VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1968

УДК–517.5

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Е. ДАГЕНЕ

В настоящей работе рассматриваются асимптотические свойства функции, определенной в полосе $-1 \leqslant x < 0$ и удовлетворяющей условию

$$S(x, f) = S(x) = \sup_{-\infty < y < +\infty} |f(x+iy)| < \infty; \quad -1 \leqslant x < 0.$$

В работе применяется метод, предложенный Ш. И. Стрелицем. Этим же методом А. Нагяле изучил аналогичную асимптотику для аналитической в круге $|z| < 1$ функции (см. [4]). Результаты Нагяле легко получаются из наших результатов, но не наоборот. В нашем изложении мы используем предложения типа Бореля—Неванлинна, которые в нашем случае приобретают следующий вид.

Теорема (А). *Пусть* $u(x) > 0$ – *неубывающая и непрерывная справа функция на полусегменте* $-1 \leqslant x < 0$, *и* $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = \infty$.

Пусть $\varphi(t) > 0$ – *убывающая и непрерывная на полуоси* $t > 0$ *функция, причем*

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\, dt < \infty.$$

Тогда вне множества интервалов E *полусегмента* $[-1, 0)$ *конечной логарифмической меры справедливо неравенство*

$$u(x+\tau) - u(x) < 1, \tag{1}$$

где $\tau \leqslant |x| \varphi[u(x)]$.

Теорема Б. *Пусть* $u(x) > 0$ – *неубывающая и непрерывная справа функция на полусегменте* $-1 \leqslant x < 0$ *и* $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = \infty$.

Всюду на полуинтервале $-1 \leqslant x < 0$ *за исключением некоторого множества интервалов конечной логарифмической меры (число исключенных интервалов на каждом отрезке* $-1 \leqslant x \leqslant x_0$ *конечное) при*

$$|\tau| \leqslant \frac{|x|}{u^{1-\delta}(x) \ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)} u(x)},$$

где $\alpha > 0$, $0 \leqslant \gamma < 1$, $0 \leqslant \delta < 1$, *верно неравенство*

$$|u(x+\tau) - u(x)| < u^{\delta}(x) \ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)} u(x). \tag{2}$$

Доказательство подобных предложений в [4], а x модификация для каждого случая очевидна.

1. Пусть $f(z)$ — аналитическая в полосе $-1 \leqslant x < 0$ $(z=x+iy)$ функция и

$$S(x)=S(x, f)=\sup_{-\infty<y<+\infty}|f(x+iy)|<\infty; \quad -1 \leqslant x<0. \tag{4}$$

Нам будет нужно следующее предложение (доказательство см. [3]).

Теорема C. *Функция* $\ln S(x)$, $-1 \leqslant x<0$, *есть выпуклая функция от* x.

Из свойств выпуклой функции следует, что $\ln S(x)$ имеет неубывающую производную справа. Обозначим ее через $L(x)$:

$$L(x)=L(x, f)=\frac{S'(x, f)}{S(x, f)}=\frac{S'(x)}{S(x)}.$$

Кроме того, для $\ln S(x)$ в силу выпуклости последнего справедливо соотношение:

$$L(x)\tau \leqslant \ln S(x+\tau)-\ln S(x) \leqslant L(x+\tau)\tau. \tag{5}$$

Ниже всюду будем предполагать, что

$$\varlimsup_{x\to 0}|x|L(x)=\infty. \tag{6}$$

Тогда $\lim_{x\to 0} L(x)=\infty$, и $L(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы B.

Класс определенных нами соотношением (4) функций будем обозначить через π_0.

Пусть $f(z)\in\pi_0$. Рассмотрим функцию $f(w+\eta)$, где $\eta=\tau+i\sigma$, а w $(-1 \leqslant x=\operatorname{Re} w<0)$ — точка, в которой

$$|f(w)| \geqslant L^{-\beta(x)}(x)\ S(x), \tag{7}$$

причем $\beta(x)>0$ — некоторая функция, которую определим ниже. Оценим коэффициенты ряда:

$$\frac{f(w+\eta)}{f(w)}\, e^{-\eta L(x)}=1+\sum_{j=1}^{\infty} A_j(w)\eta^j, \tag{8}$$

сходящегося при $|\eta|<\min(|x|, 1-|x|)$.

Лемма 1. *При* $|x|<\frac{1}{2}$ *справедлива следующая оценка*:

$$\left|\frac{f(w+\eta)}{f(w)}\, e^{-\eta L(x)}\right|<L^{\beta(x)}(x)\, e^{|x|L^{2\delta-1}(x)}; \qquad x \notin E, \tag{9}$$

где E *— множество интервалов ограниченной логарифмической меры (см. теорему* B).

Доказательство. Оценим левую часть равенства (8). Пользуясь (5) и (7), находим:

$$\left|\frac{f(w+\eta)}{f(w)}\, e^{-\eta L(x)}\right| \leqslant \frac{S(x+\tau)}{L^{-\beta(x)}(x)\, S(x)}\, e^{-\tau L(x)}=$$

$$=L^{\beta(x)}(x)\, e^{\ln S(x+\tau)-\ln S(x)-\tau L(x)} \leqslant L^{\beta(x)}(x)\, e^{|\tau|\,|L(x+\tau)-L(x)|}. \tag{10}$$

Далее на основании теоремы B при

$$|\tau| \leqslant \frac{|x|}{L^{1-\delta}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)} L(x)} \qquad (\alpha>0,\ 0 \leqslant \delta<1,\ 0 \leqslant \gamma<1)$$

имеем:

$$|\tau|\,|L(x+\tau)-L(x)|<\frac{|x|\,L^{\delta}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)} L(x)}{L^{1-\delta}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)} L(x)}=|x|\,L^{2\delta-1}(x).$$

Отсюда и (10) следует (9), что и требовалось доказать.

2. Обозначим

$$\mu(x)=\frac{\ln L(x)}{\ln\frac{1}{|x|}}. \tag{11}$$

$\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\,\mu(x)$ всегда больше или равно единице, так как из $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\,|x|\,L(x)=\infty$ (см. (6)) вытекает, что на некоторой последовательности $\{x_j\}x_j\uparrow 0$, $|x_j|L(x_j)\geqslant \geqslant C>1$ и $L(x_j)\geqslant \ln\frac{1}{|x_j|}+\ln C$. Рассмотрим далее случай, когда

$$\underline{\lim\limits_{x\to 0}}\,\mu(x)=\lambda>1.$$

Заметим, что при этом всегда $\lim\limits_{x\to 0}|x|\;L(x)=\infty$. Подберем теперь $\delta>0$ так, чтобы в (9) было

$$|x|\,L^{2\delta-1}(x)\leqslant C<\infty. \tag{12}$$

Имеем:

$$(2\delta-1)\ln L(x)\leqslant \ln C+\ln\frac{1}{|x|}$$

и при $L(x)>1$, т. е. при $|x|$ достаточно малом,

$$\delta<\frac{1}{2}\left\{\frac{\ln C}{\ln L(x)}+\frac{\ln\frac{1}{|x|}}{\ln L(x)}+1\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\ln C}{\ln L(x)}+\frac{1}{\mu(x)}+1\right\}. \tag{12a}$$

Неравенство (12) будет выполнено при $|x|<|x_0|$, где $|x_0|$ достаточно мало, если выбрать

$$\delta<\frac{\lambda+1}{2\lambda}. \tag{12б}$$

Неравенство (9) дает нам сейчас:

$$\left|\frac{f(w+\eta)}{f(w)}\,e^{-\eta L(x)}\right|<C_1L^{\beta(x)}(x);\qquad |x|<|x_0|,\quad x\notin E,\quad C_1=e^C. \tag{13}$$

По теореме Коши для коэффициентов ряда (8) находим оценки:

$$|A_j|<C_1\,L^{\beta(x)}(x)\frac{1}{|\eta|^j}.$$

Если взять

$$|\eta|=\frac{|x|}{L^{1-\delta}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)},$$

то

$$|A_j|<C_1L^{\beta(x)}(x)\left[\frac{L^{1-\delta}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{|x|}\right]^j. \tag{14}$$

Лемма 2. *Пусть $f(w)$ — множество точек, в каждой из которых*

$$|f(w)|>L^{-\beta(x)}(x)\,S(x);\quad (f(z)\in\pi_0)\,\mathrm{Re}\,w=x,$$

где $\beta(x)>0$ — некоторая функция, определенная для $-1\leqslant x<0$. Тогда в круге

$$|\eta|\leqslant\frac{q|x|}{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}\qquad (0<q<1) \tag{15}$$

функция $f(w+\eta)$ в нуль не обращается. Кроме того, в тождестве:

$$f(w+\eta)=f(w)\,e^{\eta L(x)}[1+\omega(\eta)]$$

для функции $\omega(\eta)$ *справедливо неравенство:*

$$|\omega(\eta)| < \frac{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{q|x|}; \qquad x \notin E. \tag{16a}$$

Доказательство. На основании оценки (14) из разложения (8) выводим:

$$\left|\frac{f(w+\eta)}{f(w)}e^{-\eta L(x)}\right| \geqslant 1-\sum_{j=1}^{\infty}|A_j||\eta|^j \geqslant$$

$$\geqslant 1 - C_1\sum_{j=1}^{\infty}L^{\beta(x)}(x)\frac{[L^{1-\delta}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)]^j}{|x|^j}|\eta|^j =$$

$$= 1 - C_1 L^{\beta(x)}(x)\sum_{j=1}^{\infty}L^{-\beta(x)j}(x)\frac{[L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)]^j}{|x|^j}|\eta|^j.$$

Ряд будет сходиться, если:

$$\frac{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{|x|}|\eta| \leqslant q \qquad (0<q<1).$$

Значит при

$$|\eta| \leqslant \frac{q|x|}{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}, \tag{15}$$

$$\left|\frac{f(w+\eta)}{f(w)}e^{-\eta L(x)}\right| > 1 - C_1 L^{\beta(x)}(x)\sum_{j=1}^{\infty}L^{-\beta(x)j}(x)q^j =$$

$$= 1 - C_1\frac{q}{1-qL^{-\beta(x)}(x)} > 0,$$

если только $0<q<1$ достаточно малое число, а $0>x>x_0$. В круге (15) функция $f(w+\eta)$ в нуль не обращается. Далее, на основании (14) при условии (15) имеем:

$$|\omega(\eta)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty}A_j(w)\eta^j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|A_j||\eta|^j <$$

$$< C_1 L^{\beta(x)}(x)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{[L^{1-\delta}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)]^j}{|x|^j}|\eta|^j =$$

$$= C_1\frac{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{|x|}|\eta|\cdot$$

$$\cdot\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left(L^{1-\delta}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)\right)^j}{|x|^j}|\eta|^j\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_1\frac{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{|x|}|\eta|\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}L^{-\beta(x)j}(x)q^j\right] =$$

$$= C_1\frac{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{|x|}|\eta|\left[1+\frac{qL^{-\beta(x)}(x)}{1+qL^{-\beta(x)}(x)}\right].$$

Если $q\ (0<q<1)$ достаточно малое число, в $x>x_0$, то

$$|\omega(\eta)| < \frac{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{q|x|}|\eta|.$$

Лемма доказана.

3. Рассмотрим функцию $\ln f(w)$, где $\eta=\tau+i\sigma$, а $w\ (-1\leqslant \mathrm{Re}\, w=x<0)$ — точка, в которой

$$|f(w)|\geqslant L^{-\beta(x)}(x)\,S(x).$$

В окрестности точки $\eta=0$ напишем ряд Тейлора:

$$\ln f(w+\eta)=\ln f(w)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\,\frac{d^j\ln f(w)}{dw^j}\,\eta^j,$$

или

$$\ln f(w+\eta)-\ln f(w)-\eta L(x)=$$

$$=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\,\frac{d^j\ln f(w)}{dw^j}\,\eta^j+\left[\frac{f'(w)}{f(w)}-L(x)\right]\eta. \tag{16}$$

Ряд (16) сходится в круге

$$|\eta|\leqslant\frac{q\,|x|}{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)},$$

так как при указанных η по лемме 2 функция в нуль не обращается. Как известно (см. [2]), справедлива следующая оценка коэффициентов ряда Тейлора: если действительная часть ряда

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \tag{17}$$

в круге $|z|<R<\infty$ удовлетворяет неравенству $\mathrm{Re}\, g(z)\leqslant U$, то для коэффициентов степенного разложения (17) верны соотношения:

$$|a_n|<\frac{2\,(U-\mathrm{Re}\, a_0)}{R^n};\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{18}$$

В нашем случае $a_0=0$ и для ряда (16) на основании (18) находим:

$$\left|\frac{1}{j!}\,\frac{d^j\ln f(w)}{dw^j}\right|<\frac{2\,\mathrm{Re}\,\{\ln f(w+\eta)-\ln f(w)-\eta L(x)\}}{|\eta|^j}; \tag{19}$$

$j=2,\ 3,\ \ldots$ Но по (5) и (7)

$$\mathrm{Re}\,\{\ln f(w+\eta)-\ln f(w)-\eta L(x)\}=\ln|f(w+\eta)|-\ln|f(w)|-\tau L(x)\leqslant$$

$$\leqslant\ln S(x+\tau)-\ln S(x)-\tau L(x)+\beta(x)\ln L(x)\leqslant$$

$$\leqslant|\tau|\,[L(x+\tau)-L(x)]+\beta(x)\ln L(x).$$

Следовательно, в согласии с теоремой В.

$$\mathrm{Re}\,\{\ln f(w+\eta)-\ln f(w)-\eta L(x)\}<$$

$$<L^{\delta}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)\,\tau+\beta(x)\ln L(x).$$

(19) дает теперь:

$$\left|\frac{d^j\ln f(w)}{dw^j}\right|\leqslant 2j!\left\{\frac{L^{\delta}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{|\eta|^{j-1}}\cdot\frac{|\tau|}{|\eta|}+\frac{\beta(x)\ln L(x)}{|\eta|^j}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2j!\left\{\frac{L^{\delta}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{|\eta|^{j-1}}+\beta(x)\,\frac{\ln L(x)}{|\eta|^j}\right\};$$

$$j=2,\ 3\ldots,\quad x>x_0,\quad x\notin E.$$

Здесь мы пользуемся тем, что $\mathrm{Re}\,\eta=\tau$ и поэтому $\left|\frac{\tau}{\eta}\right|\leqslant 1$. Итак, нами доказано следующее предложение.

Лемма 3. *Вне некоторого множества интервалов E конечной логарифмической меры на отрезке $-1 \leqslant x < 0$ (число интервалов на каждом отрезке $-1 \leqslant x < x_0$ конечно) справедливы неравенства:*

$$\left| \frac{d^j \ln f(w)}{dw^j} \right| < 2j! \left[\frac{L^{\delta}(x) \ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)} L(x)}{|\eta|^{j-1}} + \beta(x) \frac{\ln L(x)}{|\eta|^j} \right], \tag{20}$$

$=2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$ *где w — точка, в которой $|f(w)| \geqslant L^{-\beta(x)}(x)\, S(x)$, а*

$$|\eta| \leqslant \frac{q\,|x|}{L^{1-\delta+\beta(x)}(x) \ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)} L(x)}.$$

Множество E зависит от α, δ, γ.

4. Докажем следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть $f(z) \in \pi_0$ и $\{w\}$ $(-1 \leqslant \operatorname{Re} w = x < 0)$ — множество точек, на котором*

$$|f(w)| \geqslant L^{-\beta(x)}(x)\, S(x); \quad L(x) = \frac{S'(x)}{S(x)}.$$

Тогда:

а) *вне множества E, указанного в теореме В, при условии:*

$$\varlimsup_{x\to 0} \frac{\ln L(x)}{\ln \frac{1}{|x|}} = \lambda > 1, \quad \beta(x) < \frac{\lambda - 1}{2\lambda}; \tag{21}$$

б) *на некотором множестве точек $\{w\}$ бесконечной логарифмической меры на отрезке $[-1,\ 0]$) при условии:*

$$\varliminf_{x\to 0} \frac{\ln L(x)}{\ln \frac{1}{|x|}} = \rho > 1, \quad \beta(x) < \frac{\rho - 1}{2\rho} \tag{22}$$

справедливы предельные соотношения:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(m)}(w)}{f(w)} \cdot \frac{1}{L^m(x)} = 1; \qquad m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{23}$$

Доказательство. а) Из (21) видно, что при $0 > x > x_0$ и $1 < \lambda' < \lambda$

$$|x| \geqslant L^{-\frac{1}{\lambda'}}(x), \tag{24}$$

где λ' можно взять как угодно близким к λ; $x_0 = x_0(\lambda')$. При $m=1$ из (14) следует, что

$$|A_1| = \left| \frac{f'(w)}{f(w)} - L(x) \right| < C_1 \frac{\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)} L(x)}{|x|\, L^{\delta-1-\beta(x)}},$$

а в силу (24), что

$$\left| \frac{f'(w)}{f(w)} \cdot \frac{1}{L(x)} - 1 \right| < C_1 \frac{\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)} L(x)}{L^{\delta-\beta(x)-\frac{1}{\lambda'}}(x)}. \tag{25}$$

Для того, чтобы выражение в правой стороне неравенства (25) стремилось к нулю при $x \to 0$, достаточно, чтобы было

$$\delta - \beta(x) - \frac{1}{\lambda'} > 0 \tag{25a}$$

или

$$\beta(x) < \delta - \frac{1}{\lambda'}.$$

Обозначим $\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} = \varepsilon$, где ε можно взять произвольно близким к нулю.

В согласии с (12б) можно взять

$$\delta = \frac{\lambda + 1}{2\lambda} - \varepsilon.$$

Тогда

$$\delta-\frac{1}{\lambda'}=\frac{\lambda+1}{2\lambda}-\frac{1}{\lambda'}-\varepsilon=\frac{\lambda-1}{2\lambda}+\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)-\varepsilon=\frac{\lambda-1}{2\lambda}-2\varepsilon.$$

Если положить

$$\beta(x)\leqslant q'<\frac{\lambda-1}{2\lambda},$$

т. е.

$$\varepsilon\leqslant\frac{\lambda-1}{4\lambda}-\frac{q'}{2}, \qquad (\alpha)$$

то будет иметь место (25а), а по (25) и

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(w)}{f(w)}\cdot\frac{1}{L(x)}=1; \qquad x\notin E.$$

Далее выразим $f^{(j)}(w)$ через $\frac{d^j\ln f(w)}{dw^j}$. Из ряда

$$\ln f(w+\eta)=\ln f(w)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{d^j\ln f(w)}{dw^j}\eta^j \qquad (26)$$

имеем:

$$f(w+\eta)=f(w)\exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{d^j\ln f(w)}{dw^j}\eta^j\right\}=f(w)\sum_{m=0}^{\infty}A_m\eta^m, \qquad (27)$$

где коэффициенты A_m следующего вида:

$$A_m=\frac{1}{m!}\sum_{i_1\dots i_m}B_{i_1\dots i_m}\prod_{p=1}^{m}\left[\frac{d^p\ln f(w)}{dw^p}\right]^{i_p}+\frac{1}{m!}\left(\frac{f'(w)}{f(w)}\right)^m, \qquad (28)$$

причем суммирование производится по всем целым неотрицательным $i_1\dots i_m$, для которых $\Sigma pi_p=m$, $i_p<m$, а $B_{i_1\dots i_m}$ — постоянные числа. Сравнивая (27) с рядом

$$f(w+\eta)=f(w)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}f^{(j)}(w)\eta^j,$$

получаем:

$$\frac{f^{(m)}(w)}{f(w)}=\sum_{i_1\dots i_m}B_{i_1\dots i_m}\prod_{p=1}^{m}\left[\frac{d^p\ln f(w)}{dw^p}\right]^{i_p}+\left(\frac{f'(w)}{f(w)}\right)^m$$

или

$$\frac{f^{(m)}(w)}{f(w)}=\sum_{i_1\dots i_m}B_{i_1\dots i_m}\left(\frac{f'(w)}{f(w)}\right)^{i_1}\prod_{p=2}^{m}\left(\frac{d^p\ln f(w)}{dw^p}\right)^{i_p}+\left(\frac{f'(w)}{f(w)}\right)^m.$$

Разделив обе стороны последнего соотношения на $L^m(x)$, находим:

$$\frac{f^{(m)}(w)}{f(w)}\cdot\frac{1}{L^m(x)}=\sum_{i_1\dots i_m}B_{i_1\dots i_m}\left[\frac{f'(w)}{f(w)}\,\frac{1}{L(x)}\right]^{i_1}\prod_{p=2}^{m}\left[\frac{d^p\ln f(w)}{dw^p}\cdot\frac{1}{L^p(x)}\right]^{i_p}+$$

$$+\left[\frac{f'(w)}{f(w)}\cdot\frac{1}{L(x)}\right]^m. \qquad (29)$$

Покажем, что первый член правой части неравенства стремится к нулю при $x\to 0$, $x\notin E$. На основании леммы 3

$$\left|\frac{d^p\ln f(w)}{dw^p}\cdot\frac{1}{L^p(x)}\right|<2p!\left[\frac{L^\delta(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{|\eta|^{p-1}L^p(x)}+\beta(x)\frac{\ln L(x)}{|\eta|^pL^p(x)}\right]. \qquad (30)$$

Когда

$$|\eta| = \frac{q\,|x|}{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)} \quad \text{и} \quad |x| \geqslant L^{-\frac{1}{\lambda'}}(x),$$

(см. 24) получаем, что

$$\frac{\beta(x)\ln L(x)}{|\eta|^p L^p(x)} = \frac{\beta(x)\ln L(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)p}L(x)}{q^p|x|^p L^{[\delta-1-\beta(x)]p}(x)L^p(x)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta(x)}{q^p}\cdot\frac{\ln L(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)p}L(x)}{L^{\left(\delta-\beta(x)-\frac{1}{\lambda'}\right)p}(x)} \to 0, \tag{31}$$

так как при

$$\beta(x) \leqslant q' < \frac{\lambda+1}{2\lambda}, \quad \delta-\beta(x)-\frac{1}{\lambda'} > 0.$$

Далее при $p>1$

$$\frac{L^\delta(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{|\eta|^{p-1}L^p(x)} < C\,\frac{\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)p}L(x)}{L^{(p-2)\delta-(p-1)\left[\beta(x)+\frac{1}{\lambda'}\right]+1}(x)} \to 0, \tag{32}$$

если только

$$(p-2)\delta-(p-1)\left[\beta(x)+\frac{1}{\lambda'}\right]+1>0, \tag{33}$$

так как по (21) $\lim\limits_{x\to 0} L(x)=\infty$.

Обратимся теперь к неравенству (33). Оно справедливо при $p=2$, ибо при $\beta(x)\leqslant q'<\frac{\lambda-1}{2\lambda}$ в согласии с (α)

$$1-\left[\beta(x)+\frac{1}{\lambda'}\right] > 1-\left(\frac{\lambda-1}{2\lambda}+\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right) = 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\lambda}+\varepsilon\right) \geqslant$$

$$\geqslant 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4\lambda}-\frac{q'}{2}\right) > \frac{q'}{2} > 0,$$

так как $\lambda>1$.

При $p>2$ имеем:

$$\delta-\frac{p-1}{p-2}\left(\beta(x)+\frac{1}{\lambda'}\right)+\frac{1}{p-2} = \frac{\lambda+1}{2\lambda}-\varepsilon-\frac{p-1}{p-2}\left(\frac{\lambda-1}{2\lambda}+\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right)+$$

$$+\frac{1}{p-2} = -\frac{1}{p-2}\cdot\frac{\lambda+1}{2\lambda}-\varepsilon\left(1+\frac{p-1}{p-2}\right)+\frac{1}{p-2} =$$

$$= \frac{\lambda-1}{2\lambda}\cdot\frac{1}{p-2}-\varepsilon\,\frac{2p-3}{p-2} = \frac{\lambda-1-(2p-3)\cdot 2\lambda\varepsilon}{2\lambda(p-2)} > 0,$$

если выбрать

$$\varepsilon = \frac{1}{2p-3}\left(\frac{\lambda-1}{4\lambda}-\frac{q'}{2}\right).$$

Из (31), (32) и (29) теперь следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(m)}(w)}{f(w)}\cdot\frac{1}{L^m(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(w)}{f(w)}\cdot\frac{1}{L(x)} = 1, \qquad m\geqslant 2.$$

Итак, первая часть теоремы доказана.

Рассмотрим второй случай:

б) $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\,\dfrac{\ln L(x)}{\ln\frac{1}{|x|}} = \rho > 1, \qquad \rho\leqslant\infty.$

Существует последовательность $\{x_j\}\, x_j \uparrow 0$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln L(x_j)}{\ln \frac{1}{|x_j|}} = \rho.$$

Для $1<\rho'<\rho$ найдется такой номер j_0, что при $j>j_0$

$$\frac{\ln L(x_j)}{\ln \frac{1}{|x_j|}} \geqslant \rho'$$

или

$$|x_j| \geqslant L^{-\frac{1}{\rho'}}(x_j). \tag{34}$$

Если существует последовательность $\{\tilde{x}_j\}\tilde{x}_j \uparrow 0$, не принадлежащая исключенному в теореме В множеству E и удовлетворяющая неравенству (34), то при $j>j_0$ и j_0 достаточно большом справедлива оценка (20) и тогда, как мы видели при доказательстве случая а), на множестве $\{\tilde{x}_j\}$ справедливы предельные равенства (23).

Докажем существование таких последовательностей. Рассмотрим последовательность интервалов

$$\frac{x_j}{2+x_j} > x > x_j; \qquad j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где для $\{x_j\}x_j \uparrow 0$ верно (34). Покажем, что при $j>j_0$, где j_0 достаточно велико, каждая точка этого интервала удовлетворяет (34). Пусть

$$x_j^0 = \frac{x_j}{2+x_j} > \bar{x}_j > x_j.$$

Тогда в силу возрастания функции $L(x)$:

$$\frac{\ln L(x_j^0)}{\ln \frac{1}{|x_j^0|}} > \frac{\ln L(\bar{x}_j)\cdot \ln \frac{1}{|\bar{x}_j|}}{\ln \frac{1}{|\bar{x}_j|}\cdot \ln \frac{1}{|\bar{x}_j^0|}} > \frac{\ln L(x_j) \ln \frac{1}{|x_j|}}{\ln \frac{1}{|x_j|}\, \ln \frac{1}{|x_j^0|}}. \tag{35}$$

Далее

$$\frac{\ln \frac{1}{|x_j|}}{\ln \frac{1}{|x_j^0|}} = \frac{\ln \frac{1}{|x_j|}}{\ln \frac{|2+x_j|}{|x_j|}} = \frac{\ln \frac{1}{|x_j|}}{\ln \frac{1}{|x_j|} + \ln|2+x_j|} = \frac{1}{1+\dfrac{\ln|2+x_j|}{\ln \frac{1}{|x_j|}}} \to 1, \tag{36}$$

так как при $j\to\infty$, $2+x_j\to 2$, $\frac{1}{|x_j|}\to\infty$. Заметив, что

$$\frac{\ln \frac{1}{|\bar{x}_j|}}{\ln \frac{1}{|x_j^0|}} < 1,$$

из (35) и (36) получим:

$$\frac{\ln L(\bar{x}_j)}{\ln \frac{1}{|\bar{x}_j|}} > \frac{\ln L(x_j)}{\ln \frac{1}{|x_j|}} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{\ln 2}{\ln \frac{1}{|x_j|}}} > \rho',$$

если только $j>j_0$ и j_0 достаточно большой. Значит $\{\bar{x}_j\}\bar{x}_j \uparrow 0$ и есть требуемая последовательность.

Вычислим теперь логарифмическую меру интервалов

$$\left(x_j,\ \frac{x_j}{2+x_j}\right).$$

Так как

$$-\int\limits_{x_j}^{\frac{x_j}{2+x_j}} \frac{dt}{t} = \ln|x_j| - \ln\frac{|x_j|}{2+x_j} = \ln|2+x_j|,$$

то

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \int\limits_{x_j}^{\frac{x_j}{2+x_j}} \frac{dt}{t} = \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \ln(2+x_j) = \infty.$$

Таким образом, логарифмическая мера множества интервалов бесконечна, а исключенное множество E (см. теорему B) имеет конечную логарифмическую меру. Итак, существует множество точек интервала $[-1,\ 0)$ бесконечной логарифмической меры, на котором справедливо неравенство

$$|x| \geqslant L^{-\frac{1}{\rho'}}(x);\quad 1<\rho'<\rho$$

и соотношения (23). Теорема доказана.

5. В теореме 1 мы полагали

$$\varlimsup_{x\to 0} \frac{\ln L(x)}{\ln\frac{1}{|x|}} = \rho > 1.$$

Следующее предложение дополняет теорему 1.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)\in\pi_0$, *а* $\{w\}$ $(-1\leqslant x=\mathrm{Re}\,w<0)$ *— множество точек, в каждой из которых*

$$|f(w)| \geqslant B(x)\cdot S(x);\quad \varlimsup_{x\to 0} B(x) \leqslant q' \leqslant 1,\quad B(x)>0, \tag{37}$$

причем

$$\varlimsup_{x\to 0} \frac{\ln L(x)}{\ln\frac{1}{|x|}} = 1. \tag{38}$$

Тогда существует некоторая последовательность точек $\{w_j\}$, $x_j = \mathrm{Re}\,w_j \uparrow 0$, *на которой справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{x_j\to 0} \frac{f^{(m)}(w)}{f(w)} \cdot \frac{1}{L^m(x_j)} = 1;\qquad m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{39}$$

Доказательству этой теоремы мы предпошлем несколько нужных нам лемм, имеющих и некоторый самостоятельный интерес.

Лемма 4. *Найдется такая последовательность* $\{\eta_j\}\ \eta_j\uparrow 0$, *в точках которой выполнены соотношения*:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln L(\eta_j)}{\ln\frac{1}{|\eta_j|}} = 1 \tag{40}$$

и

$$\lim_{j\to\infty} |\eta_j|\cdot L(\eta_j) = \infty. \tag{41}$$

Доказательство. Из условия $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\,|x|\,L(x)=\infty$ вытекает существование последовательности точек $\{\eta_j\}\,\eta_j\uparrow 0$, на которой выполнено (41), т. е.

$$|\eta_j|\,L(\eta_j)>C_j>1;\quad C_j\underset{j\to\infty}{\to}\infty.$$

Отсюда

$$\ln L(\eta_j)>\ln\frac{1}{|\eta_j|}+\ln C_j$$

и

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\;\frac{\ln L(\eta_j)}{\ln\frac{1}{|\eta_j|}}\geqslant 1. \tag{42}$$

Но в силу (38)

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\;\frac{\ln L(\eta_j)}{\ln\frac{1}{|\eta_j|}}\leqslant 1. \tag{43}$$

Неравенства (42) и (43) доказывают (40). Лемма доказана.

Соотношение (40) дает:

$$\frac{\ln L(\eta_j)}{\ln\frac{1}{|\eta_j|}}=1+\varepsilon(\eta_j),\qquad \varepsilon(\eta_j)\underset{j\to\infty}{\to}0 \tag{44}$$

и

$$|\eta_j|\,L(\eta_j)=\left(\frac{1}{|\eta_j|}\right)^{\varepsilon(\eta_j)}. \tag{45}$$

Из (41) имеем:

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{|\eta_j|}\right)^{\varepsilon(\eta_j)}=\infty,$$

т. е. при $j>j_0$, $j_0=j_0(N)$,

$$\varepsilon(\eta_j)\ln\frac{1}{|\eta_j|}>N>0.$$

Отсюда вытекает, что при $j>j_0$

$$\varepsilon(\eta_j)>0. \tag{46}$$

Перепишем формулу (38) следующим образом:

$$\frac{\ln L(x)}{\ln\frac{1}{|x|}}=1+\varepsilon(x) \tag{47}$$

причем $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\,\varepsilon(x)=0$.

Лемма 5. *Существует последовательность* $\{\xi_j\}\,\xi_j\uparrow 0$, *для которой справедливы соотношения* (40) *и* (41) *и, кроме того, верно неравенство*

$$\varepsilon(\xi_j)\geqslant\varepsilon(x) \tag{48}$$

при $0>x\geqslant\xi_j$.

Доказательство. На последовательности $\{\eta_j\}$ имеем $\varepsilon(\eta_j)>0$. Найдем $\sup\limits_{x\geqslant\eta_j}\varepsilon(x)$.

$L(x)$ – неубывающая и непрерывная справа функция, поэтому верхняя грань при $x\geqslant\eta_j$ выражения:

$$\frac{\ln L(x)}{\ln\frac{1}{|x|}}=1+\varepsilon(x)$$

достигается и больше единицы. Действительно,

$$\frac{\ln L(\eta_j)}{\ln \frac{1}{|\eta_j|}} = 1 + \varepsilon(\eta_j) > 1 \qquad \left(\varepsilon(\eta_j) > 0\right).$$

Пусть $\sup\limits_{x \geqslant \eta_j} \varepsilon(x) = \varepsilon(\xi_j)$, $\xi_j \geqslant \eta_j$. В точке ξ_j имеем:

$$1 + \varepsilon(\xi_j) = \frac{\ln L(\xi_j)}{\ln \frac{1}{|\xi_j|}} \geqslant \frac{\ln L(\eta_j)}{\ln \frac{1}{|\eta_j|}} = 1 + \varepsilon(\eta_j), \tag{49}$$

т. е. $\varepsilon(\xi_j) \geqslant \varepsilon(\eta_j)$ и $\varepsilon(\xi_j) \geqslant \varepsilon(x)$, $x \geqslant \xi_j$. Построив для каждой точки η_j соответствующую точку ξ_j указанным выше образом, получаем последовательность точек, в которых в силу (49), (46) и (38)

$$\lim_{j\to\infty} \varepsilon(\xi_j) = 0$$

и

$$|\xi_j| L(\xi_j) = \left(\frac{1}{|\xi_j|}\right)^{\varepsilon(\xi_j)} \geqslant \left(\frac{1}{|\eta_j|}\right)^{\varepsilon(\eta_j)} \to \infty.$$

Лемма доказана.

Пусть $\{x_j^*\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиями леммы 5, а $x_j = x_j^* + \frac{\tau}{2}$. Тогда имеют место следующие утверждения.

Лемма 6. *Справедливо неравенство*

$$|L(x_j + \tau) - L(x_j)| < C \left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)} |\tau|$$

при $|\tau| \leqslant |x_j^*| \tau_0(x_j^*)$; $\tau_0(x_j^*) \underset{j\to\infty}{\to} 0$.

Доказательство. Положим $L(x) = \left(\frac{1}{|x|}\right)^{1+\varepsilon(x)}$. Так как

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln L(x_j^*)}{\ln \frac{1}{|x_j^*|}} = 1,$$

то

$$L(x_j^*) = \left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{1+\varepsilon(x_j^*)}; \quad \varepsilon(x_j^*) \underset{j\to\infty}{\to} 0.$$

Далее, как показано в лемме 5, $\varepsilon(x_j^*) \geqslant \varepsilon(x)$ при $x \geqslant x_j^*$, и, следовательно,

$$L(x_j^* + \tau) - L(x_j^*) = \left(\frac{1}{|x_j^* + \tau|}\right)^{1+\varepsilon(x_j^*+\tau)} - \left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{1+\varepsilon(x_j^*)} <$$

$$< \left(\frac{1}{|x_j^* + \tau|}\right)^{1+\varepsilon(x_j^*)} - \left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{1+\varepsilon(x_j^*)}. \tag{50}$$

Применяя к (50) теорему о конечных приращениях Лагранжа, придем к соотношениям:

$$\left(\frac{1}{|x_j^* + \tau|}\right)^{1+\varepsilon(x_j^*)} - \left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{1+\varepsilon(x_j^*)} < C_1 [1 + \varepsilon(x_j^*)] \left(\frac{1}{|x_j^* + \tau|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)} \tau <$$

$$< C_2 \left(\frac{|x_j^*|}{|x_j^* + \tau|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)} \cdot \left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)} \tau, \tag{51}$$

здесь $C_1\left(1 + \varepsilon(x_j^*)\right) < C_2 = \mathrm{const}$. Далее,

$$\frac{|x_j^*|}{|x_j^* + \tau|} = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{|x_j^*|}} \underset{j\to\infty}{\to} 1,$$

если $\frac{\tau}{|x_j^*|}=\tau_0(x_j^*)$ с $\tau_0(x_j^*)\to 0$ при $j\to\infty$. Из (50) и (51) теперь получаем:

$$L(x_j^*+\tau)-L(x_j^*)<C\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)}\tau, \tag{52}$$

где $C=\mathrm{const}$ и от j не зависит, а $|\tau|\leqslant|x_j^*|\tau_0(x_j^*)$. Сделаем в (52) замену: $x_j^*+\frac{\tau}{2}=x_j$, т. е. $x_j^*=x_j-\frac{\tau}{2}$. Тогда легко находим:

$$L\left(x_j+\frac{\tau}{2}\right)-L\left(x_j-\frac{\tau}{2}\right)<C\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)}\tau. \tag{53}$$

Перепишем еще (53) в виде:

$$L\left(x_j+\frac{\tau}{2}\right)-L(x_j)+L(x_j)-L\left(x_j-\frac{\tau}{2}\right)<C\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)}\tau. \tag{54}$$

Так как $L(x)$ — функция неубывающая, то

$$L\left(x_j+\frac{\tau}{2}\right)-L(x_j)>0,\quad L(x_j)-L\left(x_j-\frac{\tau}{2}\right)>0$$

и (54) покажет, что

$$|L(x_j+\tau)-L(x_j)|<C\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)}|\tau|$$

при $|\tau|\leqslant|x_j^*|\tau_0(x_j^*)$, $\tau_0(x_j^*)\to 0$, $j\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 7. *В круге*

$$|\eta|\leqslant q\,|x_j^*|^{1+\frac{\varepsilon(x_j^*)}{2}}$$

функция $f(w_j+\eta)$ $\left(\mathrm{Re}\,w_j=x_j,\ x_j=x_j^*+\frac{\tau}{2}\right)$ *в нуль не обращается, а для коэффициентов ряда*

$$\frac{f(w_j+\eta)}{f(w_j)}\,e^{-\eta L(x_j)}=1+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\eta^m \tag{55}$$

верны оценки:

$$|A_m|<\tilde{C}\,\frac{1}{|x_j^*|^{\left[1+\frac{1}{2}\varepsilon(x_j^*)\right]m}}\qquad m=1,\ 2,\ 3\ldots \tag{56}$$

Доказательство. Аналогично тому, как мы это сделали при доказательстве леммы 1, находим:

$$\left|\frac{f(w_j+\eta)}{f(w_j)}\,e^{-\eta L(x_j)}\right|<\frac{S(x_j+\tau)}{B(x_j)\,S(x_j)}\,e^{-\tau L(x_j)}<$$

$$<C_1e^{|\tau|\,|L(x_j+\tau)-L(x_j)|}\left(\frac{1}{B(x)}<C_1\right).$$

В силу леммы 6:

$$\left|\frac{f(w_j+\eta)}{f(w_j)}\,e^{-\eta L(x)}\right|<C_1e^{C|\tau|^2\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)}},$$

где

$$|\tau|\leqslant|x_j^*|\tau_0(x_j^*);\quad \tau_0(x_j^*)\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Оценив коэффициенты ряда (55) на основании теоремы Коши, получаем:

$$|A_m|<C_1\,\frac{e^{C|\tau|^2\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)}}}{|\tau|^m}.$$

Возьмем $|\tau|=|x_j^*|\tau_0(x_j^*)$. Тогда

$$|A_m|<C_1\ \frac{e^{C\cdot\tau_0^2(x_j^*)\cdot\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{\varepsilon(x_j^*)}}}{|x_j^*|^m\tau_0^m(x_j^*)}. \tag{57}$$

Функцию $\tau_0(x_j^*)$ выбираем настолько малой, чтобы было:

$$e^{C\tau_0^2(x_j^*)\cdot\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{\varepsilon(x_j^*)}}<C_2. \tag{58}$$

Для этого достаточно взять

$$\tau_0(x_j^*)=|x_j^*|^{\frac{1}{2}\varepsilon(x_j^*)}.$$

Тогда из (57) в соответствии с (58) имеем:

$$|A_m|<\tilde{C}\ \frac{1}{|x_j^*|^{\left[1+\frac{\varepsilon(x_j^*)}{2}\right]m}}\qquad(\tilde{C}=C_1e^{C_2}).$$

Отсюда и (55) при

$$|\eta|=q|x_j^*|^{1+\frac{\varepsilon(x_j^*)}{2}},\qquad q=\mathrm{const},$$

следует:

$$\left|\frac{f(w_j+\eta)}{f(w_j)}\ e^{-\eta L(x_j)}\right|>1-\tilde{C}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\eta|^m}{|x_j^*|^{\left[1+\frac{1}{2}\varepsilon(x_j^*)\right]m}}=$$

$$=1-\tilde{C}\sum_{m=1}^{\infty}q^m=1-\tilde{C}\ \frac{q}{1-q}>0,$$

если $q\ (0<q<1)$ достаточно мало. Значит, при

$$|\eta|\leqslant q|x_j^*|^{1+\frac{1}{2}\varepsilon(x_j^*)}$$

функция в нуль не обращается. Лемма доказана.

Лемма 8. *В круге*

$$|\eta|\leqslant q|x_j^*|^{1+\frac{1}{2}\varepsilon(x_j^*)};\qquad 0<q<1 \tag{59}$$

справедливы неравенства:

$$\left|\frac{d^m\ln f(w_j)}{dz^m}\right|<2m!\left[C\ \frac{\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)}}{|\eta|^{m-2}}-\frac{\ln B(x)}{|\eta|^m}\right]. \tag{60}$$

Доказательство. Как и раньше (см. доказательство леммы 3), оценим коэффициенты ряда (16) в круге (59). По прежнему:

$$\mathrm{Re}\{\ln f(w_j+\eta)-\ln f(w_j)-\eta L(x_j)\}\leqslant$$

$$\leqslant|\tau|[L(x_j+\tau)-L(x_j)]-\ln B(x)<C|\tau|^2\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)}-\ln B(x).$$

С помощью формулы (18) находим:

$$\left|\frac{d^m\ln f(w_j)}{dz^m}\right|<2m!\left[C\ \frac{\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)}|\tau|^2}{|\eta|^m}-\frac{\ln B(x)}{|\eta|^m}\right]. \tag{61}$$

Так как $\mathrm{Re}\,\eta=\tau$ и $\left|\frac{\tau}{\eta}\right|<1$, то из (61) следует (60). Лемма доказана.

7. Доказательство теоремы 2. При $m=1$ соотношение (39) получается из (56). Имеем:

$$|A_1| = \left| \frac{f'(w_j)}{f(w_j)} - L(x_j) \right| < \tilde{C} \frac{1}{|x_j^*|^{1+\frac{1}{2}\varepsilon(x_j^*)}}.$$

Разделив обе стороны на $L(x_j)$ и пользуясь тем, что

$$L(x_j) > L(x_j^*) = \left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{1+\varepsilon(x_j^*)},$$

находим:

$$\left| \frac{f'(w_j)}{f(w_j)} \cdot \frac{1}{L(x_j)} - 1 \right| < \tilde{C} \frac{1}{L(x_j)|x_j^*|^{1+\frac{1}{2}\varepsilon(x_j^*)}} <$$

$$< \tilde{C} \frac{|x_j^*|^{1+\varepsilon(x_j^*)}}{|x_j^*|^{1+\frac{1}{2}\varepsilon(x_j^*)}} \underset{j\to\infty}{\to} 0 \qquad \left(\varepsilon(x_j^*) > 0\right).$$

Далее (29) дает нам:

$$\frac{f^{(m)}(w_j)}{f(w_j)} \cdot \frac{1}{L^m(x_j)} = \sum_{i_1 \ldots i_m} B_{i_1 \ldots i_m} \left(\frac{f'(w_j)}{f(w_j)} \cdot \frac{1}{L(x_j)}\right)^{i_1} \times$$

$$\times \prod_{p=2}^{m} \left(\frac{d^p \ln f(w_j)}{dz^p} \cdot \frac{1}{L^p(x_j)}\right)^{i_p} + \left(\frac{f'(w_j)}{f(w_j)} \cdot \frac{1}{L(x_j)}\right)^m. \tag{62}$$

Оценим теперь (62) с помощью (60). Так как

$$[1+\varepsilon(x_j^*)]p - \left[1 + \frac{\varepsilon(x_j^*)}{2}\right](p-2) - [2+\varepsilon(x_j^*)] = \frac{p}{2}\varepsilon(x_j^*) > 0$$

в силу $\varepsilon(x_j^*) > 0$, то

$$\frac{\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)}}{|\eta|^{p-2}L^p(x_j)} < \frac{\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{2+\varepsilon(x_j^*)}}{q^{p-2}|x_j^*|^{\left[1+\frac{1}{2}\varepsilon(x_j^*)\right](p-2)} \cdot \left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{[1+\varepsilon x_j^*)]p}} \underset{j\to\infty}{\to} 0. \tag{63}$$

Далее,

$$\frac{1}{|\eta|^p L^p(x_j)} < \frac{1}{q^p|x_j^*|^{\left[1+\frac{1}{2}\varepsilon(x_j^*)\right]p}\left(\frac{1}{|x_j^*|}\right)^{1+\varepsilon(x_j^*)}} = |x_j^*|^{\frac{\varepsilon(x_j^*)}{2}} \underset{j\to\infty}{\to} 0. \tag{64}$$

Из (62), (60), (63) и (64) следует, что

$$\lim_{x_j\to\infty} \frac{f^{(m)}(w_j)}{f(w_j)} \cdot \frac{1}{L^m(x_j)} = \lim_{x_j\to\infty} \frac{f'(w_j)}{f(w_j)} \frac{1}{L(x_j)} = 1; \qquad m=2,\ 3,\ \ldots$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $f(z) \in \pi_0$. На множествах, на которых имеют место теорема 1 или 2 справедливы следующие асимптотические равенства*

$$S(x, f^{(m)}) = [1+o(1)]\, S(x) L^m(x); \qquad m=1,\ 2,\ 3\ldots$$

Доказательство. Пусть $\{w\}$ множество точек, на котором

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(m)}(w)}{f(w)} \cdot \frac{1}{L^m(x)} = 1; \qquad m=1,\ 2,\ 3\ldots \tag{65}$$

Мы показали в теоремах 1 и 2, что соотношения (61) имеют место на множестве точек, где

$$|f(w)|=[1+o(1)]\,S(x,f.$$

Тогда

$$S(x,f^{(m)})\geqslant[1+o(1)]\,S(x,f)L^m(x,f). \tag{66}$$

Для обратного неравенства будем рассматривать точки, где

$$|f^{(m)}(w)|\geqslant L^{-\beta(x)}(x,f)\;\;S(x,f^{(m)}) \tag{67}$$

с

$$\lim_{x\to 0}\beta(x)\ln L(x)=0. \tag{68}$$

Такие точки существуют, так как

$$S(x,f^{(m)})=\sup_{-\infty<y<+\infty}|f^{(m)}(x+iy)|.$$

Из (66) и (67) имеем:

$$|f^{(m)}(w)|\geqslant L^{m-\beta(x)}(x,f)\,S(x,f). \tag{69}$$

Представим $f^{(m)}(w)$ интегралом:

$$f^{(m)}(w)=\frac{m!}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(w+\eta)}{\eta^{m+1}}\,d\eta;\quad C:|\eta|=\rho.$$

Отсюда

$$|f^{(m)}(w)|\leqslant\frac{m!\max\limits_{|\eta|=\rho}|f(w+\eta)|}{\rho^m}, \tag{70}$$

где радиус окружности такой, что круг C принадлежит полосе $-1\leqslant x<0$. При $\rho=\frac{1}{L(x)}$ из (69) и (70) получаем:

$$\max_{|\eta|=\rho}|f(w+\eta)|\geqslant\frac{1}{m!}\,L^{-\beta(x)}(x,f)\;\;S(x,f).$$

Обозначив через w^* точку, в которой достигается $\max f(w+\eta)$ на окружности $|\eta|=\rho$; $\max\limits_{|\eta|=\rho}|f(w+\eta)|=|f(w^*)|$. Имеем:

$$|f(w^*)|\geqslant CL^{-\beta(x)}(x,f)\,S(x,f), \tag{71}$$

где $\mathrm{Re}\,w^*=x+\tau$, $\tau=\mathrm{Re}\,\eta$. Применив теорему А к функциям:

$$u(x)=\ln^{1+\alpha}L(x)\quad\text{и}\quad\varphi(t)=\frac{1}{t\ln^{1+\alpha}t};\qquad\alpha>0,$$

находим:

$$\ln^{1+\alpha}L(x+\tau)-\ln^{1+\alpha}L(x)<1;\qquad x\notin E \tag{72}$$

при

$$\tau\leqslant\frac{|x|}{\ln^{1+\alpha}L(x)\ln^{(1+\alpha)}\ln^{(1+\alpha)}L(x)}.$$

Так как при $|x|$ достаточно малом в условиях теоремы 1 или 2

$$|x|\geqslant L^{-\frac{1}{1+\varepsilon(x)}}(x),$$

где $\varepsilon(x)>0$ и поэтому

$$\frac{|x|}{\ln^{1+\alpha}L(x)\ln^{1+\alpha}\ln^{1+\alpha}L(x)}>\frac{1}{L(x)},$$

то неравенство (72) будет удовлетворено, если взять

$$\tau\leqslant\frac{1}{L(x)}.$$

Из теоремы о конечных приращениях имеем:

$$1>\ln^{1+\alpha}L(x+\tau)-\ln^{1+\alpha}L(x)=(1+\alpha)\frac{\ln^{\alpha}L(c)}{L(c)}[L(x+\tau)-L(x)]>$$

$$>(1+\alpha)\frac{\ln^{\alpha}L(x)}{L(x+\tau)}[L(x+\tau)-L(x)], \tag{73}$$

так как $x<c<x+\tau$, а $L(x)$ — возрастающая функция. Далее из (73) следует, что

$$L(x+\tau)-L(x)<\frac{L(x+\tau)}{(1+\alpha)\ln^{\alpha}L(x)}$$

или

$$L(x)>L(x+\tau)\left[1-\frac{1}{(1+\alpha)\ln^{\alpha}L(x)}\right]>\frac{1}{2}L(x+\tau)$$

при $|x|$ достаточно малом. Итак,

$$L(x)>\frac{1}{2}L(x+\tau);\qquad x\notin E,\ 0>x>x_0 \tag{74}$$

при

$$\tau\leqslant\frac{1}{L(x)}.$$

Кроме того (см. (5)),

$$\ln S(x+\tau)-\ln S(x)\leqslant\tau L(x+\tau). \tag{75}$$

Пользуясь (74) при $\tau=\frac{1}{L(x)}$ из (75) выводим:

$$\frac{S(x+\tau)}{S(x)}<e^2.$$

Теперь (71) дает нам:

$$|f(w^*|>C_1L^{-\beta(x)}(x+\tau,f)S(x+\tau,f);\quad C_1=C\frac{1}{2e^2}. \tag{76}$$

Оценим $f(w^*-\eta)$. Так как выполнено (76), то можно применять лемму 3, т. е. для $\omega(\eta)$ в тождестве

$$f(w^*-\eta)=f(w)e^{-\eta L(x+\tau)}\Big(1+\omega(\eta)\Big)$$

справедливо неравенство:

$$|\omega(\eta)|<\frac{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{q|x|}|\eta|$$

при

$$|\eta|\leqslant\frac{q|x|}{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}.$$

Возьмем

$$|\eta|=\frac{1}{L(x)}<\frac{q|x|}{L^{1-\delta+\beta(x)}(x)\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}$$

при $0>x>x_0$ в условиях теоремы 1. Тогда в силу того, что $|x|\geqslant L^{-\frac{1}{1+\varepsilon(x)}}(x)$; $\varepsilon(x)>0$,

$$|\omega(\eta)|<\frac{\ln^{(1+\alpha)(1-\gamma)}L(x)}{|x|L^{\delta-\beta(x)}}\underset{(x)x\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Значит

$$|f(w^*-\eta)|\geqslant|f(w^*)|e^{\tau L(x+\tau)}\Big(1-\omega(\eta)\Big),$$

или при $\tau=\frac{1}{L(x)}$ и $0>x>x_0$

$$|f(w^*-\eta)|\geqslant|f(w^*)|\,e^{\frac{L(x+\tau)}{L(x)}}\cdot\frac{1}{2}.$$

В соответствии с (71) и (74)

$$|f(w^*-\eta)|\geqslant C^*L^{-\beta(x)}(x,\ f)\,S(x,\ f);\ \operatorname{Re}(w^*-\eta)=x.$$

Выбрав η так, чтобы $w^*-\eta=w$, имеем:

$$|f(w)|\geqslant C^*L^{-\beta(x)}(x,\ f)\,S(x,\ f);\ \operatorname{Re}w=x, \tag{77}$$

где $C^*>0$ — некоторое постоянное, которое от x не зависит. Но при условии (77) верно соотношение (65) и поэтому

$$f^{(m)}(w)=[1+o(1)]f(w)\cdot L^m(x,\ f);\ x\notin E,$$

а в согласии с (67) и (68):

$$S(x,\ f^{(m)})\leqslant[1+o(1)]\,L^m(x,\ f)\ \ S(x,\ f).$$

Последнее неравенство вместе с соотношением (66) доказывает теорему.

6. Покажем, что из наших результатов следуют известные (см. [4]) результаты, для функции $g(z)$ аналитической в круге

$$|z|\leqslant r\ (0<r<1).$$

Заменой $z=e^{\xi}$, $\xi=s+it$ сводим $g(z)$ к функции $f(\xi)=g(e^{\xi})$, определенной в полуплоскости $Re\xi<0$. Положим:

$$M(r)=M(r,\ g)=\max_{|z|\leqslant r}|g(z)|<\infty$$

и

$$K(r)=K(r,\ g)=\frac{rM'(r)}{M(r)}$$

$\big(M'(r)$ — производная справа от $M(r)\big)$.

Так как $z=e^{\xi}$, то $r=e^s$ и

$$S(s,\ f)=M(e^s,\ g).$$

Отсюда

$$S'(s,\ f)=e^sM'(e^s,\ g)$$

и

$$K(r,\ g)=\frac{rM'(r,\ g)}{M(r,\ g)}=\frac{e^sM'(e^s,\ g)}{M(e^s,\ g)}=\frac{S'(s,\ f)}{S(s,\ f)}=L(s,\ f). \tag{78}$$

Если $\lim\limits_{r\to1}K(r,\ g)=\infty$, то в согласии с (78)

$$\lim_{s\to0}L(s,\ f)=\infty.$$

Функция $f(\xi)\in\pi_0$.

На функции $g(z)$ накладываем условия:

$$\varliminf_{r\to1}\frac{\ln K(r,\ g)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\lambda>1 \tag{79}$$

или

$$\varlimsup_{r\to1}\frac{\ln K(r,\ g)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\rho>1.$$

Для функции $f(\xi)$ соответствующие условия будут (21) и (22). Покажем только одну из них. Пусть выполнено (79), тогда

$$\frac{\ln K(r, g)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \frac{\ln L(s, f)}{\ln \frac{1}{1-e^s}}.$$

Так как

$$1-e^s = -s - \frac{s^2}{2!} - \ldots = |s|\,[1+o(1)],$$

то

$$\frac{\ln K(r, g)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \frac{\ln L(s, f)}{\ln \frac{1}{|s|}} \Big(1+o(1)\Big),$$

т. е.

$$\lim_{s\to 0} \frac{\ln L(s, f)}{\ln \frac{1}{|s|}} = \lambda > 1.$$

Значит к функции $f(\xi)$ можно применить теоремы 1 или 2, т. е.

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ s\notin E}} \frac{f^{(m)}(\xi)}{f(\xi)} \cdot \frac{1}{L^m(s, f)} = 1; \qquad m=1,\ 2,\ 3\ldots$$

Так как

$$f'(\xi) = zg'(z),$$

то

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ s\notin E}} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \cdot \frac{1}{L(s, f)} = \lim_{\substack{r\to 1\\ r\notin E'}} \frac{zg'(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{K(r, g)} = 1.$$

Пусть

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r\notin E'}} \frac{z^m g^{(m)}(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{K^m(r, g)} = 1; \qquad m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,$$

покажем, что соотношение верно и для $m=n$. Легко видеть, что имеет место равенство:

$$f^{(n)}(\xi) = z^n g^{(n)}(z) + \sum_{i=1}^{n-1} B_i z^i g^{(i)}(z); \qquad B_i = \text{const}.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ s\notin E}} \frac{f^{(n)}(\xi)}{f(\xi)} \cdot \frac{1}{L^n(s, f)} = \lim_{\substack{r\to 1\\ r\notin E'}} \frac{z^n g^{(n)}(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{K^n(r, g)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} B_i \lim_{\substack{r\to 1\\ r\notin E'}} \frac{z^i g^{(i)}(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{K^n(r, g)} = 1,$$

так как

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r\notin E'}} \frac{z^i g^{(i)}(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{K^n(r, g)} = 0, \text{ при } i>n.$$

Множество исключенных интервалов E на полусегменте $-1 \leqslant \operatorname{Re}\xi = s < 0$, о котором говорится в первой части теоремы 1, есть конечной логарифмической меры:

$$-\int_E \frac{dt}{t} > \infty.$$

Множество E переходит в E' для r. Так как $s=\ln r$, то

$$-\int_{E'} \frac{d\ln r}{\ln r} < \infty.$$

Из того, что

$$\ln r = -(1-r) - \frac{(1-r)^2}{2} - \cdots < -(1-r),$$

следует

$$\infty > -\int_{E'} \frac{d\ln r}{\ln r} > \int_{E'} \frac{dr}{r(1-r)}.$$

В других случаях множества, на которых верны предельные соотношения для функции $g(z)$, остаются такого же самого типа, как и для $f(\xi)$.

7. Пусть $F(z)=e^{\lambda z}f(z)$, где $f(z)\in\pi_0$. Покажем, что на множестве точек $\{z\}$, на котором имеет место либо теорема 1 либо 2, т. е.

$$\lim_{x\to 0} \frac{F^{(m)}(z)}{F(z)} \cdot \frac{1}{L^m(x,F)} = 1; \qquad \operatorname{Re} z = x, \qquad m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{80}$$

Так как

$$S(x,\ F) = \sup_{-\infty<y<+\infty} e^{\lambda x}|f\ (x+iy)| = e^{\lambda x} S(x,\ f),$$

то

$$L(x,\ F) = \frac{S'(x,\ F)}{S(x,\ F)} = \lambda + \frac{S'(x,f)}{S(x,\ f)} = \lambda + L(x,\ f)$$

и

$$\frac{F'(z)}{F(z)}\ \frac{1}{L(x,\ F)} = \frac{\lambda}{\lambda + L(x,\ f)} + \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot \frac{1}{\lambda + L(x, f)} =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + L(x, f)} + \frac{f'(z)}{f(z)\cdot L(x,\ f)} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{\lambda}{L(x,f)}}.$$

Следовательно, по теоремам 1 или 2 в зависимости от свойств рассматриваемой функции на изучаемом множестве

$$\lim_{x\to 0} \frac{F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{1}{L(x,\ F)} = 1.$$

Пусть (80) верно для $m=1, 2, 3,\ldots, n-1$. Покажем, что оно справедливо и для $m=n$. Нетрудно проверить, что

$$F^{(m)}(z) = e^{\lambda z}\left[f^m(z) + \sum_{i=0}^{m-1} B_i \lambda^{m-i} f^{(i)}(z)\right]; \qquad B_i = \text{const},$$

тогда

$$\frac{F^{(m)}(z)}{F(z)} \cdot \frac{1}{L^m(x,\ F)} = \frac{f^{(m)}(z)}{f\ (z)} \cdot \frac{1}{L^m(x, f)} \cdot \frac{1}{\left[\dfrac{\lambda}{L(x,\ f)}+1\right]^m} +$$

$$+ \frac{1}{\left[\dfrac{\lambda}{L(x,\ f)}+1\right]^m} \sum_{i=1}^{m-1} B_i \lambda^{m-i} \frac{f^{(i)}(z)}{f(z)} \cdot \frac{1}{L^m(x, f)}.$$

Отсюда немедленно заключаем, что (80) выполнено и для $m=n$, так как

$$\lim_{x\to 0} L(x,\ f) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f^{(i)}(z)}{f(z)} \cdot \frac{1}{L^m(x,f)} = 0$$

при $i<m$.

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
29.XI.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Валирон, Аналитические функции, М., 1957.
3. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М.–Л., 1950.
3. Ш. Стрелиц, Асимптотические свойства функции, аналитической в полуплоскости.
4. А. Нагяле, Поведение голоморфной в круге функции при больших значениях ее модуля, Лит. мат. сб., **VI,** 3 (1966), 397–421.

ANALIZINIŲ FUNKCIJŲ PUSPLOKŠTUMĖJE ASIMPTOTINĖS SAVYBĖS

E. DAGIENĖ

(*Reziumė*)

Sakysime, kad analizinė funkcija $f(z)$ juostoje $-1 \leqslant \operatorname{Re} z < 0$ $(z = x + iy)$ priklauso π_0 klasei, kai

$$\sup_{-\infty < y < +\infty} |f(z+iy)| = S(x) < \infty, \qquad -1 \leqslant x < 0.$$

Darbe nagrinėjamos π_0 klasės funkcijų kai kurios asimptotinės savybės. Iš gautų duomenų išplaukia žinomi Ž. Valirono rezultatai [1]; jais taip pat patikrinami A. Nagelės rezultatai [4].

Straipsnyje įrodomi šie dėsniai.

1 teorema. *Sakysime,* $f(z) \in \pi_0$. *Tarkime, kad aibės* $\{w\}$ $(-1 \leqslant x = \operatorname{Re} w < 0)$ *taškuose*

$$|f(w)| \geqslant L^{-\beta(x)}(x)\, S(x) \left(L(x) = \frac{S'(x)}{S(x)},\ \beta(x) > 0\right).$$

Tuomet galioja ribinės priklausomybės

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in F}} \frac{f^{(m)}(w)}{f(w)} \cdot \frac{1}{L^m(x)} = 1; \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

a) *aibėje F, sutampančioje su visa atkarpa* $-1 \leqslant x < 0$, *išskyrus baigtinio logaritminio mato intervalų aibę E, t. y.*

$$\int_E \frac{dt}{t} > \infty,$$

kai

$$\varliminf_{x \to 0} \frac{\ln L(x)}{\ln \frac{1}{|x|}} = \lambda > 1, \qquad \beta(x) < \frac{\lambda - 1}{2\lambda};$$

b) *atitinkamoje intervalo* $[-1, 0)$ *begalinio logaritminio mato aibėje F, kai*

$$\varlimsup_{x \to 0} \frac{\ln L(x)}{\ln \frac{1}{|x|}} = \rho > 1, \qquad \beta(x) < \frac{\rho - 1}{2\rho}.$$

2 teorema. *Sakysime,* $f(z) \in \pi_0$ *ir aibės* $\{w\}$ $(-1 \leqslant \operatorname{Re} w = x < 0)$ *taškuose*

$$|f(w)| \geqslant B(x)\, S(x) \quad (B(x) > 0,\ \lim_{x \to 0} B(x) \leqslant q < 1).$$

Tuomet, jeigu

$$\varlimsup_{x \to 0} \frac{\ln L(x)}{\ln \frac{1}{|x|}} = 1,$$

tai intervale $[-1, 0)$ *yra seka* $\{w_j\}$, $x_j = \operatorname{Re} w_j \uparrow 0$, *kurioje teisinga ribinė priklausomybė*

$$\lim_{x_j \to 0} \frac{f^{(m)}(w_j)}{f(w_j)} \cdot \frac{1}{L^m(x_j)} = 1; \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

3 Teorema. *Sakysime,* $f(z)\in\pi_0$. *Lygybė*

$$S(x, f^{(m)}) = \Big(1+0\,(1)\Big)\, L^m(x, f)\, S(x, f); \qquad m=1, 2, 3, \ldots$$

teisingu 1 *arba* 2 *teoremos nurodytose aibėse.*

ON THE ASYMPTOTIC PROPERTES OF ANALYTIC ON THE HALFPLANE FUNCTIONS

E. DAGIENĖ

(Summary)

The analytic on the strip $-1\leqslant \mathrm{Re}\, z<0$ function is said to belong to the class π_0, if

$$\sup_{-\infty<y<+\infty} |f(x+iy)| = S(x)<\infty, \quad -1\leqslant x<0.$$

Some properties of functions from the class π_0 are investigated. Our theorems contain well-known G. Valiron's [1] results, the A. Nagele's [4] theorems are verified as well.

The following theorems are proved.

Theorem 1. *Let* $f(z)\in\pi_0$. *Suppose, that*

$$|f(w)|\geqslant L^{-\beta(x)}(x)\, S(x) \quad \left(L(x)=\frac{S'(x)}{S(x)}, \ \beta(x)>0\right)$$

for all w *from the set* $\{w\}$ $(-1\leqslant \mathrm{Re}\, w=x<0)$.

Then the relations

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in F}} \frac{f^{(m)}(w)}{f(w)}\cdot\frac{1}{L^m(w)}=1; \qquad m=1, 2, 3, \ldots$$

hold on the set F.

Where

a) F *coincides with the interval* $[-1, 0)$ *except the set* E *of the intervals of finite logarithmic measure, when*

$$\underline{\lim}_{x\to 0} \frac{\ln L(x)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\lambda>1, \quad \beta(x)<\frac{\lambda-1}{2\lambda}\,.$$

b) F *is the set of infinite logarithmic measure from the interval* $[-1, 0)$, *when*

$$\overline{\lim}_{x\to 0} \frac{\ln L(x)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\rho>1, \quad \beta(x)<\frac{\rho-1}{2\rho}\,.$$

Theorem 2. *Let* $f(z)\in\pi_0$ *and for the points of the set* $\{w\}$ $(-1\leqslant \mathrm{Re}\, w=x<0)$

$$|f(w)|\geqslant B(x)\, S(x) \quad \left(B(x)>0, \overline{\lim_{x\to 0}}\, B(x)\leqslant q<1\right).$$

If

$$\overline{\lim}_{x\to 0} \frac{\ln L(x)}{\ln\frac{1}{|x|}}=1,$$

then there exists the sequence $\{w_j\}$ $x_j=\mathrm{Re}\, w_j\uparrow 0$ *in the interval* $[-1, 0)$ *such that the following relations hold*

$$\lim_{x_j\to 0} \frac{f^{(m)}(w_j)}{f(w_j)}\cdot\frac{1}{L^m(w_j)}=1; \qquad m=1, 2, 3, \ldots$$

Theorem 3. *If* $f(z)\in\pi_0$. *The equalities*

$$S(x, f^{(m)}) = \Big(1+0\,(1)\Big)\, S(x, f)\, L^m(x, f); \qquad m=1, 2, 3, \ldots$$

are valid on the sets defined in theorems 1 *or* 2.