1968

УДК-519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

А. БИКЯЛИС

§ 1. Введение

Во всем дальнейшем $\mathbf{t}=(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — векторы k-мерного эвклидового пространства R_k; $|\mathbf{t}|$ и $|\mathbf{x}|$ — их нормы; $(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ — скалярное произведение; $\mathbf{0}$ — нулевой вектор; $\mathfrak{v}$ — класс всех борелевских множеств в R_k; $f_{\xi_1}(\mathbf{t})$, $F_{\xi_1}(\mathbf{x})$ и $P_{\xi_1}(A)=P\{\xi_1\in A\}$, — соответственно, характеристическая функция, функция распределения и вероятностная функция случайного вектора $\xi_1=(\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{1k})$ с ковариационной матрицей V; $P\{\ldots\}$ — вероятность в скобках указанного события; Δ — определитель матрицы V; $Q(\mathbf{t})$ — квадратическая форма, соответствующая V; $\alpha_r(\mathbf{t})=M(\mathbf{t}, \xi_1)^r$, $\beta_r(t)=M|(\mathbf{t}, \xi_1)|^r$ и $\varkappa_r(\mathbf{t})$ — момент, абсолютный момент и семиинвариант случайной величины $(\mathbf{t}, \xi_1)$. При этом, пусть $\beta_j^{(r)}=M|\xi_{1j}|^r$, $\sigma_j^2=M(\xi_{1j}-M\xi_{1j})^2$ и $\beta_r=\sum_{j=1}^{k}\beta_j^{(r)}$.

Нам понадобятся многочлены $P_r(\omega)$:

$$\exp\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varkappa_{r+2}(\omega)}{(r+2)!}u^r\right\}=1+\sum_{r=1}^{\infty}P_r(\omega)u^r. \tag{1}$$

Как известно [1], они имеют вид

$$P_r(\omega)=\frac{\varkappa_{r+2}(\omega)}{(r+2)!}+\sum_{l=1}^{r-1}\sum_{j_l=l}^{r-1}\sum_{j_{l-1}=l-1}^{j_l-1}\cdots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}\times$$

$$\times\frac{(r-j_l)(j_l-j_{l-1})\ldots(j_2-j_1)\,\varkappa_{r-j_l+2}(\omega)\,\varkappa_{j_l-j_{l-1}+2}(\omega)\ldots\varkappa_{j_2-j_1+2}(\omega)\,\varkappa_{j_1+2}(\omega)}{r j_l j_{l-1}\ldots j_2 j_1(r-j_l+2)!\,(j_l-j_{l-1}+2)!\ldots(j_2-j_1+2)!\,(j_1+2)!}. \tag{2}$$

Пусть

$$P_r(-\varphi)(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k}P_r(i\mathbf{t})\,e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x})-\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})}\,d\mathbf{t}. \tag{3}$$

Для вычисления интеграла $P_r(-\varphi)(\mathbf{x})$ можно использовать равенство (2). Именно, в (2) произведения $\underset{1}{\omega}^{m_1}\underset{2}{\omega}^{m_2}\ \ \underset{k}{\omega}^{m_k}$ достаточно заменить на частные производные

$$(-1)^{m_1+m_2+\ldots+m_k}\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_k}\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\quad\partial x_k^{m_k}},$$

где $\varphi(\mathbf{x})$ — плотность k-мерного нормального закона:

$$\varphi(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k} e^{-i(\mathbf{t},\,\mathbf{x})-\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})}\,d\mathbf{t}.$$

Положим

$$P_r(-\varphi)(\mathbf{x})=\int\limits_{\substack{y_1<x_1\\ \cdots\cdots\\ y_k<x_k}} P_r(-\varphi)(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}. \tag{3'}$$

Настоящая работа посвящена изучению остаточного члена в асимптотических разложениях для плотности $p_{\mathbf{S}_n}(\mathbf{x})$, функции распределения $F_{\mathbf{S}_n}(\mathbf{x})$ и вероятностной функции $P_{\mathbf{S}_n}(A)=P\{\mathbf{S}_n\in A\}$ суммы

$$\mathbf{S}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$$

независимых одинаково распределенных k-мерных случайных векторов эвклидова пространства R_k.

Не ограничивая общности предположим, что математические ожидания компонент вектора ξ_1 равны нулю.

В случае, когда случайный вектор ξ_1 имеет конечные моменты s-того порядка ($s\geqslant 3$) и ограниченную плотность, тогда

$$p_{\mathbf{S}_n}(\mathbf{x})=\sum_{j=0}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(-\varphi)(\mathbf{x})+R_n(\mathbf{x}).$$

Нас интересует строение остаточного члена $R_n(\mathbf{x})$, то есть, как он зависит от n, k и характеристик случайного вектора ξ_1. При $k=1$ этот вопрос глубоко изучил В. Статулявичус в [2]. Следует заметить, что Х. Хекендорфом в [3] показано, что имеет место равенство $R_n(\mathbf{x})=o(n^{-\frac{s-3}{2}})$.

Здесь докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если случайный вектор ξ_1 с невыражденной ковариационной матрицей V имеет конечные моменты s-того порядка ($s\geqslant 3$) и ограниченную плотность $p_{\xi_1}(\mathbf{x})\leqslant C<\infty$, то*

$$\sup_{\mathbf{x}}|R_n(\mathbf{x})|\leqslant\frac{2^{4(s-1)}\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{\pi^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\Delta}\,n^{\frac{s-2}{2}}}\sup_{\mathbf{t}\neq 0}\frac{M|(\mathbf{t},\,\xi_1)|^s}{[M(\mathbf{t},\,\xi_1)^2]^{\frac{s}{2}}}+Cn^{\frac{k}{2}}e^{-c(n-2)}.$$

Здесь

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,$$

а C из равенства (10).

Теорема 2. *Если случайный вектор ξ_1 с невырожденной ковариационной матрицей V имеет конечные моменты s-того порядка ($s\geqslant 3$) и его характеристическая функция удовлетворяет условие*

$$(C)\quad \overline{\lim_{|\mathbf{t}|\to\infty}}\,|f_{\xi_1}(\mathbf{t})|<1,$$

то

$$F_{S_n}(\mathrm{x})=\Phi(\mathrm{x})+\sum_{j=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(-\Phi)(\mathrm{x})+o\left(\frac{1}{n^{\frac{s-2}{2}}}\right). \qquad (4)$$

Асимптотические разложения для $F_{S_n}(\mathrm{x})$ впервые получил Р. Ранга Рао [4] с остаточным членом

$$O\left(\frac{\ln^{\frac{k-1}{2}} n}{n^{\frac{s-2}{2}}}\right).$$

Нам удалось снять логарифмический множитель.

Будем говорить, что вероятностная функция $P_{\xi_1}(A)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту, если в разложении

$$P_{\xi_1}(A)=a\int_A p(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}+(1-a)\,S(A)$$

$a>0$. Здесь $S(A)$ — некоторая вероятностная функция.

Теорема 3. *Пусть случайный вектор ξ_1 с невырожденной ковариационной матрицей V имеет конечные моменты s-того порядка* ($s\geqslant 3$), *а его вероятностная функция имеет абсолютно непрерывную компоненту, тогда равномерно по $A\in\mathfrak{a}$*

$$P_{S_n}(A)=\int_A d\Phi(\mathrm{x})+\sum_{j=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\int_A dP_j(-\Phi)(\mathrm{x})+o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right).$$

В случае $k<2s$ теорема 3 была доказана автором в [5]. При $s=3$ и $k<6$ эту теорему также доказали М. Маматов и М. К. Халиков [6].

§ 2. Леммы

Лемма 1 (см. [1]). *Пусть $h(\mathrm{t})$ — некоторая s-раз дифференцируемая функция, тогда*

$$d^s h(\mathrm{t})=\frac{1}{h(\mathrm{t})}\,d^s h(\mathrm{t})+\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j_i=i}^{s-1}\sum_{j_{i-1}=i-1}^{j_i-1}\cdots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}\times$$

$$\times\frac{(-1)^i(s-1)!}{(s-j_i)!\,(j_i-j_{i-1})!\ \ldots\ (j_2-j_1)!\,(j-1)!}\times$$

$$\times\frac{d^{s-j_i}h(\mathrm{t})\,d^{j_i-j_{i-1}}h(\mathrm{t})\ \ldots\ d^{j_2-j_1}h(\mathrm{t})\,d^{j_1}h(\mathrm{t})}{[h(\mathrm{t})]^{i+1}}.$$

Здесь $d^\nu h(\mathrm{t})$ — дифференциал ν-того порядка функции $h(\mathrm{t})$.

Лемма 2 (см. [1]). *При выполнении условий леммы* 1 *имеет место равенство*

$$\frac{1}{h(\mathrm{t})}\,d^s h(\mathrm{t})=d^s\varkappa(\mathrm{t})+\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j_i=1}^{s-1}\sum_{j_{i-1}=i-}^{j_i-1}\cdots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}\times$$

$$\times\frac{(s-1)!\,d^{s-j_i}\varkappa(\mathrm{t})\,d^{j_i-j_{i-1}}\varkappa(\mathrm{t})\ \ldots\ d^{j_2-j_1}\varkappa(\mathrm{t})\,d^{j_1}\varkappa(\mathrm{t})}{j_i j_{i-1}\ \ldots\ j_2 j_1(s-j_i-1)!\,(j_i-j_{i-1}-1)!\ \ldots\ (j_2-j_1-1)!\,(j_1-1)!},$$

где $\varkappa(\mathrm{t})=\ln h(\mathrm{t})$.

Лемма 3 (*В. В. Петров* [7]). *Пусть функция $y=y(x)$ имеет производную порядка v, тогда при $v\leqslant l$*

$$\frac{d^v}{dx^v}\,y^l=\sum_{r_0=1}^{v}\sum{}'\,a_{lv}\,y^{n-r_0}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{r_1}\quad\left(\frac{d^v y}{dx^v}\right)^{r_v},$$

где Σ' обозначает суммирование по всем целым неотрицательным решениям системы уравнений

$$r_1+2r_2+\ldots+vr_v=v,$$

$$r_1+r_2+\ldots+r_v=r_0.$$

При этом полагаем $0^0=1$. Коэффициенты a_{lv} при всех l удовлетворяют неравенство $|a_{lv}|\leqslant v^v l^v$.

Лемма 4 (см. [1]). *Если случайный вектор ξ_1 имеет конечные моменты s-того порядка, то*

$$|\varkappa_s(\omega)|\leqslant(s-1)!\,\beta_s(\omega).$$

Лемма 5 (см. [1]). *При $r\leqslant s-2$ имеем*

$$|P_r(\omega)|\leqslant 2^r\left[\frac{\beta_s(\omega)}{Q(\omega)}\right]^{\frac{r}{s-2}}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{[Q(\omega)]^\nu}{4^\nu\,\nu!}. \tag{6}$$

Лемма 6 (см. [1]). *Если случайный вектор ξ_1 имеет конечные моменты третьего порядка, то*

$$\left|f_{\xi_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right|\leqslant e^{-\frac{1}{3n}Q(\mathbf{t})}$$

при $\dfrac{\beta_3(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\leqslant\dfrac{\sqrt{n}}{4}$.

Лемма 7 (см. [1]). *Пусть случайный вектор ξ_1 имеет конечные моменты s-того порядка $(s\geqslant 3)$, тогда*

$$\left|f^n_{\xi_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}P_\nu(i\mathbf{t})\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right)\right|\leqslant\left(\frac{2}{0.99}\right)^{s-1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{n^{\frac{s-2}{2}}}\,e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})}$$

при $\left[\dfrac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right]^{\frac{1}{s-2}}\leqslant\dfrac{\sqrt{n}}{8}$.

Лемма 8 (см. [1]). *Если случайный вектор ξ_1 с невыражденной ковариационной матрицей V имеет конечные моменты s-того порядка $(s\geqslant 3)$, то*

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t^r_m}\left[f^n_{\xi_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3}P_\nu(i\mathbf{t})\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right)\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_{sk}\,\beta_s\left(|\mathbf{t}|^{s-r}+|\mathbf{t}|^{2(s+3)}\right)}{n^{\frac{s-2}{2}}}\,e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})}$$

для $r\leqslant s$, $m=1, 2, \ldots, k$ и $|\mathbf{t}|\leqslant\dfrac{\lambda\sqrt{n}}{16ek^k}\,\beta_s^{-\frac{1}{s-2}}$ *Здесь* $C_{sk}=(2s+r+6)\,(r+1)!\,k^{s+1}s^{2s}2^{2sr}$, $\lambda=\min\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k\}$, $\lambda_1,\lambda_2,\quad\lambda_k$ — *характеристические числа матрицы V*

Лемма 9 (*Г Бергстром* [8]). *Положим* $\Phi(\mathbf{x})$ — *функция распределения* k-*мерного нормального случайного вектора с нулевыми математическими ожиданиями и невырожденной ковариационной матрицей* $\|\mu_{ij}\|$, $F(\mathbf{x})$ — *некоторая функция распределения, а* $G(\mathbf{x})$ *функция удовлетворяющая условия*:

1) $F(-\infty, \ldots, -\infty) = G(-\infty, \quad -\infty) \qquad F(+\infty, \qquad +\infty) = G(+\infty, \ldots, +\infty)$;

2) *дифференцируемая в каждой точке и*

$$\left| \frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\mu_{ii}}}.$$

Если для всех $\mathbf{x} \in R_k$

$$\left| [F(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x})] * \Phi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \right| \leqslant M(\varepsilon),$$

то

$$| F(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}) | \leqslant \tau(k) M(\varepsilon) + 2\varepsilon k^{\frac{1}{2}} C\alpha(k).$$

Здесь $*$ — *знак композиции, а* $\alpha(k)$ и $\tau(k)$ *удовлетворяют равенство*

$$\frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\alpha(k)}^{\alpha(k)} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right]^k = 1 + \frac{1}{\tau(k)}.$$

Лемма 10 (*С. Н. Бернштейн* [9], *стр.* 71). *Если* $p>0$, $q>0$ и $p+q=1$, *то для каждого* $x \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{npq}$

$$\sum_{(m-np)\geqslant 2x\sqrt{npq}} \binom{n}{m} p^n q^{n-m} < 2e^{-x^2}.$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

Положим $D = \left\{ \mathbf{t} : \left[\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right]^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8} \right\}$. Поскольку

$$p_{S_n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x})} f^n_{\xi_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) d\mathbf{t}$$

и

$$\sum_{j=0}^{s-3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(-\varphi)(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x}) - \frac{1}{2}Q(\mathbf{t})} \sum_{j=1}^{s-3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(i\mathbf{t})\, d\mathbf{t},$$

то

$$R_n(\mathbf{x}) = I_1 + I_2 + I_3. \tag{7}$$

Здесь

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_D e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x})} \left[f^n_{\xi_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})} \sum_{j=1}^{s-3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(i\mathbf{t}) \right] d\mathbf{t},$$

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k \setminus D} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x}) - \frac{1}{2}Q(\mathbf{t})} \sum_{j=0}^{s-3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(i\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$$

и

$$I_3=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k\setminus D} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x})}f_{\xi_1}^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)d\mathbf{t}.$$

Оценим интегралы I_1, I_2 и I_3. В силу леммы 7

$$|I_1|\leqslant\frac{2^{s-1}}{0.99^{s-1}(2\pi)^k n^{\frac{s-2}{2}}}\int_{R_k}\beta_s(\mathbf{t})e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})}d\mathbf{t}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{s-1}}{(2\pi)^k 0.99^{s-1}n^{\frac{s-2}{2}}}\sup_{\mathbf{t}\neq 0}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{[Q(\mathbf{t})]^{\frac{s}{2}}}\int_{R_k}Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})}d\mathbf{t},$$

где

$$\int_{R_k}Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})}d\mathbf{t}=\frac{2^{s+k}\pi^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

Поэтому

$$|I_1|\leqslant\frac{2^{2s-1}\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{0\cdot 99^{s-1}\pi^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\Delta}\,n^{\frac{s-2}{2}}}\sup_{\mathbf{t}\neq 0}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{[Q(\mathbf{t})]^{\frac{s}{2}}}. \tag{8}$$

С помощью неравенства (6) получаем

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k\setminus D}e^{-\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})}\sum_{j=0}^{s-3}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^j\left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{j}{s-2}}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{[Q(\mathbf{t})]^\nu}{4^\nu\nu!}d\mathbf{t}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k\setminus D}\sum_{j=0}^{s-3}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^j\left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{j}{s-2}}e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})}d\mathbf{t}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{8^{s-2}}{(2\pi)^k n^{\frac{s-2}{2}}}\sup_{\mathbf{t}\neq 0}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{[Q(\mathbf{t})]^{\frac{s}{2}}}\sum_{j=0}^{s-3}\left(\frac{1}{4}\right)^j\int_{R_k}Q^{\frac{s-2}{2}}(\mathbf{t})e^{-\frac{1}{4}Q(\mathbf{t})}d\mathbf{t}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{4(s-1)}\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{(s+k-2)\pi^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\Delta}\,n^{\frac{s-2}{2}}}\sup_{\mathbf{t}\neq 0}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{[Q(\mathbf{t})]^{\frac{s}{2}}}. \tag{9}$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\leqslant\frac{k^{k-1}M|\xi_1|^2|\mathbf{t}|^{s-2}}{\Delta}.$$

Так как функция распределения случайного вектора ξ_1 имеет плотность, то существует положительная постоянная c такая, что

$$\sup_{\mathbf{t}\in\left\{\mathbf{t}:\left[\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right]^{\frac{1}{s-2}}>\frac{1}{8}\right\}}|f_{\xi_1}(\mathbf{t})|=e^{-c} \tag{10}$$

По многомерному равенству Парсеваля [10], стр. 67, имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k}|f_{\xi_1}(\mathbf{t})|^2dt=\int_{R_k}p_{\xi_1}^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Из двух последних соотношений немедленно вытекает, что

$$|I_3| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k \setminus D} \left| f^n_{\xi_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right| d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant n^{\frac{k}{2}} e^{-c(n-2)} \int\limits_{R_k} p^2_{\xi_1}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant Cn^{\frac{k}{2}} e^{-c(n-2)}. \tag{11}$$

Соотношения (7—9) и (11) вместе дают утверждение теоремы 1.

§ 4. Доказательство теоремы 2 и 3

Сперва докажем теоремы 2 и 3 для функции распределения $F_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{x})$ и вероятностной функции $P_{\mathbf{Z}_n}(A)$ суммы

$$\mathbf{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (\eta_j - M\eta_j)$$

независимых одинаково распределенных случайных векторов $\eta_1, \eta_2, \quad \eta_n$:

$$\eta_j = (\eta_{1j}, \eta_{2j}, \quad \eta_{kj}) = \begin{cases} \xi_j, & \text{если } |\xi_j| \leqslant \sqrt{n}, \\ 0, & \text{если } |\xi_j| > \sqrt{n}; \end{cases}$$

$M\eta_j = (M\eta_{1j}, M\eta_{2j}, \ldots, M\eta_{kj})$.

Обозначим: $f_{\eta_1}(\mathbf{t})$ и $F_{\eta_1}(\mathbf{x})$ — характеристическая функция и функция распределения случайного вектора η_1 с ковариационной матрицей $\bar{V}$; $\bar{\Delta}$ — определитель матрицы $\bar{V}$; $\bar{Q}(\mathbf{t})$ — квадратическая форма соответствующая $\bar{V}$; $\bar{\alpha}_r(\mathbf{t})$, $\bar{\beta}_r(\mathbf{t})$ и $\bar{\varkappa}_r(\mathbf{t})$ — момент, абсолютный момент и семиинвариант случайной величины $(\mathbf{t}, \eta_1 - M\eta_1)$; $\bar{\beta}^{(r)}_j = M|\eta_{j_1} - M\eta_{j_1}|^r$, $\sigma_j^2 = M(\eta_{j_1} - M\eta_{j_1})^2$ и $\bar{\beta}_r = \sum\limits_{j=1}^{k} \bar{\beta}^{(r)}_j$.

Поскольку случайный вектор ξ_1 имеет конечные моменты s-того порядка, то при $s \geqslant v = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$, $v_1, v_2, \quad v_k = 0, 1, \ldots, v$ имеем

$$M\eta^{v_1}_{1j}\eta^{v_2}_{2j} \quad \eta^{v_k}_{kj} = M\xi^{v_1}_{1j}\xi^{v_2}_{2j} \quad \xi^{v_k}_{kj} + o\left(n^{-\frac{s-v}{2}}\right). \tag{12}$$

Действительно,

$$|M\eta^{v_1}_{1j}\eta^{v_2}_{2j} \quad \eta^{v_k}_{kj} - M\xi^{v_1}_{1j}\xi^{v_2}_{2j} \quad \xi^{v_k}_{kj}| = \left| \int\limits_{|\mathbf{x}| > \sqrt{n}} x_1^{v_1} x_2^{v_1} \ldots x_k^{v_k}\, dF_{\xi_1}(\mathbf{x}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{k} \left\{ \int\limits_{|\quad| > \sqrt{n}} |x_j|^v dF_{\xi_1}(\mathbf{x}) \right\}^{\frac{v_j}{v}} \leqslant n^{-\frac{s-v}{2}} \prod_{j=1}^{k} \left\{ \int\limits_{||\quad| > \sqrt{n}} |x_j|^s dF_{\xi_1}(\mathbf{x}) \right\}^{\frac{v_i}{v}} =$$

$$= o\left(n^{\frac{s-v}{2}}\right).$$

Кроме того, при

$$M\eta^{v_1}_{1j}\eta^{v_2}_{2j} \quad \eta^{v_k}_{kj} = o\left(n^{\frac{v-s}{2}}\right). \tag{13}$$

Очевидно

$$|M\eta_{1j}^{v_1}\eta_{2j}^{v_2}\ \ \eta_{kj}^{v_k}|\leqslant|\int_{\sqrt[3]{n}\leqslant|\mathbf{x}|\leqslant\sqrt{n}}|x_1|^{v_1}|x_2|^{v_2}\dots|x_k|^{v_k}dF_{\eta_1}(\mathbf{x})+$$

$$+\int_{|\mathbf{x}|\leqslant\sqrt[3]{n}}|x_1|^{v_1}|x_2|^{v_2}\ \ |x_k|^{v_k}|dF_{\eta_1}(\mathbf{x})\leqslant$$

$$\leqslant n^{\frac{v-s}{3}}\int_{|\mathbf{x}|\geqslant\sqrt[3]{n}}|x_1|^{v_1}|x_2|^{v_2}\ \ |x_k|^{v_k}dF_{\eta_1}(\mathbf{x})+$$

$$+n^{\frac{v-s}{3}}\int_{R_k}|x_1|^{m_1}|x_2|^{m_2}\ \ |x_k|^{m_k}dF_{\xi_1}(\mathbf{x})=o\left(n^{\frac{v-s}{2}}\right).$$

Здесь $m_1+m_2+\ldots+m_k=s$, m_1, m_2, ..., $m_k=0$, 1, ..., s.

С помощью соотношения (12) нетрудно показать, что существует число n_0 такое, что для всех $n>n_0$ ковариационная матрица $\bar{V}$ будет невырождена.

Через $\tilde{P}_r(\omega)$, $P_r(-\bar{\varphi})(\mathbf{x})$ и $P_r(-\bar{\Phi})(\mathbf{x})$ обозначим многочлены, коэффициенты которых содержат семиинварианты случайного вектора $\eta_1-M\eta_1$. Они определены равенствами (1), (3) и (3').

$\bar{\Phi}(\mathbf{x})$ – функция распределения нормального закона, имеющего те же первые и вторые моменты, что и функция распределения случайного вектора $\eta_1-M\eta_1$.

Теорема 2'. *При выполнении условий теоремы 2 имеем*

$$F_{Z_n}(\mathbf{x})=\bar{\Phi}(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(-\bar{\Phi})(\mathbf{x})+o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right). \tag{14}$$

Доказательство теоремы 2'. Соотношение (14) достаточно доказать для всех $n>n_0$, n_0, вообще, зависит от распределения случайного вектора ξ_1. $\varepsilon=\delta(n)\,n^{-\frac{s-2}{2}}$, где $\delta(n)\to0$ при $n\to\infty$. Через $p_n(\mathbf{x})$ обозначим плотность абсолютно непрерывной функции распределения $F_{Z_n}(\mathbf{x})*\bar{\Phi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, а $g_n(\mathbf{x})$ – плотность функции

$$\left[\bar{\Phi}(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(-\bar{\Phi})(\mathbf{x})\right]*\bar{\Phi}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right).$$

Для всех $\mathbf{x}\in R_k$

$$\left|\left[F_{Z_n}(\mathbf{x})-\bar{\Phi}(\mathbf{x})-\sum_{j=1}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(-\bar{\Phi})(\mathbf{x})\right]*\bar{\Phi}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right|\leqslant$$

$$\int_{R_k}|p_n(\mathbf{y})-g_n(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}. \tag{15}$$

Переходим к оценке интеграла

$$\int_{R_k}|p_n(\mathbf{y})-g_n(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}.$$

По обобщенному неравенству Гельдера [11], стр. 196, он не больше произведения

$$\prod_{m=1}^{k}\left\{\int\limits_{R_k}(1+|y_m|^{2(k+s)})\,|p_n(\mathbf{y})-g_n(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}\right\}^{\frac{1}{2k}}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{R_k}\prod_{l=1}^{k}(1+|y_l|^{2(k+s)})^{-\frac{1}{k}}\,d\mathbf{y}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Положим

$$I=\int\limits_{R_k}|p_n(\mathbf{y})-g_n(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}$$

$$I_m=\int\limits_{R_k}|y_m|^{2(k+s)}\,|p_n(\mathbf{y})-g_n(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y},\qquad m=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

Так как

$$p_n(\mathbf{y})=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k}e^{-i(\mathbf{t},\,\mathbf{y})-i(\mathbf{t},\,\sqrt{n}\,M\eta_1)-\frac{\varepsilon^2}{2}\bar{Q}(\mathbf{t})}f^n_{\eta_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)d\mathbf{t}$$

$$g_n(\mathbf{y})=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k}\left(1+\sum_{j=1}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\bar{P}_j(i\mathbf{t})\right)\exp\left\{-i(\mathbf{t},\ \mathbf{y})-\frac{1+\varepsilon^2}{2}\bar{Q}(\mathbf{t})\right\}d\mathbf{t}$$

то по многомерному равенству Парсеваля

$$I=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k}\left|e^{-i(\mathbf{t},\,\sqrt{n}\,M\eta_1)}f^n_{\eta_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{\bar{Q}(\mathbf{t})}{2}}\left(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{s-1}\bar{P}_j(i\mathbf{t})\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\right)\right|^2 e^{-\varepsilon^2\bar{Q}(\mathbf{t})}\,d\mathbf{t}$$

$$I_m=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k}\left|\frac{\partial^{k+s}}{\partial t_m^{k+s}}\left\{\left[e^{-i(\mathbf{t},\,\sqrt{n}\,M\eta_1)}f^n_{\eta_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-e^{-\frac{\bar{Q}(t)}{2}}\left(1+\sum_{j=1}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\bar{P}_j(i\mathbf{t})\right)\right]e^{-\frac{\varepsilon^2\bar{Q}(\mathbf{t})}{2}}\right\}\right|^2 d\mathbf{t}$$

для $m=1,\ 2,\ \ \ \ k$.

Оценка I. Пусть $D_0=\left\{\mathbf{t}:\left[\frac{\beta_{s+1}(\mathbf{t})}{\bar{Q}(\mathbf{t})}\right]^{\frac{1}{s-1}}\leqslant\frac{\sqrt{n}}{8}\right\}$. Интеграл I не превосходит суммы интегралов

$$Y_1+Y_2+Y_3=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{D_0}\left|e^{-i(\mathbf{t},\,\sqrt{n}\,M\eta_1)}f^n_{\eta_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{\bar{Q}(\mathbf{t})}{2}}\left(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\bar{P}_j(i\mathbf{t})\right)\right|^2 e^{-\varepsilon^2\bar{Q}(\mathbf{t})}\,d\mathbf{t}+\frac{2}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k\setminus D_0}\left|1+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\bar{P}_j(i\mathbf{t})\,e^{-(1+\varepsilon^2)\bar{Q}(\mathbf{t})}\right|d\mathbf{t}+$$

$$+\frac{2}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k\setminus D_0}\left|f_{\eta_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right|^{2n}e^{-\varepsilon^2\bar{Q}(\mathbf{t})}\,d\mathbf{t}. \tag{17}$$

В силу леммы 7 и соотношения (13)

$$Y_1 \leqslant \frac{2^{2s}[M|\eta_1 - M\eta_1|^{s+1}]^2}{0.99^{2s}(2\pi)^k n^{s-1}} \int\limits_{D_0} |\mathbf{t}|^{2(s+1)} e^{-\bar{Q}(t)} d\mathbf{t} = o(n^{-s+2}). \tag{18}$$

При оценке Y_2 надо заметить (см. лемму 5), что

$$\left| 1 + \sum_{j=1}^{s-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j \bar{P}_j(i\mathbf{t}) \right| \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{s-1} \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^j \left(\frac{\bar{\beta}_{s+1}(\mathbf{t})}{\bar{Q}(\mathbf{t})}\right)^{\frac{j}{s-1}} \sum_{\nu=1}^{j} \frac{[\bar{Q}(\mathbf{t})]^\nu}{4^\nu \nu!} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{8^s \bar{\beta}_{s+1}(\mathbf{t}) e^{\frac{\bar{Q}(\mathbf{t})}{4}}}{n^{\frac{s-1}{2}}}$$

в случае $\left[\frac{\bar{\beta}_{s+1}(\mathbf{t})}{\bar{Q}(\mathbf{t})}\right]^{\frac{1}{s-1}} > \frac{\sqrt{n}}{8}$. После несложных вычислений получаем

$$Y_2 = o(n^{-s+2}). \tag{19}$$

Теперь оценим интеграл Y_3. Пусть $D_1 = \left\{\mathbf{t} : \frac{\bar{\beta}_3(\mathbf{t})}{\bar{Q}(\mathbf{t})} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{4}\right\}$ Так как случайный вектор ξ_1 имеет конечные моменты порядка $s \geqslant 3$, то существует постоянная $C_1 > 0$, такая, что $\{\mathbf{t} : |\mathbf{t}| \leqslant C_1\sqrt{n}\} \subset D_1$. Очевидно

$$Y_3 \leqslant \int\limits_{D_1/D_0} \left| f_{\eta_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^{2n} e^{-\varepsilon^2 \bar{Q}(\mathbf{t})} d\mathbf{t} + \int\limits_{R_k/D_1} \left| f_{\eta_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^{2n} e^{-\varepsilon^2 \bar{Q}(\mathbf{t})} d\mathbf{t} =$$

$$= \int\limits_{|\mathbf{t}| > C_1\sqrt{n}} \left| f_{\eta_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^{2n} e^{-\varepsilon^2 \bar{Q}(\mathbf{t})} d\mathbf{t} + o(n^{-s+2}). \tag{20}$$

Далее, по определению η_1, имеем

$$f_{\eta_1}(\mathbf{t}) = \int\limits_{|\mathbf{x}| \leqslant \sqrt{n}} e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})} dF_{\xi_1}(\mathbf{x}) + P\{|\xi_1| > \sqrt{n}\} =$$

$$= f_{\xi_1}(\mathbf{t}) + P\{|\xi_1| > \sqrt{n}\} - \int\limits_{|\mathbf{x}| > \sqrt{n}} e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})} dF_{\xi_1}(\mathbf{x}).$$

При выполнении условий (C) существует константа $C_1 > 0$, такая, что

$$|f_{\xi_1}(\mathbf{t})| \leqslant e^{-c}$$

для всех $|\mathbf{t}| \geqslant C_1 > 0$. Следовательно, если $|\mathbf{t}| \geqslant C_1$, то

$$|f_{\eta_1}(\mathbf{t})| \geqslant e^{-c} + \frac{2M|\xi_1|^2}{n}.$$

Теперь немедленно получаем

$$\int\limits_{|\mathbf{t}| > C_1\sqrt{n}} \left| f_{\eta_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^{2n} e^{-\varepsilon^2 \bar{Q}(\mathbf{t})} d\mathbf{t} \leqslant n^{\frac{k}{2}} \int\limits_{C_1 \leqslant |\mathbf{t}| \leqslant n^S} \left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{2e^c M|\xi_1|^2}{n}\right)^{2n} e^{-2cn} d\mathbf{t} + n^{\frac{k}{2}} \int\limits_{|\mathbf{t}| > n^S} e^{-\frac{\delta^2(n)\bar{Q}(\mathbf{t})}{n^{S-2}}} d\mathbf{t} = o(n^{-s+2}). \tag{21}$$

Из (17–21) следует

$$I = o(n^{-s+2}). \tag{22}$$

Обратимся к интегралу I_m. Имеем

$$Y_m \leqslant Y_{1m} + Y_{2m} + Y_{3m} + Y_{4m}, \tag{23}$$

где

$$Y_{1m} = \frac{2}{(2\pi)^k} \int\limits_{D_m} \left| \frac{\partial^{s+k}}{\partial t_m^{s+k}} \left\{ \left[e^{-i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M \eta_1)} f_{\eta_1}^n \left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}} \right) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - e^{-\frac{\bar{Q}(\mathbf{t})}{2}} \left(1 + \sum_{j=1}^{s+k-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^j \bar{P}_j(i\mathbf{t}) \right) \right] e^{-\frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})} \right\} \right|^2 d\mathbf{t},$$

$$Y_{2m} = \frac{2}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k} \left| \frac{\partial^{s+k}}{\partial t_m^{s+k}} \left[e^{-\frac{1+\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})} \sum_{j=s}^{s+k-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^j \bar{P}_j(i\mathbf{t}) \right] \right|^2 d\mathbf{t},$$

$$Y_{3m} = \frac{2}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k \setminus D_m} \left| \frac{\partial^{s+k}}{\partial t_m^{s+k}} \left[e^{-\frac{1+\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})} \left(1 + \sum_{j=1}^{s-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^j \bar{P}_j(i\mathbf{t}) \right) \right] \right|^2 d\mathbf{t},$$

$$Y_{4m} = \frac{2}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k \setminus D_m} \left| \frac{\partial^{s+k}}{\partial t_m^{s+k}} \left[f_{\eta_1}^n \left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}} \right) \exp\left\{ -i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M\eta_1) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{\varepsilon^2 Q(\mathbf{t})}{2} \right\} \right] \right|^2 d\mathbf{t}$$

и $D_m = \left\{ \mathbf{t} : |\mathbf{t}| \leqslant \frac{\Delta \sqrt{n}}{16 e k^k} \bar{\beta}_{s+k}^{-\frac{1}{s+k-2}} \right\}$.

С помощью лемм 1, 2, 5 и 8, а также соотношений (12) и (13), после очевидных вычислений получаем

$$Y_{1m} = Y_{2m} = Y_{3m} = o(n^{-s+2}). \tag{24}$$

Менее наглядна оценка интеграла Y_{4m}. Имеем

$$\frac{\partial^{s+k}}{\partial t_m^{s+k}} \left[f_{\eta_1}^n \left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}} \right) \exp\left\{ -i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M\eta_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t}) \right\} \right] =$$

$$= \sum_{r=0}^{s+k} \binom{s+k}{r} \frac{\partial^r f_{\eta_1}^n \left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}} \right)}{\partial t_m^r} \frac{\partial^{s+k-r} e^{-i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M\eta_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})}}{\partial t_m^{s+k-r}}. \tag{25}$$

В силу леммы 2

$$\frac{\partial^{s+k-r} e^{-i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M\eta_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})}}{\partial t_m^{s+k-r}} = e^{-i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M\eta_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial^{s+k-r}}{\partial t_m^{s+k-r}} \left[-i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M\eta_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t}) \right] + \sum_{l=1}^{s+k-r-1} \sum_{j_l=l}^{s+k-r-1} \sum_{j_{l-1}=l-1}^{j_l-1} \right.$$

$$\ldots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{(s+k-r-1)!}{j_l j_{l-1} \ldots j_2 j_1 (s+k-r-j_l-1)! (j_l - j_{l-1} - 1)! \ldots (j_2 - j_1 - 1)! (j_1 - 1)!} \times$$

$$\times \frac{\partial^{s+k-r-j_l} [-i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M\eta_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})]}{\partial t_m^{s+k-r-j_l}} \cdot \frac{\partial^{j_l - j_{l-1}} [-i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M\eta_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})]}{\partial t_m^{j_l - j_{l-1}}} \ldots$$

$$\ldots \frac{\partial^{j_2 - j_1} [-i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M\eta_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})]}{\partial t_m^{j_2 - j_1}} \cdot \frac{\partial^{j_1} [-i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M\eta_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_1}}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\left| \frac{\partial^{s+k-r} e^{-i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M\eta_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})}}{\partial t_m^{s+k-r}} \right| \leqslant C_2 e^{-\frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})} \sum_{j=0}^{s+k-r-1} |\mathbf{t}|^j. \tag{26}$$

Используя соотношения (12–13) и утверждение леммы 3 для характеристической функции $f_{\eta_1}^n \left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)$ получаем

$$\left| \frac{\partial^{s+k}}{\partial t_m^{s+k}} f_{\eta_1}^n \left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right| \leqslant \sum_{r_0=1}^{s+k} \left| f_{\eta_1} \left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-r_0} \frac{C_3 n^{s+k}}{n^{\frac{r_0}{2}}} n^{-\frac{sr_0-s-k}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left| f_{\eta_1} \left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-(s+k)} C_4 n^{s+2k}. \tag{27}$$

Из (25–27) следует

$$\left| \frac{\partial^{s+k}}{\partial t_m^{s+k}} \left[f_{\eta_1}^n \left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \exp \left\{ -i(\mathbf{t}, \sqrt{n} M\eta_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t}) \right\} \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_3 n^{s+2k} \left| f_{\eta_1} \left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-(s+k)} \sum_{j=0}^{s+k-1} |\mathbf{t}|^j e^{-\frac{\varepsilon^2}{2} \bar{Q}(\mathbf{t})}$$

Аналогично полученной оценке интеграла Y_3,

$$Y_{4m} \leqslant C_4 n^{2s+4k} \sum_{j=0}^{s+k-1} \int\limits_{R_k \setminus D_m} |\mathbf{t}|^{2j} \left| f_{\eta_1} \left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^{2(n-(s+k))} e^{-\varepsilon^2 \bar{Q}(\mathbf{t})} d\mathbf{t} = o(n^{-s+2}).$$

Отсюда и (23–24) вытекает

$$I_m = o(n^{-s+2}). \tag{28}$$

Пользуясь равенствами (12–13) нетрудно показать, что для всех $\mathbf{x} \in R_k$ имеет место равенство

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{s-1} P_{s-1}(-\bar{\Phi})(\mathbf{x}) * \bar{\Phi}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = o(n^{-\frac{s-2}{2}}). \tag{29}$$

В силу (15), (16), (22), (28) и (29)

$$\left[F_{Z_n}(\mathbf{x}) - \bar{\Phi}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{s-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(-\bar{\Phi})(\mathbf{x}) \right] * \bar{\Phi}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = o(n^{-\frac{s-2}{2}}). \tag{30}$$

Утверждение теоремы 2′ немедленно вытекает из леммы 9 и соотношений (12) и (30).

Теорема 3′. *При выполнении условий теоремы* 3 *равномерно по* $A \in \mathfrak{D}$

$$P_{Z_n}(A) = \int\limits_A d\bar{\Phi}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{s-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j \int\limits_A dP_j(-\bar{\Phi})(\mathbf{x}) + o(n^{-\frac{s-2}{2}}).$$

Доказательство теоремы 3′. Так как случайный вектор ξ_1 имеет абсолютно непрерывную компоненту (см. равенство (5)), то его вероятностную функцию можем представить в виде

$$P_{\xi_1}(A) = pH_1(A) + qH_2(A), \tag{31}$$

где

$$p = \int_{R_k} \bar{p}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \quad H_1(A) = \frac{1}{p} \int_A p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

$$\bar{p}(\mathbf{x}) = \begin{cases} p(\mathbf{x}), & \text{если } \mathbf{x} \in B = \{\mathbf{x} : c \leqslant p(\mathbf{x}) \leqslant C\}, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \,\overline{\in}\, B \end{cases}$$

$q = 1 - p$ и $H_2(A)$ — вероятностная функция. c и C выбраны так, чтобы лебеговская мера множества B была положительной и $0 < p < 1$.

Для „усеченных“ случайных векторов справедлива

Лемма 11. *При* $n > \frac{2M|\xi_1|^2}{p}$

$$P_{\eta_1}(A) = p_n Q_1(A) + (1 - p_n) Q_2(A).$$

Здесь $Q_1(A)$ *и* $Q_2(A)$ *— вероятностные функции,*

$$p_n = \int_{R_k} p_n(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \geqslant \frac{p}{2}, \quad Q_1(A) = \frac{1}{p_n} \int_A p_n(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

$$p_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} \bar{p}(\mathbf{x}), & \text{если } |\mathbf{x}| \leqslant \sqrt{n}, \\ 0, & \text{если } |\mathbf{x}| > \sqrt{n}, \end{cases}$$

причем характеристическая функция

$$q_1(\mathbf{t}) = \int_{R_k} e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})}\,dQ_1,$$

интегрируемая в квадрате

$$\int_{R_k} |q_1(\mathbf{t})|^2\,d\mathbf{t} \leqslant \frac{2C(2\pi)^k}{p} < \infty \tag{32}$$

и для всех $\mathbf{t}$

$$|q_1(\mathbf{t})| \leqslant \frac{p}{p_n}\left(\frac{M|\xi_1|^2}{n} + |h_1(\mathbf{t})|\right), \tag{33}$$

где $h_1(\mathbf{t})$ *— характеристическая функция, соответствующая вероятностной функции* $H_1(A)$.

Доказательство леммы 11. По определению η_1 и $p_n(\mathbf{x})$, а также (31), имеем

$$P_{\eta_1}(A) = \int_A p_n(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + (1 - p_n) Q_2(A).$$

Далее при $n > \frac{2M|\xi_1|^2}{p}$

$$p_n = \int_{R_k} p_n(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{R_k} \bar{p}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \int_{|\mathbf{x}| > \sqrt{n}} \bar{p}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \geqslant p - \int_{|>\sqrt{n}} dP_{\xi_1} \geqslant$$

$$\geqslant p - \frac{M|\xi_1|^2}{n} > \frac{p}{2}. \tag{34}$$

В силу равенства Парсеваля интеграл

$$\int_{R_k} |q_1(\mathbf{t})|^2\,d\mathbf{t} = (2\pi)^k \int_{R_k} \left(\frac{p_n(\mathbf{x})}{p_n}\right)^2 d\mathbf{x}$$

кончен и не больше $\frac{2C(2\pi)^k}{p}$.

Име ем

$$q_1(\mathbf{t})=\frac{1}{p_n}\int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant\sqrt{n}} e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})}\bar p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=\frac{1}{p_n}\int\limits_{R_k} e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})}\bar p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}-$$

$$-\frac{1}{p_n}\int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}} e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})}\bar p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=\frac{p}{p_n}h_1(\mathbf{t})-\frac{1}{p_n}\int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}} e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})}\bar p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Отсюда немедленно получаем неравенство (33). Лемма 11 доказана.

По скольку

$$P_{Z_n}(A)=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}p_n^j q_n^{n-j}[Q_1(A\sqrt{n}+M\eta_1)]^{*j}*[Q_2(A\sqrt{n}+M\eta_1)]^{*(n-j)},$$

где $q_n=1-p_n$, множество $A\sqrt{n}+M\eta_1=\{\mathbf{x}\sqrt{n}+M\eta_1:\mathbf{x}\in A\}$, символ $[\ldots]^{*l}$ обозначает l-кратную свертку указанных в скобках функций, $[Q_1(A)]^{*n}=[Q_1(A)]^{*n}*[Q_2(A)]^{*0}$ и $[(Q_2(A)]^{*n}=[Q_1(A)]^{*0}*[Q_2(A)]^{*n}$, то

$$\sup_{A\in\mathfrak{D}}\left|P_{Z_n}(A)-\sum_{j=0}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\int\limits_A dP_j(-\bar\Phi)(\mathbf{x})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{A\in\mathfrak{D}}\left|\sum{}'\binom{n}{j}p_n^j q_n^{n-j}[Q_1(A\sqrt{n}+M\eta_1)]^{*j}*[Q_2(A\sqrt{n}+M\eta_1)]^{*(n-j)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\int\limits_A dP_j(-\bar\Phi)(\mathbf{x})\right|+\sum{}''\binom{n}{j}p_n^j q_n^{n-j}$$

Здесь $\sum' = \sum\limits_{|j-np_n|<\sqrt{n}\ln n}$ и $\sum'' = \sum\limits_{|j-np_n|\geqslant\sqrt{n}\ln n}$

Для больших n $\frac{p}{2}<p_n\leqslant p$, следовательно, по лемме 10

$$\sum{}''\binom{n}{j}p_n^j q_n^{n-j}=o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right).$$

При $j\geqslant1$ вероятностная функция $[Q_1(A\sqrt{n}+M\eta_1)]^{*j}*[Q_2(A\sqrt{n}+M\eta_1)]^{*(n-j)}$ абсолютно непрерывна с плотностью $g_j(\mathbf{x})$.

Нетрудно заметить, что

$$\sup_{A\in\mathfrak{D}}\left|\sum{}'\binom{n}{j}p_n^j q_n^{n-j}[Q_1(A\sqrt{n}+M\eta_1)]^{*j}*[Q_2(A\sqrt{n}+M\eta_1)]^{*(n-j)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\int\limits_A dP_j(-\bar\Phi)(\mathbf{x})\right|\leqslant2\int\limits_{R_k}\left|\sum{}'\binom{n}{j}p_n^j q_n^{n-j}g_j(\mathbf{x})-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(-\bar\varphi)(\mathbf{x})\right|d\mathbf{x}=I. \tag{35}$$

Далее, при помощи обобщенного неравенства Гельдера получаем

$$I\leqslant\prod_{l=1}^{k}\left\{\int\limits_{R_k}(1+|x_l|^{2(s+k)})\left|\sum{}'\binom{n}{j}p_n^j q_n^{n-j}g_j(\mathbf{x})-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{j=0}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(-\bar\varphi)(\mathbf{x})\right|^2 d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{2k}}\left\{\int\limits_{R_k}\prod_{l=1}^{k}(1+|x_l|^{2(k+s)})^{-\frac{1}{k}}d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

Положим

$$Y=\int_{R_k}\Big|\sum{}'\binom{n}{j}p_n^j q_n^{n-j}g_j(\mathbf{x})-\sum_{j=0}^{s-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^j P_j(-\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x})\Big|^2 d\mathbf{x},$$

$$Y'=\int_{R_k}|x_l|^{2(s+k)}\Big|\sum{}'\binom{n}{j}p_n^j g_n^{n-j}q_j(\mathbf{x})-\sum_{j=0}^{s-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^j P_j(-\bar{\boldsymbol{\varphi}})(\mathbf{x})\Big|^2 d\mathbf{x}.$$

Пользуясь равенством Парсеваля можем записать

$$Y=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k}\Big|v_n(\mathbf{t})-\sum_{j=0}^{s-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^j(\bar{P}_j i\mathbf{t})e^{-\frac{1}{2}\bar{Q}(\mathbf{t})}\Big|^2 d\mathbf{t}$$

и

$$Y'=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k}\Big|\frac{\partial^{s+k}}{\partial t_l^{s+k}}\Big[v_n(\mathbf{t})-\sum_{j=0}^{s-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^j\bar{P}_j(i\mathbf{t})e^{-\frac{1}{2}\bar{Q}(\mathbf{t})}\Big]\Big|^2 d\mathbf{t}.$$

Здесь

$$v_n(\mathbf{t})=\sum{}'\binom{n}{j}p_n^j q_n^{n-j}q_1^j\Big(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\Big)q_2^{n-j}\Big(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\Big)e^{-i(\mathbf{t},\,nM\eta_1)},$$

$q_1(\mathbf{t})$ и $q_2(\mathbf{t})$ — характеристические функции $Q_1(A)$ и $Q_2(A)$.

Очевидно

$$\int_{R_k}\Big|\frac{\partial^m}{\partial t_l^m}\Big[v_n(\mathbf{t})-\sum_{j=0}^{s-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^j\bar{P}_j(i\mathbf{t})e^{-\frac{1}{2}\bar{Q}(\mathbf{t})}\Big]\Big|^2 d\mathbf{t}\leqslant$$

$$\leqslant Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_5+Y_6,$$

где $m=0$ или $s+k$,

$$Y_1=\int_{D_m}\Big|\frac{\partial^m}{\partial t_l^m}\Big[f_{Z_n}(\mathbf{t})-\sum_{j=0}^{s+k}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^j\bar{P}_{\cdot}(i\mathbf{t})e^{-\frac{1}{2}\bar{Q}(\mathbf{t})}\Big]\Big|^2 d\mathbf{t},$$

$$Y_2=\int_{D_1\setminus D_m}\Big|\frac{\partial^m}{\partial t_l^m}f_{Z_n}(\mathbf{t})\Big|^2 d\mathbf{t},$$

$$Y_3=\int_{D_k\setminus D_1}\Big|\frac{\partial^m}{\partial t_l^m}v_n(\mathbf{t})\Big|^2 d\mathbf{t},$$

$$Y_4=\int_{D_m}\Big|\frac{\partial^m}{\partial t_l^m}\sum{}''\binom{n}{j}p_n^j q_n^{n-j}q_1^j\Big(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\Big)q_2^{n-j}\Big(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\Big)e^{-i(\mathbf{t},\,\sqrt{n}M\eta_1)}\Big|^2 d\mathbf{t},$$

$$Y_5=\int_{R_k\setminus D_m}\Big|\frac{\partial^m}{\partial t_l^m}\sum_{j=0}^{s-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^j\bar{P}_j(i\mathbf{t})e^{-\frac{1}{2}\bar{Q}(\mathbf{t})}\Big|^2 d\mathbf{t},$$

$$Y_6=\int_{D_m}\Big|\frac{\partial^m}{\partial t_l^m}\sum_{j=s}^{s+k}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^j\bar{P}_j(i\mathbf{t})e^{-\frac{1}{2}\bar{Q}(\mathbf{t})}\Big|^2 d\mathbf{t},$$

$$D_1=\Big\{\mathbf{t}:\frac{\bar{\beta}_3(\mathbf{t})}{\bar{Q}(\mathbf{t})}\leqslant\frac{\sqrt{n}}{4}\Big\}\ \text{и}\ D_m=\Big\{\mathbf{t}:|\mathbf{t}|\leqslant\frac{\bar{\Delta}\sqrt{n}}{16ek^k}\bar{\beta}_{s+k}^{-\frac{1}{s+k-2}}\Big\}.$$

При доказательстве теоремы 2' было показано, что

$$Y_1 = Y_2 = Y_5 = Y_6 = o\,(n^{-s+2}).$$

При этом, в силу леммы 10 $Y_4 = o\,(n^{-s+2})$.

Лемма 3 дает

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial t_l^m} v_n(\mathbf{t}) \right| \leqslant Cn^{\frac{k}{2}} \left| q_1\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^{np-\sqrt{n}\ln n - m}.$$

Вероятностная функция случайного вектора ξ_1 имеет абсолютно непрерывную компоненту, следовательно, для всех $|\mathbf{t}| \geqslant \delta > 0$ существует положительная константа $c = c\,(\delta)$ такая, что

$$|f_{\xi_1}(\mathbf{t})| \leqslant e^{-c}.$$

Поэтому из неравенства (33) и (34) вытекает

$$|q_1(\mathbf{t})| \leqslant \frac{e^{-c}}{1 - \dfrac{M|\xi_1|^2}{np}} \left(1 + \frac{e^c M|\xi_1|^2}{n}\right).$$

Отсюда и утверждения леммы 11 следует

$$Y_3 = o\,(n^{-s+2}).$$

Получили

$$Y = Y_1 = o(n^{-s+2}).$$

Нетрудно заметить, что

$$\sup_{A \in \mathfrak{D}} \left| \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{s-1} \int_A dP_{s-1}(-\Phi)(\mathbf{x}) \right| = o\,(n^{-\frac{s-2}{2}}).$$

Из (34), (35) и двух последних равенств вытекает утверждение тоеремы 3'

Лемма 12

$$\sup_{A \in \mathfrak{D}} \left| \sum_{j=0}^{s-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j \int_A d[P_j(-\bar{\Phi})(\mathbf{x}) - P_j(-\bar{\Phi})(\mathbf{x} - \sqrt{n}\,M\eta_1)] \right| = o\,(n^{-\frac{s-2}{2}}).$$

Доказательство леммы 12. Имеем

$$\sup_{A \in \mathfrak{D}} \left| \sum_{j=0}^{s-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j \int_A d[P_j(-\Phi)(\mathbf{x}) - P_j(-\bar{\Phi})(\mathbf{x} - \sqrt{n}\,M\eta_1)] \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{R_k} \left| \sum_{j=0}^{s-2} [P_j(-\varphi)(\mathbf{x}) - P_j(-\bar{\varphi})(\mathbf{x} - \sqrt{n}\,M\eta_1)] \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j \right| d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{k} \left\{ \int_{R_k} (1 + |x_m|^{2(s+k)}) \left| \sum_{j=0}^{s-2} [P_j(-\varphi)(\mathbf{x}) - P_j(-\bar{\varphi})(\mathbf{x} - \sqrt{n}\,M\eta_1)] \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j \right|^2 d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{2k}} \left\{ \int_{R_k} \prod_{l=1}^{k} (1 + |x_l|^{2(s+k)})^{-\frac{1}{k}} d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Далее, по многомерному равенству Парсеваля

$$\int_{R_k} (1+|x_m|^{2(s+k)}) \left| \sum_{j=0}^{s-2} [P_j(-\varphi)(\mathbf{x}) - P_j(-\bar{\varphi})(\mathbf{x}-\sqrt{n}\,M\eta_1)] \right|^2 d\mathbf{x} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{R_k} \left| \sum_{j=0}^{s-2} [P_j(i\mathbf{t})\, e^{-\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})} - \bar{P}_j(i\mathbf{t})\, e^{-\frac{1}{2}\bar{Q}(\mathbf{t})+i(\mathbf{t},\sqrt{n}\,M\eta_1)}] \right|^2 d\mathbf{t} +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{R_k} \left| \frac{\partial^{s+k}}{\partial t_m^{s+k}} \sum_{j=0}^{s-2} [P_j(i\mathbf{t})\, e^{-\frac{1}{2}Q(\mathbf{t})} - \bar{P}_j(i\mathbf{t})\, e^{-\frac{1}{2}\bar{Q}(\mathbf{t})+i(\mathbf{t},\sqrt{n}\,M\eta_1)}] \right|^2 d\mathbf{t}.$$

Из (12), (13), (37) и (38) следует утверждение леммы 12.

Утверждения теорем 2 и 3 немедленно вытекает из неравенства

$$|P\{\mathbf{S}_n \in A\} - P\{\mathbf{Z}_n \in A - \sqrt{n}\,M\eta_1\}| \leqslant nP\{|\xi_1| > \sqrt{n}\},$$

леммы 12 и теорем 2′ и 3′.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность проф. И. Кубилюсу за постановку задачи и ценные советы.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 7.X.1967

Литература

1. А. Бикялис, О многомерных характеристических функциях, Лит. сб., VIII, 1 (1968).
2. В. А. Статулявичус, Исследования по предельным теоремам теории вероятностей, докторская дисс., Вильнюс, 1967.
3. Х. Хекендорф, Многомерная локальная предельная теорема для плотностей, Украин. матем. журнал, т. **XVI**, № 3 (1964), 265–373.
4. R. Ranga Rao, On The central limit theorem in R_k, Bull. Amer. Math. Soc., 67 (1961), 359–361.
5. А. Бикялис, Об уточнении остаточного члена в многомерных глобальных теорем Лит. мат. сб., **IV**, 2 (1964), 159–163.
6. М. Маматов, М. К. Халиков, О глобальных предельных теоремах для плотностей в многомерном случае, Изв. АН УзССР, сер. ф.-мат. н., № 1 (1964), 13–20.
7. В. В. Петров, О локальных передельных теорем для сумм независимых случайных величин, Теор. вер. и ее прим., т. **IX** (1964), 343–352.
8. H. Bersgstrom, On the central limit theorem in R_k, $k>1$, Skand. Aktuartiedskr., 28 (1945), 106–127.
9. С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений, т. **IV**, Изд. „Наука", 1964.
10. S. Bochner, K. Chandarsekharan, Forier transforms, Princeton.
11. Г. Г. Харди, Д. Е. Литлвуд и Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, 1948.

NEPRIKLAUSOMŲ VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ ATSITIKTINIŲ VEKTORIŲ SUMŲ TANKIŲ IR PASISKIRSTYMO FUNKCIJŲ ASIMPTOTINIAI IŠDĖSTYMAI

A. Bikelis

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių k-mačių atsitiktinių vektorių $\xi_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ sumos

$$\mathbf{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j$$

tankio funkcijos $p_{\mathbf{S}_n}(\mathbf{x})$, pasiskirstymo funkcijos $F_{\mathbf{S}_n}(\mathbf{x})$ ir tikimybinės funkcijos $P_{\mathbf{S}_n}(A)$ asimptotinio išdėstymo liekamasis narys.

THE ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF THE DISTRIBUTION FUNCTION AND OF DENSITY FUNCTION FOR THE SUMS OF INDEPENDENT IDENTICALLY DISTRIBUTED RANDOM VECTORS

A. BIKELIS

(*Summary*)

Let

$$\mathbf{S}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$$

be a sum of independent identically distributed k-dimensional random vectors $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$.

In this paper are considered the remainder terms of asymptotic expansions of the density function $p_{\mathbf{S}_n}(\mathbf{x})$ and of the distribution function $F_{\mathbf{S}_n}(\mathbf{x})$ for the sum $\mathbf{S}_n$. Moreover it is given the rate of convergence of the probability function $P_{\mathbf{S}_n}(A)$ of the standardized sum $\mathbf{S}_n$ to a probability function $\Phi(A)$ with a k-dimensional normal law.