(y_0) \text{ для } (x_0, y_0) \in E. \tag{10}$$

Докажем неравенство

$$f_A(x_0, y_0) > f_B(x_0, y_0). \tag{11}$$

Допустим, что

$$f_A(x_0, y) \leqslant f_B(x_0, y) \text{ для всех } 0 < y \leqslant y_0. \tag{12}$$

Тогда

$$f(x_0, y)=f_{B^\infty}(x_0, y)=p_2 \sum_{i=0}^{\infty} p_2^i B(r_2^i y) \geqslant f_{AB^\infty}(x_0, y)=$$

$$=p_1 A(x_0)+p_1 p_2 \sum_{i=0}^{\infty} p_2^i B(r_2^i y),$$

когда $0<y\leqslant y_0$. Так как

$$\frac{B(y)}{1-p_2} \geqslant \sum_{i=0}^{\infty} p_2^i B(r_2^i y)$$

и согласно предположению (10)

$$\frac{B(y)}{1-p_2}<\frac{p_1 A(x_0)}{p_2(1-p_1)}, \quad 0\leqslant y\leqslant y_0,$$

то неравенство

$$p_2(1-p_1) \sum_{i=0}^{\infty} p_2^i B(r_2^i y)\geqslant p_1 A(x_0)$$

невозможно для $0<y\leqslant y_0$. Следовательно, предположение (12) неверно, т. е. существует точка $y^0 \in (0, y_0]$, что

$$f(x_0, y^0)>f_B(x_0, y^0).$$

Отсюда и из леммы 3 заключаем

$$f_A(x_0, y)>f_B(x_0, y), \quad \text{когда} \quad 0\leqslant y\leqslant y^0. \tag{13}$$

Предположим, что

$$f_A(x_0, y)\leqslant f_B(x_0, y), \quad \text{когда} \quad y^0<y\leqslant \min\left(\frac{y^0}{r_2}, y_0\right). \tag{14}$$

Тогда в силу соотношения (13)

$$f(x_0, y)=p_2[B(y)+f(x_0, r_2 y)]=f_{BA}(x_0, y).$$

Так как

$$f_{AB}(x_0, y)-f_{BA}(x_0, y)=p_1(1-p_2) A(x_0)-p_2(1-p_1) B(y)=$$

$$=p_2(1-p_1)[pA(x_0)-B(y)],$$

то согласно предположению (10)

$$f_{AB}(x_0, y)-f_{BA}(x_0, y)>0, \quad \text{когда} \quad 0\leqslant y\leqslant y_0.$$

Следовательно,

$$f_A(x_0, y)>f_B(x_0, y), \quad \text{когда} \quad 0\leqslant y\leqslant \min\left(\frac{y^0}{r_2} y_0\right).$$

Распространяя аналогичные рассуждения по индукции, из последнего соотношения получаем неравенство (11). Аналогично доказываются соотношения

$$f_A(x, y)\geqslant f_B(x, y)$$

и

$$f_B(x, y)\geqslant f_A(x, y),$$

когда $pA(x)=B(y)$, и

$$f_B(x, y)>f_A(x, y),$$

когда $pA(x)<B(y)$. Отсюда с учетом неравенства (11) следует соотношение (9).

Следствие 2. *Пусть $A(x)$ и $B(y)$ — непрерывные, монотонно возрастающие функции.*

Если $pA(\infty)>B(0)$ и $B(\infty)>pA(0)$, то

$$f(x, y)=\begin{cases} f_A(x, y) & \text{выше, левее и на линии } y=y(x), \\ f_B(x, y) & \text{ниже, правее и на линии } y=y(x) \end{cases},$$

где $y=y(x)$ — непрерывная монотонно возрастающая неявная функция, определенная уравнением $pA(x)-B(y)=0$.

Если $pA(\infty)\leqslant B(0)$, то

$$f(x, y)=f_{B\infty}(x, y) \quad \text{для всех} \quad (x, y)\in E.$$

Если $B(\infty)\leqslant pA(0)$, то

$$f(x, y)=f_{A\infty}(x, y) \quad \text{для всех} \quad (x, y)\in E.$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Теорема 3. *Пусть $A(x)$ и $B(y)$ — соответственно невозрастающая и неубывающая функции, тогда*

$$f(x, y)=\begin{bmatrix} f_{A\infty}(x, y), \text{ когда } (1-p_2)\,\alpha(x)>p_2 B(y), \\ f_B(x, y), \text{ когда } (1-p_2)\,\alpha(x)<p_2 B(y), \\ f_{BA\infty}(x, y)=f_{A\infty}(x, y), \text{ когда } (1-p_2)\,\alpha(x)=p_2 B(y). \end{bmatrix} \tag{15}$$

Доказательство. Докажем соотношение

$$f(x_*, y_*)=f_{A\infty}(x_*, y_*) \text{ для } (1-p_2)\,\alpha(x_*)>p_2 B(y_*), \tag{16}$$

$(x_*, y_*)\in E$. Предположим, что

$$f(x_*, y)=f_B(x_*, y) \text{ для всех } 0<y\leqslant y_*. \tag{17}$$

Тогда

$$f_B(x_*, y)=f_{B\infty}(x_*, y)\leqslant\frac{p_2 B(y)}{1-p_2}, \quad 0<y\leqslant y_*.$$

В силу условия соотношения (16) и неубывания $B(y)$

$$\frac{p_2 B(y)}{1-p_2}<\alpha(x_*), \text{ когда } 0<y\leqslant y_*.$$

Поэтому

$$f_B(x_*, y)<\alpha(x_*)=f_{A\infty}(x_*, y), \quad 0<y\leqslant y_*.$$

Следовательно, предположение (17) неверно, т. е. существует точка

$$y^0\in(0, y_*],$$

что

$$f(x_*, y^0)=f_A(x_*, y^0).$$

Отсюда согласно лемме 1 получаем, что

$$f(x_*, y^0)=f_{A\infty}(x_*, y^0).$$

Тогда по лемме 3

$$f_{A\infty}(x_*, y) > f_B(x_*, y), \quad 0 \leqslant y \leqslant y^0.$$

Далее, производя стандартные рассуждения, заключаем, что

$$f_{A\infty}(x_*, y_*) > f_B(x_*, y_*),$$

и соотношение (16) доказано.

Так как

$$f_{A\infty}(x_*, y_*) = f_{BA\infty}(x_*, y_*), \quad \text{когда} \quad p_2 B(y_*) = (1-p_2)\,\alpha(x_*),$$

$$f_{A\infty}(x_*, y_*) < f_{BA\infty}(x_*, y_*), \quad \text{когда} \quad p_2 B(y_*) > (1-p_2)\,\alpha(x_*),$$

и верно соотношение (16), то верна и теорема.

По теореме о существовании неявной функции и по теореме 3 аналогично следствию 1 получаем

Следствие 3. *Пусть $A(x)$ и $B(y)$ — непрерывные, соответственно убывающая и возрастающая функции.*

Если $(1-p_2)\alpha(0) > p_2 B(0)$ *и* $(1-p_2)\alpha(\infty) < p_2 B(\infty)$, *то*

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{A\infty}(x, y) & \text{ниже, левее и на линии} \quad y = \psi(x), \\ f_B(x, y) & \text{выше, правее и на линии} \quad y = \psi(x) \end{bmatrix},$$

где $y = \psi(x)$ *— непрерывная, монотонно убывающая неявная функция, определенная уравнением* $(1-p_2)\alpha(x) - p_2 B(y) = 0$.

Если $(1-p_2)\alpha(0) \leqslant p_2 B(0)$, *то*

$$f(x, y) = f_{B\infty}(x, y) \text{ для всех } (x, y) \in E.$$

Если $(1-p_2)\,\alpha(\infty) \geqslant p_2 B(\infty)$, *то*

$$f(x, y) = f_{A\infty}(x, y) \text{ для всех } (x, y) \in E.$$

2. *Политомический выбор.* Пусть

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_i \{ A_i : p_i [A_i(x_i) + \\ + f(x_1, x_2, \ldots, r_i x_i, \ldots, x_n)] \}, \tag{18}$$

где

$$i = 1, 2, \ldots, n; \; 0 \leqslant p_i, \; r_i < 1; \; 0 \leqslant x_i < \infty;$$

$A_i(x_i)$ — ограниченные функции, определенные для $0 \leqslant x_i \leqslant \bar{x}_i$.

Обозначим

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\alpha_i(x_i) = p_i \sum_{s=0}^{\infty} p_i^s A_i(r_i^s x_i); \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 4. *Если* $A_i(x_i)$ *— невозрастающие функции* $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *то*

$$f(x) = f_{A_m}(x), \quad \text{когда} \quad \alpha_m(x_m) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i(x_i). \tag{19}$$

Если $A_i(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *— неубывающие функции, то*

$$f(x) = f_{A_s}(x), \quad \text{когда} \quad \frac{p_s A_s(x_s)}{1-p_s} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{p_i A_i(x_i)}{1-p_i}. \tag{20}$$

Доказательство основано на применении теорем 1 и 2.

Непосредственно из теорем 4 и 3 вытекает

Теорема 5. *Если* $A_i(x_i)$, $0<i\leqslant p<n$ — *невозрастающие функции и* $A_j(x_j)$, $p<j\leqslant n$ — *неубывающие функции, то*

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} f_{A_m}(x), & \text{когда } \frac{p_m A_m(x_m)}{1-p_m}\geqslant\alpha_u(x_u), \\ f_{A_u}(x), & \text{когда } \frac{p_m A_m(x_m)}{1-p_m}\leqslant\alpha_u(x_u) \end{array}\right\}, \tag{21}$$

где

$$\frac{p_m A_m(x_m)}{1-p_m}=\max_{p<j\leqslant n}\frac{p_j A_j(x_j)}{1-p_j},$$

$$\alpha_u(x_u)=\max_{0<i\leqslant p}\alpha_i(x_i).$$

Автор выражает благодарность Н. Н. Воробьеву за постановку задачи и Э. Й. Вилкасу за ценные указания при ее решении.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
20.XII.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Беллман, Динамическое программирование, М., ИЛ, 1960.
2. Г. М. Фихтенгольц, Курс диф. и интег. исчис., М., Физматиздат, т. 1, 1962.

POLITOMINIS DINAMINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINYS

V. Bistrickas

(*Reziumė*)

Darbe surandama (1) funkcionalinės lygties sprendinio $f(x, y)$ elgesys, kai funkcijos $A(x)$ ir $B(y)$ – monotoniškos. Gauti rezultatai apibendrinami (18) funkcionalinei lygčiai.

POLYTOMIC DYNAMIC PROGRAMMING PROBLEM FOR THE MONOTONIC FUNCTIONS

V. Bistrickas

(*Summary*)

A behaviour of solution of the functional equation (1) is found when functions $A(x)$ and $B(y)$ are monotonic. These results are generalized for the funct onal equation (18).