VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1968

УДК – 517.522.2

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О РЯДАХ ДИРИХЛЕ

В. М. ТУРПАНОВА

В статье рассматриваются ряды Дирихле с комплексными показателями

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

для которых предполагается, что последовательность $\{|\lambda_n|\}$ измерима, т. е. существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = \tau. \tag{2}$$

Пусть ϑ – наибольший из углов, в котором существует $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_{n_k}|}$, а $\{\lambda_{n_k}\}$ – та подпоследовательность последовательности $\{\lambda_n\}$ которая принадлежит углу ϑ.

Для характеристической функции $L(z)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$ Г. Л. Лунцем [2] получены оценки:

$$\pi(C\sin\psi - S\cos\psi) - \pi\tau\sin\frac{\vartheta}{2} - \varepsilon < \frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r} < \pi(C\cdot\sin\psi -$$

$$-S\cdot\cos\psi) + \pi r\sin\frac{\vartheta}{2} + \varepsilon$$

для $\alpha<\psi<\pi-\alpha$,

$$\pi[C|\sin\psi| + S\cos\psi] - \pi\tau\sin\frac{\vartheta}{2} - \varepsilon < \frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r} < \pi(C|\sin\psi| +$$

$$+S\cos\psi) + \pi\tau\sin\frac{\vartheta}{2} + \varepsilon$$

для $-\pi+\alpha<\psi<-\alpha$. Здесь S и C – некоторые постоянные величины. Эти оценки имеют место при любом $\varepsilon>0$, если r достаточно велико.

Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и множество предельных точек последовательности $\{\arg\lambda_n\}$ принадлежит отрезку $[-\alpha, \alpha]$. Всякий угол $|\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, в котором функция $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n l^{-\lambda_n z}$ голоморфна и который не находится строго внутри другого угла $|\arg(z-\bar{z}_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, в котором функция $f(z)$ также голоморфна, будем называть углом голоморфности ряда (1).

Приведем теорему (см. [2]), которая будет использована в дальнейшем.

Если $k<1-\frac{\rho}{C}$, функция $f(z)$ голоморфна в угле $|\arg(z-z^*)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, где

$$z^*=\pi\left\{C(k-1)\operatorname{tg}\alpha+\rho\left[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]+i\cdot S(k-1)\cdot\operatorname{ctg}\alpha\right\},$$

$\rho=\pi\tau\cdot\sin\frac{\vartheta}{2}$, на примыкающих к вершине отрезках сторон этого угла длины

$$l_1=\pi\left[(1-k)\left(\frac{C}{\cos\alpha}+\frac{S}{\sin\alpha}\right)-\frac{\rho}{\cos\alpha}\right]$$

и

$$l_2=\max\left\{\pi(1-k)\left[\left(\frac{C}{\cos\alpha}-\frac{S}{\sin\alpha}\right)-\frac{\rho}{\cos\alpha}\right],\ 0\right\}$$

соответственно и в области Y, определенной ниже, то существует функция $\varphi(z)$, экспоненциального типа в угле $|\arg z|<\beta$, для которой $\varphi(\lambda_n)=a_nL'(\lambda_n)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ и индикатриса $h(\psi)$ которой удовлетворяет в угле $\alpha<\psi<\beta$ неравенству

$$h(\psi)\leqslant\pi\left[k(C\cdot\sin\psi-S\cos\psi)+\rho(1+\sqrt{2})\right],$$

а в угле $-\beta<\psi<-\alpha$ — неравенству

$$h(\psi)\leqslant\pi\left[k(C|\sin\psi|+S\cdot\cos\psi+3\rho\right]$$

Y — область, ограниченная отрезками длины l_1 и l_2, о которых идет речь в теореме, проведенными через концы этих отрезков прямыми, наклоненными к действительной оси под углами $\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\beta-\frac{\pi}{2}$ и прямой $\operatorname{Im} z=\operatorname{Im} z^*$.

Пусть

$$z^*=\pi\left\{C(k-1)\operatorname{tg}\alpha+\rho\left[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]+i\cdot S(k-1)\cdot\operatorname{ctg}\alpha,\right.$$

где $k<1-\frac{\rho}{C}$ — вершина угла H, в котором функция $f(z)$ голоморфна. Предположим, что функция $f(z)$ голоморфна также и на сторонах угла H (угол H можно получить с помощью любого сколь угодно малого сдвига угла голоморфности функции $f(z)$). Тогда (см. [2], теорема 2) существует такое $\beta>\alpha$ и такая функция $\varphi(z)$ экспоненциального типа в угле $|\arg z|<\beta$, для которой $\varphi(\lambda_n)=a_nL'(\lambda_n)(n=1,\ 2,\ \ldots)$, причем при $\alpha<\psi<\beta$

$$h(\psi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\varphi(re^{i\psi})|}{r}\leqslant k\pi(C\cdot\sin\psi-S\cdot\cos\psi)+\pi\rho(1+\sqrt{2})<$$
$$<\pi(C'\cdot\sin\psi-S'\cos\psi)+\pi\rho(1+\sqrt{2}),$$

где

$$C'=C\left(1-\frac{\rho}{C}\right),\quad S'=S\left(1-\frac{\rho}{C}\right).$$

Если же $-\beta<\psi<-\alpha$, то

$$h(\psi)\leqslant\pi\left[k(C|\sin\psi|+S\cdot\cos\psi)+3\rho\right]<\pi(C'|\sin\psi|+S'\cos\psi)+3\pi\rho.$$

В силу непрерывности индикатрисы можно утверждать, что

$$h(\alpha)\leqslant\pi\left[C'\sin\alpha-S'\cos\alpha+\rho(1+\sqrt{2})\right],$$
$$h(-\alpha)\leqslant\pi\left[C'|\sin\alpha|+S'\cos\alpha+3\rho\right].$$

Если функция $H(\Theta)=A\cos\Theta+B\sin\Theta$ в точках Θ_1 и Θ_2 принимает значения h_1 и h_2, то она определяется равенством

$$H(\Theta)=\frac{h_1\sin(\Theta_2-\Theta)+h_2\sin(\Theta-\Theta_1)}{\sin(\Theta_2-\Theta_1)}.$$

Оценим индикатрису функции $\varphi(z)$ для угла $|\varphi|\leqslant\alpha$. При $\psi=-\alpha$

$$h_1=h(-\alpha)\leqslant\pi(C'\cdot\sin\alpha+S'\cos\alpha)+3\pi\rho,$$

при $\psi=\alpha$

$$h_2=h(\alpha)\leqslant\pi(C'\cdot\sin\alpha-S'\cos\alpha)+\pi\rho(1+\sqrt{2}).$$

Тогда для $-\alpha\leqslant\psi\leqslant\alpha$

$$h(\psi)\leqslant\pi\left[\rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)-S'\cos\alpha\right]\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sin\psi+$$
$$+\left\{\pi\left[C'\sin\alpha+\rho\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\right\}\sec\alpha\cdot\cos\psi.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}e^{-\lambda_n z},$$

то ряд (1) будет сходится в области Y, которая служит пересечением полуплоскостей:

$$x\cdot\cos\psi-y\cdot\sin\psi-K(\psi)>0,\quad -\alpha\leqslant\psi\leqslant\alpha,$$

где

$$k(\psi)=\lim_{\eta\to0}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln|a_{n_k}|}{|\lambda_{n_k}|},$$

а $\{\lambda_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{\lambda_n\}$, для которой $\psi-\eta<\arg\lambda_{n_k}<\psi+\eta$.

Имеем

$$K(\psi)=\lim_{\eta\to0}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln\left|\frac{\varphi(\lambda_{n_k})}{L'(\lambda_{n_k})}\right|}{|\lambda_{n_k}|}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{\eta\to0}\left[\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln|\varphi(\lambda_{n_k})|}{|\lambda_{n_k}|}+\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_{n_k})}\right|\right]\leqslant$$
$$\leqslant\pi\left[\rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\right)-S'\cos\alpha\right]\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sin\psi+\pi\left[\rho\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+C'\sin\alpha\right]\cdot\sec\alpha\cdot\cos\psi+\delta^{(\psi)},$$

где

$$\delta^{(\psi)}=\lim_{\eta\to0}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_{n_k})}\right|.$$

Итак, ряд (1) сходится в области, которая является пересечением полуплоскостей:

$$\left\{x-\pi\left[C\left(1-\frac{\rho}{C}\right)\operatorname{tg}\alpha+\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\rho\cdot\sec\alpha\right]\right\}\cos\psi-$$
$$-\left\{y-\pi\left[S\left(1-\frac{\rho}{C}\right)\operatorname{ctg}\alpha-\rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\operatorname{cosec}\alpha\right]\right\}\sin\psi>\delta^{(\psi)},\qquad(3)$$

где

$$-\alpha\leqslant\psi\leqslant\alpha.$$

Это утверждение справедливо при любом выборе $K<1-\frac{\rho}{C}$ в определении z^*.

Если положить $K<1-\frac{\varepsilon}{C}\operatorname{ctg}\alpha$, где $\varepsilon>\rho\cdot\operatorname{tg}\alpha$ и взять ε достаточно близким к $\rho\cdot\operatorname{tg}\alpha$, то $z^*=x^*+iy^*$ будет сколь угодно близко к

$$\pi\rho\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-i\frac{S}{C}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\right].$$

Так как точку z^* можно выбрать сколь угодно близкой к вершине, x_0+iy_0 угла голоморфности ряда, то произведя простейшие преобразования в неравенстве (3), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Ряд* (1) *сходится в области, в которой для всех* $-\alpha\leqslant\psi\leqslant\alpha$ *имеет место неравенство*:

$$(x-x_0)\cos\psi-(y-y_0)\sin\psi>\delta^{(\psi)}+\pi\left[S\cdot\operatorname{ctg}\alpha-\rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\operatorname{cosec}\alpha\right]\times$$

$$\times\sin\psi-\pi\left[\rho\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sec\alpha+C\cdot\operatorname{tg}\alpha\right]\cos\psi,$$

где

$$z_0=x_0+iy_0$$

— вершина любого угла голоморфности ряда.

Заметим, что если последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет угловую плотность, а это означает, что существует такая неубывающая функция $\Theta(\psi)$, что для всех ψ_1 и ψ_2 не принадлежащих некоторому исключительному множеству, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\mu_n|}=\Theta(\psi_2)-\Theta(\psi_1)_1$$

где $\{\mu_n\}$ — расположенная в порядке неубывания модулей та часть последовательности $\{\lambda_n\}$, для которой $\psi_1<\arg\lambda_n<\psi_2$, то $\rho=0$ и ряд (1) будет сходится в области, которая служит пересечением полуплоскостей:

$$(x-x_0)\cdot\cos\psi-(y-y_0)\sin\psi>\delta^{(\psi)}+\pi\cdot S\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\psi-\pi\cdot C\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\psi,$$

где

$$C=\int\limits_{-\alpha-0}^{\alpha+0}\cos\psi\,d\Theta(\psi),\quad S=\int\limits_{-\alpha-0}^{\alpha+0}\sin\psi\,d\Theta(\psi).$$

Это утверждение обобщает соответствующую теорему, доказанную Г. Л. Лунцем [1].

Пусть теперь на величины $\arg\lambda_n$ не наложено никаких ограничений. Обозначим через $\Lambda_{\varphi_1,\varphi_2}$ подпоследовательность последовательности Λ, состоящую из тех ее членов, для которых $\varphi_1\leqslant\arg\lambda_n<\varphi_2$. Пусть, далее R_{φ_1,φ_2} — ряд, составлений из тех членов ряда

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n z}, \tag{4}$$

для которых $\lambda_n\in\Lambda_{\varphi_1,\varphi_2}$ и $f_{\varphi_1,\varphi_2}(z)$ — сумма ряда R_{φ_1,φ_2}. Выбрав некоторые φ и некоторое $\eta_0>0$, построим угол раствора $\pi-2\eta_0$ с биссектрисой, идущей вдоль луча $\arg z=-\varphi$, который принадлежит углам голоморфности всех функций вида $f_{\varphi,\varphi+\eta}(z)$ при $0<\eta\leqslant\eta_0$ (такой угол наверняка существует, если область сходимости ряда (4) непустая).

Обозначим через $H_\varphi^{\eta_0}$ тот из углов указанного вида, который ограничивает наибольшую область. Вершина угла $H_\varphi^{\eta_0}$ совпадает с вершиной угла голоморфности хотя бы одной из функций $f_{\varphi,\varphi+\eta}(z)$ при $0<\eta\leqslant\eta_0$ или является предельной точкой для некоторой последовательности таких вершин. Пусть $z=l_\varphi^{(\eta_0)}e^{-i\varphi}$ — вершина угла $H_\varphi^{\eta_0}$.

Через $H_\varphi^{-\eta_0}$ — обозначим угол, построенный аналогично углу $H_\varphi^{\eta_0}$ (того же раствора, с той же биссектрисой) для семейства функций вида $f_{\varphi-\eta,\varphi}(z)$

при $0<\eta\leqslant\eta_0$, и пусть $z=l_\varphi^{(-\eta_0)}e^{-i\varphi}$ — вершина угла $H_\varphi^{-\eta_0}$. Введем обозначения:

$$l_\varphi^+=\overline{\lim_{\eta_0\to 0}}\, l_\varphi^{(\eta_0)},\quad l_\varphi^-=\overline{\lim_{\eta_0\to 0}}\, l_\varphi^{(-\eta_0)},\quad l(\varphi)=\max(l_\varphi^+,\ l_\varphi^-).$$

Область K, все точки которой при любом φ удовлетворяют условию

$$x\cdot\cos\varphi-y\cdot\sin\varphi-l(\varphi)>0, \tag{5}$$

назовем нормальной областью голоморфности ряда (4).

В этой области (см. [1]) голоморфны все функции вида $f_{\varphi_1,\varphi_2}(z)$ и сама функция $f(z)$, а в любой сколь угодно малой окрестности всякой точки на прямой

$$x\cdot\cos\varphi-y\cdot\sin\varphi-l(\varphi)=0 \tag{6}$$

найдутся вершины углов голоморфности функций $f_{\varphi-\eta,\varphi+\eta}(z)$ при сколь угодно малых значениях $\eta>0$.

Через M обозначим замыкание множества особых точек всех функций $f_{\varphi_1,\varphi_2}(z)$.

Возьмем точку $z=x+iy$ на границе области K. Она может принадлежать прямолинейному отрезку границы области K, а может и не лежать на прямолинейном отрезке границы области. Но всегда в любой ее окрестности имеются точки, которые принадлежат либо одной прямой вида (6), либо бесконечному множеству таких прямых. Пусть φ — один из углов, для которых в этой точке справедливо равенство (6). Выберем $\eta_0>0$ сколь угодно малым и рассмотрим подпоследовательность $\Lambda_{\varphi-\eta_0,\varphi+\eta_0}$; через τ_{φ,η_0} обозначим максимальную плотность последовательности, составленной из модулей членов $\Lambda_{\varphi-\eta_0,\varphi+\eta_0}$.

Пусть

$$\tau_\varphi=\lim_{\eta_0\to 0}\tau_{\varphi,\eta_0},\quad \text{а}\quad \tau(z)=\inf_{\varphi\in A}\tau_\varphi=\tau_{\varphi^*}$$

(A — множество всех φ, для которых справедливо (6) при данном z). В любой окрестности точки z найдется вершина угла голоморфности функции $f_{\varphi^*-\eta,\varphi^*+\eta}(z)$, если η достаточно мало (см. [1]).

На основании теоремы 3 из [2] можно утверждать, что функция $f_{\varphi^*-\eta,\varphi^*+\eta}(z)$ имеет хотя бы одну особую точку в области $D_{\varepsilon,\beta}$, ограниченной прилегающими к вершине угла голоморфности отрезками его сторон длины:

$$d=\pi\left\{\left[1+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot 2\sec\eta\right]\tau_{\varphi^*}-\tau_{\varphi^*}\operatorname{tg}\eta\right\}<\pi\tau_{\varphi^*}\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^{*)} \tag{7}$$

и проведенными через концы этих отрезков прямыми, наклоненными к действительной оси под углами, равными соответственно $\frac{\pi}{2}-\beta$, $\beta-\frac{\pi}{2}$, где β и ε связаны условием

$$\operatorname{tg}\beta>(1+\varepsilon)\operatorname{tg}\eta.$$

Выберем $\varepsilon=\varepsilon(\eta)$ так, чтобы $\lim\limits_{\eta\to 0}\varepsilon(\eta)=\infty$, а $\lim\limits_{\eta\to 0}[\operatorname{tg}\eta\cdot\varepsilon(\eta)]=0$, тогда $\operatorname{tg}\beta$ можно взять сколь угодно близкими к $\operatorname{tg}\eta$, а так как η — сколь угодно мало, то $\operatorname{tg}\beta$ будет сколь угодно близким к нулю.

---

*) В формулировке теоремы 3 из [2] для величины d дана более грубая оценка, однако из хода доказательства этой теоремы с учетом малости η можно получить (6).

Таким образом доказана теорема.

Теорема 2. *Какова бы ни была точка z границы нормальной области голоморфности функции $f(z)$, в круге радиуса $3\pi\tau_z$ с центром в этой точке имеется по крайней мере одна точка множества M.*

Пусть

$$\delta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_n)}\right|<\infty$$

— индекс конденсации последовательности $\{\lambda_n\}$, а через $\delta[\varphi_1, \varphi_2]$ обозначим индекс конденсации последовательности $\Lambda_{\varphi_1, \varphi_2}$, через $L_{\varphi_1, \varphi_2}(z)$ — характеристическую функцию этой последовательности. Индекс конденсации конечной последовательности будем считать равным 0. Пусть $\varphi_1=\varphi-\eta$, $\varphi_2=\varphi+\eta$, $\varphi-\eta<\varphi'<\varphi+\eta$, τ — максимальная плотность последовательности $\Lambda_{\varphi_1, \varphi_2}$.

Имеем

$$L_{\varphi-\eta, \varphi+\eta}(z)=L_{\varphi-\eta, \varphi'}(z)\cdot L_{\varphi_1, \varphi+\eta}(z).$$

Если $\lambda_n\in\Lambda_{\varphi-\eta, \varphi'}$, то

$$L'_{\varphi-\eta, \varphi+\eta}(\lambda_n)=L'_{\varphi-\eta, \varphi'}(\lambda_n)\cdot L_{\varphi', \varphi+\eta}(\lambda_n),$$

откуда

$$\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\left|\frac{1}{L'_{\varphi-\eta, \varphi'}(\lambda_n)}\right|=\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\left|\frac{1}{L'_{\varphi-\eta, \varphi+\eta}(\lambda_n)}\right|+\frac{1}{|\lambda_n|}\ln|L_{\varphi', \varphi+\eta}(\lambda_n)|.$$

Из оценки для индикатрисы характеристической функции (см. [2]) следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln|L_{\varphi', \varphi+\eta}(\lambda_n)|\leqslant\pi\tau\cos\eta\,|\sin 2\eta|+\pi\tau\sin\eta\leqslant 3\pi\tau\cdot\sin\eta.$$

Поэтому

$$\delta[\varphi-\eta, \varphi')\leqslant\delta[\varphi-\eta, \varphi+\eta)+3\pi\tau\sin\eta,$$

аналогично,

$$\delta[\varphi', \varphi+\eta)\leqslant\delta[\varphi-\eta, \varphi+\eta)+3\pi\tau\cdot\sin\eta;$$

если длина интервала $[\varphi-\eta, \varphi+\eta)$ достаточно мала, то

$$\delta[\varphi-\eta, \varphi')\leqslant\delta[\varphi-\eta, \varphi+\eta)+\varepsilon,$$

$$\delta[\varphi', \varphi+\eta)\leqslant\delta[\varphi-\eta, \varphi+\eta)+\varepsilon,$$

как бы ни было мало $\varepsilon>0$.

Введем обозначения $(\eta>0)$:

$$\delta_\varphi^+=\overline{\lim_{\eta\to 0}}\,\delta[\varphi, \varphi+\eta), \quad \delta_\varphi^-=\overline{\lim}\,\delta[\varphi-\eta, \varphi),$$

$\delta(\varphi)=\max(\delta_\varphi^+, \delta_\varphi^-)$. Величину $\delta(\varphi)$ будем называть лучевым индексом конденсации последовательности $\{\lambda_n\}$.

Ранее была введена величина

$$\delta^{(\psi)}=\lim_{\eta\to 0}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_{n_k})}\right|,$$

где $\{\lambda_{n_k}\}$ — та подпоследовательность последовательности $\{\lambda_n\}$, для точек которой $\varphi-\eta\leqslant\arg\lambda_{n_k}\leqslant\varphi+\eta$.

Так как

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_{n_k}|} \ln \left| \frac{1}{L'\lambda_{n_k})} \right| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right|,$$

то для всех $\varphi-\eta<\psi<\varphi+\eta$, $\delta^{(\psi)}<\delta(\varphi)+\varepsilon$.

Из теоремы 1 следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\eta_0>0$, что для всякого $0<\eta\leqslant\eta_0$ можно построить угол голоморфности H функции $f_{\varphi-\eta,\,\varphi+\eta}$ раствора $\pi-2\eta$ с биссектрисой, идущей параллельно лучу $\arg z=-\varphi$, такой, что ряд $R_{\varphi-\eta,\,\varphi+\eta}$ сходится в лежащем внутри H угле, стороны которого параллельны соответствующим сторонам H и отстоят от них на расстояниях, равным $\delta(\varphi)+\varepsilon$.

Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 3. *Ряд* (4) *сходится в области* Y, *точки которой при любом* φ $(0\leqslant\varphi<2\pi)$ *удовлетворяют условию*

$$x\cos\varphi-y\cdot\sin\varphi-l(\varphi)-\delta(\varphi)>0.$$

Легко видеть, что в формулировке теоремы 3 величина $l(\varphi)+\delta(\varphi)$ может быть заменена величиной

$$m(\varphi)=\max(l_\varphi^+ +\delta_\varphi^+,\quad l_\varphi^- +\delta_\varphi^-).$$

г. Москва

Поступило в редакцию
23.V.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Л. Лунц, О рядах Дирихле с комплексными показателями, Математический сборник, т. 67 (109): 1 (1965), 89–134.
2. Г. Л. Лунц, Ряды Дирихле с нерегулярным распределением аргументов показателей Лит. мат. сб., **VI,** 4 (1966), 515–532.

KAI KURIOS TEOREMOS DIRICHLE EILUČIŲ KLAUSIMU

V. Turpanova

(*Reziumė*)

Darbe yra nagrinėjamos Dirichle eilutės

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

kai rodikliai λ_n yra kompleksiniai, o seka $\{|\lambda_n|\}$ yra išmatuojama.

QUELQUES THÉORÈMES SUR LES SÉRIES DE DIRICHLET

T. Tourpanova

(*Résumé*)

On démontre quelques théorèmes sur les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

où les exposants λ_n sont complexes et la suite $\{|\lambda_n|\}$ est mésurable.