1968

УДК–512.25+519.3:30.115

ДИХОТОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ. I

В. Б. БИСТРИЦКАС

Пусть функция $f(x, y)$ уровлетворяет функциональному уравнению

$$f(x, y)=\max \begin{Bmatrix} A & p_1 [A (x)+f(r_1x, y)], \\ B: & p_2 [B (y)+f(x, r_2y)], \end{Bmatrix} \tag{1}$$

где $0<p_1,p_2,\ r_1,\ r_2<1$; $0\leqslant x\leqslant \bar{X}<\infty$; $0\leqslant y\leqslant \bar{Y}<\infty$; $A(x)$ и $B(y)$ – непрерывные строго выпуклые функции в соответствующих интервалах $[0, \bar{X}]$ и $[0, \bar{Y}]$. Теорема существования и единственности для данного процесса доказана Р. Беллманом (см. [1], стр. 147). Мы определим области решения процесса $f(x, y)$, когда хотя бы одна из функций, либо $A(x)$, либо $B(y)$, не является монотонной. Другие случаи рассмотрены автором ранее [2] в следствиях теорем 1, 2 и 3. Все это проделаем в объеме трех частей, последние два из которых будут опубликованы в статьях под тем же самым заглавием.

В первой части рассматривается существование и некоторые свойства граничных кривых областей решения для функции $f(x, y)$.

Вторая часть посвящена исследованию структуры оптимального поведения для решения уравнения (1).

В третьей части устанавливаются области решения процесса $f(x, y)$. Так как полученные границы областей решения состоят из нескольких кривых, то доказывается теорема, которая упрощает выражение оптимального поведения дихотомического процесса и поддается обобщению для политомического процесса.

Введем обозначения:

$$\alpha(x)=p_1\sum_{i=0}^{\infty} p_1^i A(r_1^i x),$$

$$\beta(y)=p_2\sum_{i=0}^{\infty} p_2^i B(r_2^i y),$$

$$\alpha(x_1)=\min_{0\leqslant x\leqslant \bar{X}} \alpha(x),$$

$$\beta(y_1)=\min_{0\leqslant y\leqslant \bar{Y}} \beta(y),$$

$$A(x_0)=\min_{0\leqslant x\leqslant \bar{X}} A(x),$$

$$B(y_0)=\min_{0\leqslant y\leqslant \bar{Y}} B(y),$$

где $0<\overline{X}$, $\overline{Y}<\infty$. Единственность и существование точек x_1, y_1, x_0 и y_0 следует из строгой выпуклости функций $\alpha(x)$, $\beta(y)$, $A(x)$ и $B(y)$. Строгая випуклость, например, функции $\alpha(x)$ может быть доказана так: по определению

$$\alpha(x)=p_1 A(x)+p_1 \sum_{i=0}^{\infty} p_1^i A(r_1^i x)=p_1 A(x)+\alpha_1(x)$$

и $\alpha_1(x)$, как предел последовательности равномерно сходящихся строго выпуклых функций, – выпуклая функция. Тогда функция $\alpha(x)$, как сумма выпуклой и строго выпуклой функции, является строго выпуклой (см. [3], стр. 59).

В этой статье исследуются существование и свойства решений следующих уравнений:

$$\alpha(x)=\beta(y), \tag{2}$$

$$p_2 B(y)=(1-p_2)\alpha(x), \tag{3}$$

$$(1-p_1)\beta(y)=p_1 A(x) \tag{4}$$

и

$$p_1(1-p_2)A(x)=p_2(1-p_1)B(y), \tag{5}$$

ибо именно они являются граничными кривыми областей решения.

Вопрос существования решений этих уравнений решаеться при помощи теоремы о существовании неявной функции (см., напр., [4], стр. 449).

Обозначим $f_s(x, y)$ процесс с фиксированным поведением S на первых шагах, а затем имеющий оптимальное продолжение, где S соотвествует последовательность выборов, символически представимых в виде

$$S=A^{a_1}B^{b_1}A^{a_2}B^{b_2}, \qquad A^{a_n}B^{b_n},$$

a_i, b_i – целые неотрицательные числа.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha(x_1)\geqslant\beta(y_1)$. *Тогда*

1) *из* $\beta(0)\geqslant\alpha(x_1)$ *следует существование такой однозначной непрерывной функции* $y=\varphi(x)$, $0\leqslant\varphi(x)\leqslant y_1$, что

$$\alpha(x)=\beta(\varphi(x)) \tag{6}$$

в интервале $[x_\varphi, \bar{x}_\varphi]$, *и функция* $\varphi(x)$, *удовлетворяющая соотношению* (6), *не существует вне этого интервала. Функция* $\varphi(x)$ *монотонно возрастает в интервале* (x_φ, x_1) *и монотонно убывает в интервале* $(x_1, \bar{x}_\varphi)$, *где*

$$x_\varphi=\min\{x: 0\leqslant x\leqslant x_1,\ \alpha(x)\leqslant\beta(0)\}, \tag{7}$$

$$\bar{x}_\varphi=\max\{x: x_1\leqslant x\leqslant\overline{X},\ \alpha(x)\leqslant\beta(0)\}; \tag{8}$$

2) *если* $\beta(0)<\alpha(x_1)$, *то уравнение* (2) *не имеет решения в интервале* $[0, y_1]$ *при любом фиксированном* $x\in[0, \overline{X}]$;

3) *в области* $[0, \overline{X}]$ x $[0, y_1]$ *выполняются следующие соотношения*

$$\alpha(x)\geqslant\beta(y) \rightleftarrows \varphi^*(x)\leqslant y\leqslant y_1 \tag{9}$$

$$\alpha(x)<\beta(y) \rightleftarrows 0\leqslant y<\varphi^*(x), \tag{10}$$

причем

$$\alpha(x)=\beta(y) \rightleftarrows \exists\ \varphi(x) \text{ и } y=\varphi(x). \tag{11}$$

Соотношения (9), (10) *и* (11) *эквивалентны следующим*

$$f_{A^\infty}(x, y) \geqslant f_{B^\infty}(x, y) \rightleftarrows \varphi^*(x) \leqslant y \leqslant y_1 \tag{9'}$$

$$f_{A^\infty}(x, y) < f_{B^\infty}(x, y) \rightleftarrows 0 \leqslant y < \varphi^*(x), \tag{10'}$$

причем

$$f_{A^\infty}(x, y) = f_{B^\infty}(x, y) \rightleftarrows \exists\ \varphi(x) \text{ и } y=\varphi(x), \tag{11'}$$

где непрерывная функция $\varphi^*(x)$ *определена соотношением*

$$\varphi^*(x)=\begin{cases} \varphi(x), \text{ когда } \exists\ \varphi(x) \text{ в точке } x, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. В силу выпуклости функций $\alpha(x)$ и $\beta(y)$, определения x_1 и y_1, а также условия $\alpha(x_1) \geqslant \beta(y_1)$ верны соотношения

$$\max_{y \in [0, y_1]} \beta(y) = \beta(0)$$

$$\alpha(x) \geqslant \beta(y_1) \tag{13}$$

для всех $x \in [0, \bar{X}]$. Если для некоторого $x^0 \in [0, \bar{X}]$ выполняется неравенство $\beta(0) \geqslant \alpha(x^0)$, то в силу (13) из непрерывности и монотонности функции $\beta(y)$ в интервале $(0, y_1)$ следует существование единственной точки $y_0 \in [0, y_1]$, для которой

$$\alpha(x^0) = \beta(y^0).$$

Так как функция $\alpha(x)$ монотонно убывает в интервале $(0, x_1)$ и монотонно возрастает в интервале $(x_1, \bar{X}]$, то по определению величин x_φ и $\bar{x}_\varphi$ для любого $x \in [x_\varphi, \bar{x}_\varphi]$ найдется такое y, что

$$\alpha(x) = \beta(y). \tag{14}$$

Если $\beta(0) < \alpha(x')$ при $x' \in [0, \bar{X}]$, то в силу монотонного убывания функции $\beta(y)$ в интервале $(0, y_1)$

$$\beta(y) < \alpha(x') \text{ для всех } y \in [0, y_1].$$

Следовательно, при $x \in \{x \ \ \alpha(x) > \beta(0)\}$ уравнение (14) не имеет решения в интервале $[0, y_1]$. Из определения x_φ и $\bar{x}_\varphi$ непосредственно следует, что $\beta(0) < \alpha(x)$, когда x принадлежит хотя бы одному из интервалов $[0, x_\varphi)$ и $(\bar{x}_\varphi, \bar{X}]$.

Итак, функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая соотношению (6), однозначна и существует только в интервале $[x_\varphi, \bar{x}_\varphi]$ при условии 1). Такая функция $\varphi(x)$ не существует ни в одной точке интервала $[0, \bar{X}]$ при условии 2). Кроме того, по теореме о существовании неявной функции функция $\varphi(x)$ является непрерывной в интервале $[x_\varphi, \bar{x}_\varphi]$ (см. [4], стр. 449). Итак, на основании (12) получаем, что

$$\varphi^*(x)=\begin{cases} \varphi(x), \text{ когда } x_\varphi \leqslant x \leqslant \bar{x}_\varphi, \\ 0, \text{ когда } 0 \leqslant x \leqslant x_\varphi,\ \bar{x}_\varphi < x \leqslant \bar{X}, \end{cases} \tag{15}$$

при условии 1) и

$$\varphi^* (x)=0, \text{ когда } 0\leqslant x\leqslant \bar{X}, \tag{16}$$

при условии 2). Если $x_\varphi\neq 0$, то ввиду соотношения (7)

$$\alpha (x_\varphi)=\beta (0)$$

и, если $\bar{x}_\varphi\neq \bar{X}$, то согласно (8)

$$\alpha (\bar{x}_\varphi)=\beta (0).$$

Отсюда в силу соотношения (6) заключаем, что

$$\varphi (x_\varphi)=\varphi (\bar{x}_\varphi)=0 \text{ при } x_\varphi\neq 0,\ \bar{x}_\varphi\neq \bar{X}.$$

Поэтому из соотношений (15) и (16) следует непрерывность функции $\varphi^* (x)$ в интервале $[0, \bar{X}]$.

Далее исследуем поведение функции $\varphi (x)$. Так как ограниченные выпуклые на отрезке $[a, b]$ функции имеют конечные правую и левую производные внутри его (см. [3], стр. 60), то для исследования поведения функции $\varphi (x)$ будем рассматривать только односторонние производные функций $\alpha (x)$ и $\beta (y)$ соответственно в интервалах $(x_\varphi, \bar{x}_\varphi)$ и $(0, y_1)$.

Согласно теореме о дифференцируемости неявных функций (мы пропускаем обозначения, что производные односторонние)

$$\varphi' (x)=\frac{\alpha'_x(x)}{\beta'_y\left(\varphi (x)\right)}. \tag{17}$$

По определению x_1 следует, что $\alpha'_x (x)<0$ для $0\leqslant x\leqslant x_1$ и $\alpha'_x(x)\geqslant 0$ для $x_1<x\leqslant \bar{X}$. Так как $\beta'_y (\varphi (x))<0$ при $\varphi (x)<y_1$, то ввиду (17)

$$\begin{aligned} &\varphi' (x)>0, \text{ когда } x_\varphi\leqslant x\leqslant x_1,\\ &\varphi' (x)\leqslant 0, \text{ когда } x_1<x\leqslant \bar{x}_\varphi. \end{aligned} \tag{18}$$

В случае, когда $\varphi (x)=y_1$ из определения $\varphi (x)$ (см. соотн. (6))

$$\alpha (x)-\beta (y_1)=0. \tag{19}$$

В силу условия $\alpha (x_1)\geqslant \beta (y_1)$ и строгой выпуклости функции $\alpha (x)$ получаем, что

$$\alpha (x)>\beta (y_1) \text{ для всех } x\neq x_1.$$

Таким образом, равенство (19) возможно только при $x=x_1$. Следовательно, случай $\varphi (x)=y_1$ в соотношениях (18) исключен, и они верны без дополнительных ограничений. Утверждение леммы о функции $y=\varphi (x)$ доказано.

Перейдем к доказательству утверждения (9). Пусть

$$(x^\circ, y^\circ)\in[0, \bar{X}]\times [0, y_1]=E_1$$

$$\alpha (x^\circ)\geqslant \beta (y^\circ). \tag{20}$$

Если $\alpha (x^\circ)\leqslant \beta (0)$, то из рассуждений, проведенных выше (см. соотн. (14)), получаем, что $\exists\ \varphi (x)$ в точке x° и

$$\alpha (x^\circ)=\beta \left(\varphi (x^\circ)\right).$$

Так как функция $\beta(y)$ монотонно убывает в интервале $[0, y_1)$, то согласно последнему и (20) соотношениям

$$\varphi(x^\circ) \leqslant y^\circ \text{ или } \varphi^*(x^\circ) \leqslant y^\circ. \tag{21}$$

Если $\alpha(x^\circ) > \beta(0)$, то $\varphi(x)$ не существует в точке x°. Поэтому, ввиду (12),

$$\varphi^*(x^\circ) = 0 \leqslant y^\circ.$$

Отсюда и из (21) заключаем

$$\underset{(x,y)}{\exists}\{\alpha(x) \geqslant \beta(y) \text{ и } (x, y) \in E_1\} \supset \underset{(x,y)}{\exists}\{\varphi^*(x) \leqslant y \leqslant y_1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \bar{X}\}.$$

Аналогично доказывается обратное включение

$$\underset{(x,y)}{\exists}\{\alpha(x) \geqslant \beta(y) \text{ и } (x, y) \in E_1\} \subset \underset{(x,y)}{\exists}\{\varphi^*(x) \leqslant y \leqslant y_1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \bar{X}\}.$$

Последние два соотношения завершают доказательство (9).

Подставляя выражения $\alpha(x)$ и $\beta(y)$, получаем (9′). Аналогично соотношениям (9) и (9′) доказываются (10), (10′), (11) и (11′).

Также нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha(x_1) \geqslant \beta(y_1)$. *Тогда*:

1) *при* $\beta(\bar{Y}) \geqslant \alpha(x_1)$ *в интервале* $[x_{\bar{\varphi}}, \bar{x}_{\bar{\varphi}}]$ *существует такая однозначная непрерывная функция* $y = \bar{\varphi}(x)$, $y_1 \leqslant \bar{\varphi}(x) \leqslant \bar{Y}$, *что*

$$\alpha(x) = \beta\left(\varphi(x)\right) \tag{22}$$

а вне этого интервала такой функции нет.

Кроме того, функция $\bar{\varphi}(x)$ *монотонно убывает в интервале* $[x_{\bar{\varphi}}, x_1]$ *и монотонно возрастает в интервале* $(x_1, \bar{x}_{\bar{\varphi}}]$, *где*

$$x_{\bar{\varphi}} = \min\{x : 0 \leqslant x \leqslant x_1, \ \beta(\bar{Y}) \geqslant \alpha(x)\};$$

$$\bar{x}_{\bar{\varphi}} = \max\{x : x_1 \leqslant x \leqslant \bar{X}, \ \beta(\bar{Y}) \geqslant \alpha(x)\};$$

2) *если* $\beta(\bar{Y}) < \alpha(x_1)$, *то уравнение* (2) *не имеет решения* $y \in [y_1, \bar{Y}]$ *при фиксированном* $x \in [0, \bar{X}]$;

3) *в области* $[0, \bar{X}] \times [y_1, \bar{Y}]$ *имеют место соотношения*

$$f_{A^\infty}(x, y) \geqslant f_{B^\infty}(x, y) \rightleftarrows y_1 \leqslant y \leqslant \bar{\varphi}^*(x) \tag{23}$$

$$f_{A^\infty}(x, y) < f_{B^\infty}(x, y) \rightleftarrows \bar{\varphi}^*(x) < y \leqslant \bar{Y} \tag{24}$$

причем

$$f_{A^\infty}(x, y) = f_{B^\infty}(x, y) \rightleftarrows \exists\, \bar{\varphi}(x) \text{ и } y = \bar{\varphi}(x), \tag{25}$$

где непрерывная функция $\bar{\varphi}^*(x)$ *определена соотношением*

$$\bar{\varphi}^*(x) = \begin{cases} \bar{\varphi}(x), \text{ если } \exists\, \bar{\varphi}(x) \text{ в точке } x, \\ \bar{Y} \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{26}$$

Лемма 3. *Пусть* $\alpha(x_1) \geqslant \beta(y_1)$. *Тогда*:

1) *из* $p_2 B(\bar{Y}) \geqslant (1 - p_2)\alpha(x_1)$ *следует существование такой однозначной непрерывной функции* $y = \psi(x)$, $y_0 \leqslant \psi(x) \leqslant \bar{Y}$, *в интервале* $[x_\psi, \bar{x}_\psi]$, *что*

$$(1 - p_2)\alpha(x) = p_2 B\left(\psi(x)\right), \tag{27}$$

где

$$x_\psi=\min\{x : 0\leqslant x\leqslant x_1,\ p_2B(\bar{Y})\geqslant(1-p_2)\alpha(x)\},$$

$$\bar{x}_\psi=max\ \{x : x_1\leqslant x\leqslant \boldsymbol{X},\ p_2B(\boldsymbol{Y})\geqslant(1-p_2)\alpha(x)\}.$$

Кроме того, функция $\psi(x)$ *монотонно убывает для* $x<x_1$ *и монотонно иозрастает для* $x>x_1$;

2) *если* $p_2B(\bar{Y})<(1-p_2)\alpha(\bar{x}_1)$, *то уравнение* (3) *не имеет решения в нтервале* $(y_0,\ Y)$ *при* $x\in[0,\ \bar{X}]$;

3) *в области* $[0,\ \bar{X}]\times[y_0,\ \bar{Y}]$ *выполняются соотношения*

$$f_{BA^\infty}(x, y)\leqslant f_{A^\infty}(x, y)\rightleftarrows y_0\leqslant y\leqslant\psi^*(x) \tag{28}$$

и

$$f_{BA^\infty}(x, y)>f_{A^\infty}(x, y)\rightleftarrows \psi^*(x)<y\leqslant\bar{Y}, \tag{29}$$

причем

$$f_{BA^\infty}(x, y)=f_{A^\infty}(x, y)\rightleftarrows \exists\psi(x) \text{ и } y=\psi(x), \tag{30}$$

где непрерывная функция $\psi^*(x)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\psi^*(x)=\begin{cases}\psi(x), \text{ когда } \exists\ \psi(x) \text{ в точке } x,\\ \bar{Y} \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Доказательство. Так как

$$\frac{p_2B(y_0)}{1-p_2}=p_2\sum_{i=0}^{\infty}p_2^i\beta(y_0)\leqslant p_2\sum_{i=0}^{\infty}p_2^iB(r_2^iy_1)=\beta(y_1),$$

то согласно допущению $\alpha(x_1)\geqslant\beta(y_1)$

$$p_2\,B(y_0)\leqslant(1-p_2)\,\beta(y_1)\leqslant(1-p_2)\,\alpha(x_1)\leqslant(1-p_2)\,\alpha(x). \tag{31}$$

Отсюда в силу соотношения (27) заключаем, что

$$\psi(x)\geqslant y_0.$$

Далее лемма доказывается аналогично лемме 1.

Обозначим x_2 максимальное решение уравнения

$$\alpha(x)=\alpha(r_1x)\quad(0\leqslant x<\infty). \tag{32}$$

Лемма 4. 1) *Уравнение* (32) *имеет единственное ненулевое решение*

$$\bar{x}=x_2\in\left(x_1,\ \frac{x_1}{r_1}\right)$$

тогда и только тогда, когда $x_1>0$.

Если $x_1=0$, *то уравнение* (32) *имеет только нулевое решение* $\bar{x}=0=x_2$.

2) *Имеют место соотношения*

$$\alpha(x)-\alpha(r_1x)<0 \tag{33}$$

$$\frac{p_1A(x)}{1-p_1}-\alpha(x)<0, \tag{33'}$$

когда $0<x<x_2$, *и*

$$\alpha(x)-\alpha(r_1x)>0 \tag{34}$$

$$\frac{p_1A(x)}{1-p_1}-\alpha(x)>0, \tag{34'}$$

когда $x_2 < x < \infty$, *причем*

$$\frac{p_1 A(x_2)}{1-p_1} = \alpha(x_2) = \alpha(r_1 x_2). \tag{35}$$

Доказательство. Пусть $x_1 > 0$. В силу строгой выпуклости функций $\alpha(x)$ и $\alpha(r_1 x)$ и по определению x_1 следует, что $\alpha(x)$ монотонно возрастает в интервале $\left(x_1, \frac{x_1}{r_1}\right)$, причем

$$\alpha\left(r_1 \cdot \frac{x_1}{r_1}\right) = \alpha(x_1).$$

Следовательно, функция $\alpha(x) - \alpha(r_1 x)$ монотонно возрастает в интервале $\left(x_1, \frac{x_1}{r_1}\right)$. Кроме того, $\alpha(x) - \alpha(r_1 x)$ — непрерывная функция,

$$\alpha(x_1) - \alpha(r_1 x_1) < 0$$

$$\alpha\left(\frac{x_1}{r_1}\right) - \alpha(x_1) > 0.$$

Таким образом, следует существование такой точки $x^\circ \in \left(x_1, \frac{x_1}{r_1}\right)$, что

$$\alpha(x) - \alpha(r_1 x) < 0 \text{ при } x_1 < x < x^\circ$$

$$\alpha(x) - \alpha(r_1 x) > 0 \text{ при } x^\circ < x < \frac{x_1}{r_1},$$

причем

$$\alpha(x^\circ) = \alpha(r_1 x^\circ).$$

Очевидно, что

$$\alpha(x) - \alpha(r_1 x) < 0 \text{ для всех } 0 < x \leqslant x_1$$

$$\alpha(x) - \alpha(r_1 x) > 0 \text{ для всех } \frac{x_1}{r_1} \leqslant x < \infty.$$

Итак, из последних пяти соотношений следует достаточность условия $x_1 > 0$. Необходимость $x_1 > 0$ очевидна. Если $x_1 = 0$, то

$$\alpha(0) - \alpha(r_1 0) = 0$$

$$\alpha(x) - \alpha(r_1 x) > 0 \text{ для всех } 0 < x < \infty.$$

Следовательно, $x_2 = 0$ при $x_1 = 0$.

На основании последних пяти неравенств получаем соотношения (33) и (34).

По определению

$$\alpha(x) = p_1 A(x) + p_1 \alpha(r_1 x).$$

Согласно (33)

$$\alpha(x) > p_1 A(x) + p_1 \alpha(x) \text{ для } 0 < x < x_2.$$

По-видимому, отсюда получаем соотношение (33′). Остальные два соотношения, (34′) и (35), выводятся аналогично при помощи неравенства (34) и определения x_2.

Замечание. Будем считать, что $x_2 \leqslant \overline{X}$.

Лемма 5. *Пусть* $\alpha(x_1) \geqslant \beta(y_1)$. *Тогда*

$$\psi^*(r_1x) \geqslant \psi^*(x), \tag{36}$$

$$\overline{\varphi}^*(r_1x) \geqslant \overline{\varphi}^*(x) \tag{36а}$$

$$\varphi^*(r_1x) \leqslant \varphi^*(x), \tag{36б}$$

когда $0 \leqslant x \leqslant x_2$, *и*

$$\psi^*(r_1x) \leqslant \psi^*(x), \tag{37}$$

$$\overline{\varphi}^*(r_1x) \leqslant \overline{\varphi}^*(x), \tag{37а}$$

$$\varphi^*(r_1x) \geqslant \varphi^*(x), \tag{37б}$$

когда $x_2 \leqslant x \leqslant \overline{X}$. *Кроме того,*

$$\varphi(r_1x) > \varphi(x), \text{ когда } \exists\, \varphi(r_1x) \text{ и } x > x_2. \tag{38}$$

Доказательство. Пусть $\alpha(x_1) \leqslant \beta(0)$. Тогда, согласно лемме 1, существует функция $\varphi(x)$ только в интервале $[x_\varphi, \bar{x}_\varphi]$. Покажем неравенство

$$\varphi(r_1x) < \varphi(x) \text{ для всех } x_\varphi < x < x_2. \tag{39}$$

Пусть $x^\circ \in (x_\varphi, x_2)$. Тогда, если $\varphi(r_1x)$ не существует, в силу (12) и утверждения 1) леммы 1

$$\varphi(r_1x^\circ) = 0 < \varphi(x^\circ) = \varphi^*(x^\circ).$$

Если $\exists\, \varphi(r_1x^\circ)$, то из соотношений (11) и (33) вытекает

$$\beta\Big(\varphi_1(r_1x^\circ)\Big) = \alpha(r_1x^\circ) > \alpha(x^\circ) = \beta\Big(\varphi(x^\circ)\Big).$$

Так как функция $\beta(y)$ монотонно убывает в интервале $[0, y_1]$, то

$$\varphi^*(r_1x^\circ) = \varphi(r_1x^\circ) < \varphi(x^\circ) = \varphi^*(x^\circ). \tag{40}$$

Аналогично доказывается

$$\varphi^*(x) < \varphi^*(r_1x) \text{ при } x_2 < x < \frac{\bar{x}_\varphi}{r_1}. \tag{41}$$

Из леммы 1 непосредственно следует, что

$$\varphi^*(r_1x) \leqslant \varphi^*(x), \text{ когда } 0 \leqslant x \leqslant x_\varphi,$$

и

$$\varphi^*(r_1x) \geqslant \varphi^*(x), \text{ когда } \bar{x}_\varphi \leqslant x \leqslant \overline{X}.$$

Отсюда и из неравенств (39) и (41) вытекают соотношения (36б), (37б) и (38) при $\alpha(x_1) \leqslant \beta(0)$.

Если $\alpha(x_1) > \beta(0)$, то ввиду (12) и утверждения 2) леммы 1 нетрудно установить справедливость (36б) и (37б).

Остальные соотношения доказываются аналогично соотношениям (36б) и (37б).

Лемма 6. *Пусть* $\alpha(x_1) \geqslant \beta(y_1)$.

1) *Тогда и только тогда существует однозначная функция* $y = y(x)$, $y_0 \leqslant y(x) \leqslant \overline{Y}$, *что*

$$p_1(1-p_2)\,A(x) = p_2(1-p_1)\,B\Big(y(x)\Big) \tag{42}$$

для некоторого $x \in [x_0, \bar{X}]$, *когда* $p_1(1-p_2)A(x_0) \leqslant p_2(1-p_1)B(\bar{Y})$. *Функция* $y=y(x)$ *— непрерывная монотонно возрастающая в интервале* $[x_y, \bar{x}_y]$, *где*

$$x_y = \min\left\{x : x_0 \leqslant x < x_2,\ \frac{p_1A(x)}{1-p_1} \geqslant \frac{p_2B(y_0)}{1-p_2}\right\}, \tag{43}$$

$$\bar{x}_y = \max\left\{x : x_0 \leqslant x \leqslant \bar{X},\ \frac{p_1A(x)}{1-p_1} \leqslant \frac{p_2B(\bar{Y})}{1-p_2}\right\}; \tag{44}$$

2) *в области* $[x_0, \bar{X}] \times (y_0, \bar{Y}]$ *имеют место соотношения*

$$f_{AB}(x, y) \geqslant f_{BA}(x, y) \rightleftarrows y_0 < y \leqslant y^*(x) \tag{45}$$

$$f_{AB}(x, y) < f_{BA}(x, y) \rightleftarrows y^*(x) < y \leqslant \bar{Y}, \tag{46}$$

причем

$$f_{AB}(x, y) = f_{BA}(x, y) \rightleftarrows \exists\, y(x) \text{ и } y = y(x), \tag{47}$$

где непрерывная функция $y^*(x)$ *определена соотношениями*

$$y^*(x) = \begin{cases} y_0 & \text{для } x_0 \leqslant x < x_y \\ y(x) & \text{для } x_y \leqslant x \leqslant \bar{x}_y \\ \bar{Y} & \text{для } \bar{x}_y < x \leqslant \bar{X} \end{cases} \tag{48}$$

при $p_1(1-p_2)A(x_0) \leqslant p_2(1-p_1)B(\bar{Y})$ и

$$y^*(x) = \bar{Y} \text{ для } x_0 \leqslant x \leqslant X \tag{49}$$

при $p_1(1-p_2)A(x_0) > p_2(1-p_1)B(\bar{Y})$;

3) *Кроме того,*

$$y^*(x) \leqslant \psi^*(x), \text{ когда } x_0 \leqslant x \leqslant x_2, \tag{50}$$

и

$$y^*(x) \geqslant \psi^*(x), \text{ когда } x_2 \leqslant x \leqslant \bar{X}. \tag{51}$$

Доказательство. Пусть $p_1(1-p_2)A(x_0) \leqslant p_2(1-p_1)B(\bar{Y})$. Тогда из определения x_1 и соотношения (35) получаем, что

$$\alpha(x_1) \leqslant \alpha(x_2) = \frac{p_1A(x_2)}{1-p_1} \tag{52}$$

Согласно соотношению (31)

$$\frac{p_2B(y_0)}{1-p_2} \leqslant \alpha(x_1).$$

Таким образом, в соответствии с (52)

$$\frac{p_2B(y_0)}{1-p_2} \leqslant \frac{p_1A(x_2)}{1-p_1}.$$

Отсюда и из предположения

$$\frac{p_1A(x_0)}{1-p_1} \leqslant \frac{p_2B(\bar{Y})}{1-p_2}$$

в силу монотонного возрастания функций $A(x)$ и $B(y)$ в соответствующих интервалах $[x_0, \bar{X}]$ и $[y_0, \bar{Y}]$ следует существование непустого интервала вида

$$I = \left[\frac{p_1A(x_0)}{1-p_1}, \frac{p_1A(\bar{X})}{1-p_1}\right] \cap \left[\frac{p_2B(y_0)}{1-p_2}, \frac{p_2B(\bar{Y})}{1-p_2}\right]. \tag{53}$$

Очевидно, что

$$x_y = \min\left\{x : \frac{p_1 A(x)}{1-p_1} \in I\right\},$$

$$\bar{x}_y = \max\left\{x : \frac{p_1 A(x)}{1-p_1} \in I\right\}$$

и для всех $x_y \leqslant x \leqslant \bar{x}_y$ выполняется неравенство

$$\frac{p_2 B(y_0)}{1-p_2} \leqslant \frac{p_1 A(x)}{1-p_1} \leqslant \frac{p_2 B(\bar{Y})}{1-p_2}$$

Следовательно, для каждого $x \in [x_y, \bar{x}_y]$ ввиду монотонного возрастания $B(y)$ существует однозначная функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнение (42). Этим достаточность условия $p_1(1-p_2)A(x_0) \leqslant p_2(1-p_1)B(\bar{Y})$ для существования функции $y(x)$ в некоторой точке интервала $[x_0, \bar{X}]$ доказана. Необходимость этого условия очевидна.

Перейдем к рассмотрению некоторых свойств функции $y(x)$. По теореме о существовании неявной функции $y(x)$ является непрерывной на интервале $[x_y, \bar{x}_y]$. Кроме того, в силу теоремы о дифференцируемости неявных функций

$$y'(x) = \frac{p_1(1-p_2)A'_x(x)}{p_2(1-p_1)B'_y\big(y(x)\big)} \tag{54}$$

Так как $y_0 < y(x) < \bar{Y}$ при $x_y < x < \bar{x}_y$, то $A'(x) > 0$ и $B^1_y\big(y(x)\big) > 0$, когда $x_y < x < \bar{x}_y$. Следовательно, функция $y(x)$ монотонно возрастает в интервале $(x_y, \bar{x}_y)$.

По-видимому, в области $[x_y, \bar{x}_y] \times [y_0, \bar{Y}]$ при $p_1(1-p_2)A(x_0) \leqslant p_2(1-p_1)B(\bar{Y})$ удовлетворяются соотношения

$$\frac{p_1 A(x)}{1-p_1} > \frac{p_2 B(y)}{1-p_2} \rightleftarrows y < y(x) \tag{55}$$

$$\frac{p_1 A(x)}{1-p_1} < \frac{p_2 B(y)}{1-p_2} \rightleftarrows y > y(x), \tag{56}$$

причем

$$\frac{p_1 A(x)}{1-p_1} = \frac{p_2 B(y)}{1-p_2} \rightleftarrows y = y(x), \tag{57}$$

ибо $B(y)$ возрастает. Согласно определению x_y и $\bar{x}_y$ (см. соотн. (43) и (44)

$$\frac{p_1 A(x)}{1-p_1} < \frac{p_2 B(y)}{1-p_2} \text{ для всех } (x, y) \in (x_0, x_y) \times [y_0, \bar{Y}] \tag{58}$$

$$\frac{p_1 A(x)}{1-p_1} > \frac{p_2 B(y)}{1-p_2} \text{ для всех } (x, y) \in [\bar{x}_y, \bar{X}] \times [y_0, \bar{Y}]. \tag{59}$$

Так как

$$f_{AB}(x, y) - f_{BA}(x, y) = p_1(1-p_2)A(x) - p_2(1-p_1)B(y), \tag{59}$$

то из соотношений (55), (57) и (58) вытекает (46), а из (56), (57) и (59) следует (45). Соотношение (57) эквивалентно (47).

Если $p_1(1-p_2)A(x_0) > p_2(1-p_1)B(\bar{Y})$, то

$$f_{AB}(x, y) > f_{BA}(x, y) \rightleftarrows (x, y) \in [x_0, \bar{X}] \times [y_0, \bar{Y}].$$

Этим утверждение 2) доказано.

Покажем неравенство (50). Пусть x° — любая точка интервала $[x_0, x_2]$. Если не существует $\psi(x^\circ)$, то согласно (49), (48) и определению $\psi^*(x)$

$$\psi^*(x^\circ)=\bar{Y}\geqslant y^*(x^\circ).$$

Остается рассмотреть случай, когда $\exists\ \psi(x^\circ)$. Согласно (33′), (35) и (27)

$$\frac{p_1A(x^0)}{1-p_1}\leqslant\alpha(x^0)=\frac{p_2B\left(\psi(x^0)\right)}{1-p_2}. \tag{60}$$

Кроме того, ввиду (42) при $\exists\ y(x^\circ)$

$$\frac{p_1A(x^0)}{1-p_1}=\frac{p_2B\left(y(x^0)\right)}{1-p_2}$$

Сравнивая последние два соотношения, имеем

$$y(x^\circ)\leqslant\psi(x^\circ).$$

Пусть не существует функции $y(x)$ в точке x°. Тогда в силу неравенства (60) $p_1(1-p_2)A(x^\circ)\leqslant p_2(1-p_1)B(\bar{Y})$. Таким образом, используя утверждение 1), заключаем, что $x^\circ\in[x_0, x_y)$, ибо $p_1(1-p_2)A(x^0)\leqslant p_2(1-p_1)B\left(\psi(x^\circ)\right)$. Поэтому

$$y^*(x^\circ)=y_0\leqslant\psi(x^\circ)$$

(см. соотн. (48) и утверждение 1) леммы 3), ибо $x^\circ<x_2$. Итак, неравенство (50) установлено.

Далее докажем неравенство (51). Пусть x° — любая точка интервала $[x_2, \bar{X}]$. Если не существует $y(x^\circ)$, то согласно (49) и (48)

$$y^*(x^\circ)=\bar{Y}\geqslant\psi^*(x^\circ),$$

ибо $x_2\geqslant x_y$. Если существует $y(x^\circ)$, то ввиду (34)′, (35) и (42)

$$\alpha(x^0)\leqslant\frac{p_1A(x^0)}{1-p_1}=\frac{p_2B\left(y(x^0)\right)}{1-p_2}. \tag{61}$$

Следовательно,

$$\frac{p_2B(\bar{Y})}{1-p_2}\geqslant\alpha(x_1).$$

Таким образом, используя утверждение 1) леммы 3, заключаем, что $x^\circ\in[x_\psi, \bar{x}_\psi]$ и

$$\frac{p_2B\left(\psi(x^0)\right)}{1-p_2}=\alpha(x^0).$$

Сравнивая последнее и (61) соотношения, выводим

$$\psi(x^\circ)\leqslant y(x^\circ).$$

Итак, неравенство (51) доказано.

Лемма 7. *Пусть* $\alpha(x_1)\geqslant\beta(y_1)$.

1) *Тогда и только тогда существует такая однозначная функция* $y=q(x)$, $0\leqslant q(x)\leqslant y_1$, что

$$p_1A(x)=(1-p_1)\beta(q(x)) \tag{62}$$

для некоторого $x \in [x_0, \bar{X}]$, *когда* $(1-p_1)\,\beta(0) \geqslant p_1 A(x_0)$. *Функция* $y = q(x)$ — *непрерывная и монотонно убывающая, определенная в интервале* $[x_q, \bar{x}_q]$, *где*

$$x_q = \min\left\{ x : x_0 \leqslant x \leqslant x_2,\ \frac{p_1 A(x)}{1-p_1} \geqslant \beta(y_1) \right\},$$

$$\bar{x}_q = \max\left\{ x : x_2 \leqslant x \leqslant \bar{X},\ \frac{p_1 A(x)}{1-p_1} \leqslant \beta(0) \right\}.$$

2) *В области* $[x_0, \bar{X}] \times [0, y_1)$ *имеют место соотношения*

$$f_{AB^\infty}(x, y) < f_{B^\infty}(x, y) \rightleftarrows 0 \leqslant y < q^*(x), \tag{63}$$

и

$$f_{AB^\infty}(x, y) \geqslant f_{B^\infty}(x, y) \rightleftarrows q^*(x) \leqslant y < y_1, \tag{64}$$

$$f_{AB^\infty}(x, y) \geqslant f_{B^\infty}(x, y), \text{ когда } q^*(x) \leqslant y \leqslant y_1,\ x_2 \leqslant x \leqslant \bar{X} \tag{64'}$$

причем

$$f_{AB^\infty}(x, y) = f_{B^\infty}(x, y) \rightleftarrows \exists\ q(x) \text{ и } y = q(x), \tag{65}$$

где $q^*(x)$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая соотношениям*

$$q^*(x) = \begin{cases} y_1, & \text{когда } x \leqslant x < x_q, \\ q(x), & \text{когда } x_q \leqslant x \leqslant \bar{x}_q, \\ 0, & \text{когда } \bar{x}_q < x \leqslant \bar{X}, \end{cases} \tag{66}$$

при $(1-p_1)\,\beta(0) \geqslant p_1 A(x_0)$ *и*

$$q^*(x) = 0, \text{ когда } x_0 \leqslant x \leqslant \bar{X}, \tag{67}$$

при $(1-p_1)\,\beta(0) < p_1 A(x_0)$.

3) *Кроме того,*

$$q^*(x) \geqslant \varphi^*(x) \text{ для } x_0 \leqslant x \leqslant x_2 \tag{68}$$

и

$$q^*(x) \leqslant \varphi^*(x) \text{ для } x_2 \leqslant x \leqslant X, \tag{69}$$

причем

$$q(x) < \varphi(x), \text{ когда } \exists\ q(x) \text{ и } x > x_2. \tag{70}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
5.III.1968.

Литература

1. Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, М., 1960.
2. В. Б. Бистрицкас, Политомическая задача динамического программирования для монотонных функций, Лит. мат. сб., VIII, 2 (1968), 225—232.
3. Н. Бурбаки, Функции действительного переменного, ИЛ, Москва, 1965.
4. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, М., 1966.

DICHOTOMINIS DINAMINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINYS GRIEŽTAI IŠKILIOMS FUNKCIJOMS. I

V. BISTRICKAS

(*Reziumė*)

Nagrinėjama proceso $f(x, y)$, patenkinančio (1) lygtį, sprendimo sričių ribinių kreivių savybės, kai funkcijos $A(x)$ ir $B(y)$ griežtai iškilios.

DICHOTOMIC PROBLEM OF DYNAMIC PROGRAMMING FOR THE STRICTLY CONVEX FUNCTIONS. I

V. BISTRICKAS

(*Summary*)

The properties of the decision regions for the solution of the equation (1), when both functions $A(x)$ and $B(y)$ are strictly convex, are investigated.