УДК-518.9

ОБ ИГРЕ ОДНОГО НАПАДАЮЩЕГО ПРОТИВ НЕСКОЛЬКИХ ЗАЩИТНИКОВ

И. Н. ВРУБЛЕВСКАЯ

1. Введение. Дрешер [1] рассматривал вопрос об оптимальных стратегиях для некоторой игры двух игроков, являющейся моделью нападения одной единицы силы одного игрока на n объектов другого игрока, имеющих различную ценность и защищаемых также одной единицей силы. Полное исследование этой игры приводится в статье Н. Н. Воробьева [2]. В настоящей работе исследуется игра того же типа, но для $l \geqslant 2$ одинаковых единиц у защищающего игрока. Получены характеристики решения игры, позволяющие уменьшить размеры рассматриваемой матрицы. В отдельных случаях решение получено полностью.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую матричную игру. Чистыми стратегиями первого, нападающего, игрока I являются объекты с *номерами* $1, 2, \ldots, n$, имеющие соответственно ценности $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$. Чистыми стратегиями второго, защищающего, игрока II являются всевозможные расположения $l \geqslant 2$ единиц сил по n объектам, или в n пронумерованных классов, т.е. всевозможные упорядоченные представления $l = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$, $0 \leqslant l_i \leqslant l$, l_i целые. Вероятность отбить атаку одной единицей защиты равна p, $0 < p < 1$. Функция выигрыша в игре определяется тем, что в ситуации $< i; (l_1, l_2, \ldots, l_n) >$ в чистых стратегиях игрок I получает (игрок II теряет) величину $(1-p)^{l_i} a_i$. Задача состоит в нахождении значения игры v и оптимальных стратегий для обоих игроков. Они, очевидно, зависят от величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Будем называть число l_k в какой-либо чистой стратегии игрока II, т. е. показатель степени в коэффициенте при a_k, соответствующим *k-м показателем*.

Таким образом, матрица игры $A = A(n, 1, l)$ имеет n строк и, при $n > 2$,

$$N = N(n, l) = C^l_{n-1+l}$$

столбцов, т. е. имеет очень большую длину. Каждый ее столбец однозначно определяется соответствующим набором показателей $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Если в какой-нибудь совокупности столбцов существует столбец с показателем $l_i > 0$, то будем говорить, что номер i *участвует* в этой совокупности столбцов.

Будем считать, что столбцы расположены в следующем порядке. Первым является столбец, в котором участвует лишь номер 1, т. е. все l единиц стоят в первом классе: $l_1 = l$ и $l_2 = \ldots = l_n = 0$. После него в произвольном порядке идут *все* столбцы, в каждом из которых обязательно участвует номер 2 и, быть может, номер 1. Затем, также в произвольном порядке, идут *все* столбцы, в каждом из которых обязательно участвует номер 3 и, быть может, номера 1 и 2. Расположение всех остальных столбцов аналогично. Для каждого i, $i=1, 2, \quad n$, обозначим через $A(i, 1, l)$ подматрицу заданной матрицы $A(n, 1, l)$, содержащую лишь все строки $1, 2, \ldots, i$ и все столбцы, в которых участвуют лишь номера $\leqslant i$. Число столбцов $N(i, l)$ в матрице $A(i, 1, l)$ равно C^l_{i-1+l}.

3. Стратегии и равновесие. Обозначим произвольную смешанную стратегию игрока I через

$$X=(x_1, x_2, \quad x_n),$$

а произвольную смешанную стратегию игрока II через

$$Y=(y_1, y_2, \ldots, y_N).$$

Как известно (это следует, например, из теоремы Шепли – Сноу), существуют оптимальные стратегии игрока II, имеющие лишь не более n отличных от нуля компонент. По определению, пара смешанных стратегий двух игроков (X, Y) является ситуацией равновесия тогда и только тогда, когда

$$A_{i\cdot} Y^T \leqslant XAY^T \leqslant XA_{\cdot j},$$

и при этом величина $v=XAY^T$ есть значение игры.

Заметим, что в оптимальную стратегию X игрока I могут входить (атаковаться) разве лишь такие номера (объекты) i, т.е. могут быть $x_i>0$, для которых $A_{i\cdot}Y^T=v$, т.е. $A_{i\cdot}Y^T$ максимально; а в оптимальную стратегию Y игрока II могут входить разве лишь такие его чистые стратегии j, т. е. могут быть $y_j>0$, для которых $XA_{\cdot j}=v$, т. е. $XA_{\cdot j}$ минимально.

Мы будем использовать эти доминирования, отбрасывая строки, дающие ме́ньшие величины комбинаций, и столбцы, дающие бо́льшие величины комбинаций.

4. Свойства оптимальных стратегий. Пусть теперь (X, Y) является ситуацией равновесия. Обозначим для каждого y_j соответствующий набор показателей через $(l_1, l^j_2, \quad l^j_n)$. Стратегия Y определяет совокупность входящих в нее столбцов, и если найдется $y_j>0$, для которого $l^j_i>0$, то можно говорить, что номер (объект) i участвует (защищается) в Y.

Лемма 1. *Если $y_j>0$ и $l^j_i>0$, то $x_i>0$.*

Другими словами, защищаемый объект должен атаковаться, или, что то же самое, игрок II должен защищать разве лишь те объекты, на которые нападает игрок I.

Доказательство. Если $x_i=0$, то найдется $x_m>0$, $m\neq i$. Возьмем такое k, что $l^k_m=l^j_m+l^j_i$, $l^k_i=0$ и $l^k_s=l^j_s$ при $s\neq i, m$. Тогда для столбца $A_{\cdot k}$ мы получим $XA_{\cdot k}<XA_{\cdot j}$, так как $x_m(1-p)^{l^k_m}a_m<x_m(1-p)^{l^j_m}a_m$. Следовательно, согласно сделанному выше замечанию, не может быть $y_j>0$.

Лемма 2. *Если $x_i>0$ и найдется $y_j>0$, для которого $l^j_i>0$, то $a_i>v$; если $x_i>0$ и для любого $y_j>0$ имеет место $l^j_i=0$, то $a_i=v$; если $\mathbf{x}_i=0$, то для любого $y_j>0$ должно быть $l^j_i=0$ и $a_i\leqslant v$.*

Доказательство. Если $x_i>0$, то $v=A_i.Y^T=\sum_j y_j(1-p)^{l_i^j}a_i$, $y_j\geqslant 0$, $\sum_j y_j=1$, т.е. v равняется комбинации чисел $(1-p)^l a_i$, $(1-p)^{l-1}a_i$, $\ldots$, $(1-p)\,a_i$, a_i. Если $y_j>0$ и $l_i^j>0$, то число $(1-p)^{l_i^j}a_i>a_i$ входит в комбинацию, следовательно v должно быть меньше наибольшего из возможных чисел, т.е. $v<a_i$. Если $l_i^j=0$ для всех $y_j>0$, то в указанную комбинацию входит лишь число a_i, и тогда $v=a_i\sum_j y_j=a_i$. Если же $x_i=0$, то, на основании леммы 1, $l_i^j=0$ для всех $y_j>0$, и по определению ситуации равновесия имеем $v\geqslant A_i.Y^T=a_i$.

Лемма 3. *Если $y_j>0$ и $l_i^j>0$, то для каждого m с $a_m\geqslant a_i$ (в частности для $m=1, 2, \quad i-1$) найдется такое $y_{k_m}>0$, что $l_m^{k_m}>0$.*

Другими словами, игрок II, защищая какой-то объект, должен защищать и все не менее ценные объекты.

Доказательство. Если для некоторого номера m с $a_m\geqslant a_i$ при всех $y_s>0$ будет $l_m^s=0$, то $A_mY^T=a_m$. В то же время $A_i.Y^T<a_i$, так как $l_i^j>0$ и $y_j>0$. Следовательно, $A_i.Y^T<a_i\leqslant a_m=A_m.Y^T$, и потому $x_i=0$, что противоречит лемме 1.

Лемма 4. *Если $y_j>0$ и $l_i^j>0$, то $x_m>0$ для всех m с $a_m\geqslant a_i$ (в частности для $m=1, 2, \quad i$).*

Иначе говоря, игрок II должен защищать какой-то объект разве лишь если игрок I нападает на все не менее ценные объекты.

Это следует непосредственно из лемм 3 и 1.

Из всех этих лемм получаем теорему.

Теорема 1. *Существует такой однозначно определяемый номер i_0 $(1\leqslant i_0\leqslant n)$, что игрок II в своей оптимальной смешанной стратегии защищает лишь все объекты $1, 2, \quad i_0$, а игрок I в своей оптимальной смешанной стратегии нападает на все объекты $1, 2, \quad i_0$, и, может быть, еще на какие-либо и последующих объектов $a_{i_0+1}= \quad =a_{i_0+i'}$, если окажется $a_{i_0+1}=v$.*

В самом деле, так как $l>0$, всегда какое-то $l_i^j>0$ при $y_j>0$; значит, по лемме 4 всегда $x_1>0$, т.е. $i_0\geqslant 1$. Далее, если бы оказалось два различных соответствующих номера $i_0'<i_0''$, то мы получили бы с одной стороны $a_{i_0''}\leqslant v$, а с другой — $a_{i_0''}>v$.

Следствие 1. *Вместо матрицы $A=A\,(n,\ 1,\ l)$ достаточно рассматривать лишь ее подматрицу $A\,(i_0,\ 1,\ l)$, с соответствующим числом строк i_0 и числом столбцов $N\,(i_0,\ l)$.*

Значение игры с матрицей $A\,(i,\ 1,\ l)$ будем обозначать через $v\,(i)$. В этих обозначениях имеем $v=v\,(i_0)$. Очевидно, при $a_{i+1}>v\,(i)$ число $v\,(i)$ не может быть значением v заданной игры, и $i_0\neq i$.

Теорема 2. *Номер i_0 является наименьшим из тех номеров i, для которых $a_{i+1}\leqslant v\,(i)$.*

Доказательство. Так как i_0 — наибольший номер, участвующий в оптимальной стратегии Y, по определению ситуации равновесия должно быть $a_{i_0+1} \leqslant v = v(i_0)$, т.е. для i_0 указанное неравенство выполняется.

Покажем, что для $i < i_0$ (при $i_0 \geqslant 2$) оно не может выполняться, т.е. что для $i < i_0$ должно быть $a_{i+1} > v(i)$. Любой объект с номером $i \leqslant i_0$ таков, что игрок I обязательно должен на него нападать, а игрок II обязательно должен его защищать. Так как i_0 защищается, мы имеем $v(i_0) = v < a_{i_0}$ (см. лемму 2). Если же игрок I будет обязательно нападать на i_0, то значит при таком нападении он сможет получить больше, чем не нападая на него, т. е. будет

$$v(i_0) > \begin{cases} v(i_0-1), \\ v(i_0-2), \\ \\ v(2), \\ v(1). \end{cases}$$

Так как $a_2 \geqslant \qquad \geqslant a_{i_0}$ и $a_{i_0} > v(i_0)$, мы имеем требуемые неравенства.

Лемма 5. *Для любых* $y_j > 0$, $y_k > 0$ *и каждого* i, $1 \leqslant i \leqslant i_0$ *должно быть* $|l_i^j - l_i^k| \leqslant 1$.

Доказательство. Допустим, что для некоторого номера i имеет место $|l_i^j - l_i^k| \geqslant 2$, пусть для определенности $l_i^j - l_i^k \geqslant 2$. Тогда, ввиду $\sum_{i'=1}^{n} l_{i'}^j = l = \sum_{i'=1}^{n} l_{i'}^k$, найдется некоторый номер m, для которого $l_m^k > l_m^j$. На основании леммы 1, $x_i > 0$ и $x_m > 0$. Рассмотрим два других набора показателей $(l_1^{j'}, \cdots, l_n^{j'})$ и $(l_1^{k'}, \cdots, l_n^{k'})$, в которых $l_{i'}^{j'} = l_{i'}^j$ и $l_{i'}^{k'} = l_{i'}^k$ при $i' \neq i, m$; $l_i^{j'} = l_i^j - 1$, $l_m^{j'} = l_m^j + 1$; $l_i^{k'} = l_i^k + 1$, $l_m^{k'} = l_m^k - 1$.

Сравним две суммы двух линейных комбинаций:

$$(XA_{\cdot j} + XA_{\cdot k}) - (XA_{\cdot j'} + XA_{\cdot k'}) = (XA_{\cdot j} - XA_{\cdot j'}) + (XA_{\cdot k} - XA_{\cdot k'}) =$$

$$= \{[(1-p)^{l_i^j} - (1-p)^{l_i^j - 1}] a_i x_i + [(1-p)^{l_m^j} - (1-p)^{l_m^j + 1}] a_m x_m +$$

$$+ \{[(1-p)^{l_i^k} - (1-p)^{l_i^k + 1}] a_i x_i + [(1-p)^{l_m^k} - (1-p)^{l_m^k - 1}] a_m x_m\} =$$

$$= [(1-p)^{l_i^j} - (1-p)^{l_i^j - 1} + (1-p)^{l_i^k} - (1-p)^{l_i^k + 1}] a_i x_i + [(1-p)^{l_m^j} -$$

$$- (1-p)^{l_m^j + 1} + (1-p)^{l_m^k} - (1-p)^{l_m^k - 1}] a_m x_m = (1-p)^{l_i^k} \times$$

$$\times [(1-p)^{l_i^j - l_i^k} - (1-p)^{l_i^j - l_i^k - 1} + 1 - (1-p)] a_i x_i + (1-p)^{l_m^j} \times$$

$$\times [1 - (1-p) + (1-p)^{l_m^k - l_m^j} - (1-p)^{l_m^k - l_m^j - 1}] a_m x_m =$$

$$= (1-p)^{l_i^k} [-p(1-p)^{l_i^j - l_i^k - 1} + p] a x_i + (1-p)^{l_m^j} \times$$

$$\times [p - p(1-p)^{l_m^k - l_m^j - 1}] a_m x_m = (1-p)^{l_i^k} p [1 - (1-p)^{l_i^j - l_i^k - 1}] a_i x_i +$$

$$+ (1-p)^{l_m^j} p [1 - (1-p)^{l_m^k - l_m^j - 1}] a_m x_m.$$

Последнее выражение положительно, так как $x_i > 0$, $x_m > 0$, $l_m^k - l_m^j - 1 \geqslant 0$ и $l_i^j - l_i^k - 1 \geqslant 1$. Но $XA_{\cdot j} + XA_{\cdot k} = v + v = 2v$; значит, $XA_{\cdot j'} + XA_{\cdot k'} < 2v$, и следовательно хотя бы одно из этих двух слагаемых $< v$, что противоречит оптимальности стратегии X.

Так как значение игры определяется однозначно, отсюда следует теорема.

Теорема 3. *Во всякую оптимальную смешанную стратегию Y игрока* II *могут входить лишь такие чистые стратегии j, у которых для каждого номера i, $1 \leqslant i \leqslant n$, либо имеется один показатель $l_i^j = l_i = \text{const}$ при всех j и всяком Y, либо имеется два показателя $l_i^j \in \{l_i, l_i - 1\}$, $l_i = \text{const}$ при всех j и всяком Y, причем здесь $l_i > 0$ при $i \leqslant i_0$* и *$l_i = 0$ при $i > i_0$.*

Содержательно это означает, что в чистых стратегиях, которые смешиваются в оптимальную, число единиц, защищающих каждый из объектов, либо одно и то же, либо принимает лишь два отличающихся на единицу значения.

Следствие 2. *Вместо всей матрицы $A(i_0, 1, l)$ достаточно рассматривать лишь такие ее подматрицы, у которых в каждой строке i либо имеется один коэффициент $(1-p)^{l_i} a_i$, либо имеются два коэффициента с соседними показателями $(1-p)^{l_i} a_i$ и $(1-p)^{l_i - 1} a_i$; при этом сумма показателей в каждом столбце j равна l, $\sum_{i=1}^{i_0} l_i^j = l$.*

Мы будем обозначать соответствующую однозначно определенную пару показателей (т. е. пару возможных чисел защитников) для каждого номера (объекта) i в оптимальной стратегии игрока II через l_i, $l_i - 1$, где $l_i - 1$ может и отсутствовать.

Отсюда и из теоремы 1 мы получаем следствие.

Следствие 3. *Значение игры v для каждого номера $i \leqslant i_0$ равно либо $v = (1-p)^{l_i} a_i$, либо*

$$v = (1-p)^{l_i} a_i \sum{}' y_j + (1-p)^{l_i - 1} a_i \sum{}'' y_j,$$

где $y_j > 0$, $\sum{}' y_j > 0$, $\sum{}'' y_j > 0$, $\sum{}' y_j + \sum{}'' y_j = 1$, и $l_i > 0$.

Следствие 4. *Значение игры v для каждого номера $i \leqslant i_0$ заключено в одном из интервалов $[(1-p)^{l_i} a_i, (1-p)^{l_i - 1} a_i)$, где $l_i = l, l-1, \ldots, 1$, а любая оптимальная стратегия игрока* II *может содержать соответственно лишь столбцы j, у которых в i-ой строке стоят либо коэффициенты $(1-p)^{l_i} a_i$, и тогда $v = (1-p)^{l_i} a_i$, либо коэффициенты $(1-p)^{l} a_i$ и $(1-p)^{l_i - 1} a_i$, и тогда*

$$(1-p)^{l_i} a_i < v < (1-p)^{l_i - 1} \qquad \text{при этом} \quad \sum_{i=1}^{i_0} l_i^j = l.$$

Теорема 4. *В каждой оптимальной стратегии игрока* II *для любых номеров i и t, где $i \geqslant 1$, $i < t \leqslant i_0$, соответствующие показатели удовлетворяют неравенству $l_t \leqslant l_i$. Если $l_t = l_i$ и при номере i имеются оба показателя l_i и $l_i - 1$, то при номере t также имеются оба показателя l_t и $l_t - 1$. Если $a_i = a_t$, то показатели при номерах i и t должны совпадать.*

Описательно это можно выразить так. Более ценные объекты сильнее защищаются; если число защитников на некотором объекте принимает два значения, а на менее ценном объекте бо́льшее число защитников такое же как на исходном, то и на этом менее ценном объекте число защитников также принимает два значения; равноценные объекты защищаются одинаково.

Доказательство. При $t \leqslant i_0$ должно быть $A_i.Y^T = v = A_t.Y^T$. Значит, на основании следствия 4,

$$(1-p)^{l_i} a_i \leqslant v < (1-p)^{l_i-1}$$
$$(1-p)^{l_t} a_t \leqslant v < (1-p)^{l_t-1}$$

Если $l_t > l_i$, то $l_t - 1 \geqslant l_i$ и

$$v < (1-p)^{l_t-1} a_t \leqslant (1-p)^{l_i} a_i \leqslant v.$$

Если $l_t = l_i$, и $l_i - 1$ имеется, то $(1-p)^{l_i} a_i < v < (1-p)^{l_i-1} a_i$. Тогда при отсутствии $l_t - 1$ было бы

$$v = (1-p)^{l_t} a_t \leqslant (1-p)^{l_i} a_i < v.$$

Пусть $a_i = a_t$. Если $l_t < l_i$, то $l_i - 1 \geqslant l_t$ и

$$v < (1-p)^{l_i-1} a_i \leqslant (1-p)^{l_t} a_t \leqslant v.$$

Значит $l_t = l_i$. Если $l_i - 1$ имеется, то и $l_t - 1$ имеется, и $l_t - 1 = l_i - 1$. Если $l_i - 1$ отсутствует, а $l_i - 1$ имеется, то $v = (1-p)^{l_i} a_i = (1-p)^{l_t} a_t < v$.

Следствие 5. 1) *В произвольной оптимальной стратегии игрока* II *показатель* $l_i = l$ *возможен только для* $i = 1$. 2) *В какой-либо оптимальной стратегии игрока* II *показатель* l *может употребляться только в том случае, когда она является смесью одного из следующих наборов чистых стратегий* ($l_i = 0$ *опускаем*):

или $(l_1 = l)$;

или $(l_1 = l)$ *и* $(l_1 = l - 1,\ l_2 = 1)$;

или $(l_1 = l)$, $(l_1 = l - 1,\ l_2 = 1)$ *и* $(l_1 = l - 1,\ l_3 = 1)$;

или $(l_1 = l)$, $(l = l_1 - 1,\ l_2 = 1)$, $(l_1 = l - 1,\ l_{i_0-1} = 1)$ *и* $(l_1 = l - 1,\ l_{i_0} = 1)$.

3) *Чистой оптимальной стратегией игрока* II *может быть лишь одна из стратегий* $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ *с* $l_i \geqslant l_{i+1}$.

5. Зависимость между ценностями a_i, a_t и показателями l_i, l_t. Рассмотрим два номера i и t, $t > i$. Пусть Y — оптимальная стратегия игрока II.

Лемма 6. *Если в стратегии Y номер i участвует, и $a_t \leqslant (1-p)^{l_i} a_i$, то номер t не может участвовать в Y.*

Другими словами, объекты сравнительно малой ценности вообще не нужно защищать.

Действительно, в противном случае из следствия 4 получилось бы

$$v < a_t \leqslant (1-p)^{l_i} a_i \leqslant v.$$

Следствие 6. *Никакие номера i с $a_i \leqslant (1-p)^{l_1} a_1$ не участвуют в Y. В частности в Y не могут участвовать номера i, для которых $a_i \leqslant (1-p)^l a_1$.*

Предположим теперь, что $a_t > (1-p)^l a_1$. Тогда $a_t > (1-p)^l a_i$, и найдется такое единственное натуральное число k_t^i, $l \geqslant k_t^i \geqslant 1$, для которого $(1-p)^{k_t^i} a_i < a_t \leqslant (1-p)^{k_t^i - 1} a_i$. Очевидно, для любых i и $t > i$:

$$k_{i+1}^i \leqslant k_{i+2}^i \leqslant \quad \leqslant k_t^i \text{ и } k_t^1 \geqslant k_t^2 \geqslant \quad \geqslant k_t^i.$$

Согласно лемме 6, номер $t > i$ может участвовать в Y только при $k_t^i \leqslant l_i$.

Лемма 7. *Пусть номер t участвует в стратегии Y. Тогда:*

1. *Если и при номере i, и при номере t имеются два показателя l_i, l_i-1 и l_t, l_t-1, то*

$$(1-p)^{l_i-l_t+1} a_i < a_t < (1-p)^{l_i-l_t-1} a_i,$$

в частности, при $l_i=l_t$ правое неравенство заменяется на

$$a_t \leqslant a_i.$$

2. *Если имеются показатели l_i, l_i-1 и l_t, то $l_t<l_i$ и*

$$(1-p)^{l_i-l_t} a_i < a_t < (1-p)^{l_i-l_t-1} a_i.$$

3. *Если имеются показатели l_i и l_t, l_t-1, то*

$$(1-p)^{l_i-l_t+1} a_i < a_t < (1-p)^{l_i-l_t}$$

4. *Если имеются лишь показатели l_i и l_t, то*

$$a_t=(1-p)^{l_i-l_t} a_i.$$

Доказательство. 1. Если $a_t \leqslant (1-p)^{l_i-l_t+1}$ то

$$v<(1-p)^{l_t-1}(1-p)^{l_i-l_t+1} a_i=(1-p)^{l_i} a_i<v.$$

Если $a_t \geqslant (1-p)^{l_i-l_t-1} a_i$, то

$$v>(1-p)^{l_t}(1-p)^{l_i-l_t-1} a_i=(1-p)^{l_i-1} a_i>v.$$

2. Очевидно $l_t \neq l_i$. Если $a_t \leqslant (1-p)^{l_i-l_t} a_i$, то

$$v \leqslant (1-p)^{l_t}(1-p)^{l_i-l_t} a_i=(1-p)^{l_i} a_i<v.$$

Если $a_t \geqslant (1-p)^{l_i-l_t-1} a_i$, то

$$v \geqslant (1-p)^{l_t}(1-p)^{l_i-l_t-1} a_i=(1-p)^{l_i-1} a_i>v.$$

3. Если $a_t \leqslant (1-p)^{l_i-l_t+1} a_i$, то

$$v<(1-p)^{l_t-1}(1-p)^{l_i-l_t+1} a_i=(1-p)^{l_i} a_i=v.$$

Если $a_t \geqslant (1-p)^{l_i-l_t} a_i$, то

$$v>(1-p)^{l_t}(1-p)^{l_i-l_t} a_i=(1-p)^{l_i} a_i=v.$$

4. $(1-p)^{l_i} a_i=(1-p)^{l_t} a_t$, следовательно $(1-p)^{l_i-l_t} a_i=a_t$.

Следствие 7. *Если номер i участвует в Y с обоими показателями l_i и l_i-1, то для номера t возможны лишь следующие показатели:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{или } l_i-k_t^i+1 \text{ и } l_i-k_t^i, \\ \text{или } l_i-k_t^i, \\ \text{или } l_i-k_t^i \text{ и } l_i-k_t^i-1, \end{array}\right\} \text{ при } (1-p)^{k_t^i} a_i<a_t<(1-p)^{k_t^i-1}$$

$$\text{или } l_i-k_t^i+1 \text{ и } l_i-k_t^i, \text{ при } a_t=(1-p)^{k_t^i-1} a_i.$$

Если номер i участвует в Y только с одним показателем l_i, то для номера t возможны лишь следующие показатели:

$$\text{или } l_i-k_t^i+1 \text{ и } l_i-k_t^i, \text{ при } (1-p)^{k_t^i} a_i<a_t<(1-p)^{k_t^i-1}$$

$$\text{или } l_i-k_t^i+1, \text{ при } a_t=(1-p)^{k_t^i-1} a_i.$$

Лемма 8. *Если номер t участвует в Y, то это может быть только при показателях l_i в интервале*

$$\left[\frac{l+k_t^i+1}{2}\right] \geqslant l_t \geqslant k_t^i.$$

Наибольшее значение $l_t = \left[\frac{l+k_t^i+1}{2}\right]$ *допустимо только при обоих показателях* l_t *и* l_t-1. *Наименьшее значение* $l_i = k_t^i$ *возможно только при* $l_t = 1$.

Другими словами, если объект $t>i$ защищается, то число единиц, защищающих объект i, должно быть не более чем $\left[\frac{l+k_t^i+1}{2}\right]$ и не менее чем k_t^i-1.

Доказательство. Как уже отмечено выше, должно быть $k_t^i \leqslant l_i$. Из следствия 7 мы получаем два возможных значения для l_t. Сумма показателей l_j^i в столбце равна l. Поэтому необходимо, чтобы, по крайней мере, было $l-(l_i-1) \geqslant l_i - k_t^i$. Следовательно, должно быть $2l_i \leqslant l+1+k_t^i$, $l_i \leqslant \frac{l+k_t^i+1}{2}$, и l_t целое.

На основании следствия 7, если номер i участвует с одним показателем l_i, то должно быть $(l_i-k_t^i+1)+l_i \leqslant l$ т. е. $l_i \leqslant \frac{l+k_t^i-1}{2}$ Если $l_i = k_t^i$, так как номер t участвует, возможно только $l_t = l_i - k_t^i + 1 = 1$.

Таким образом, показатели l_i, при которых возможно участие в Y номера $t>i$, зависят от величины k_t^i. В частности,

если	$k_t^i = l$,	то возможны	$l_i = l$,
	$k_t^i = l-1$,		$l_i = l,\ l-1$,
	$k_t^i = l-2$,		$l_i = l-1,\ l-2$,
	$k_t^i = l-3$,		$l_i = l-1,\ l-2,\ l-3$,
	$k_t^i = l-4$,		$l_i = l-2,\ l-3,\ l-4$,
	$k_t^i = 1$,		$l_i = \left[\frac{l}{2}\right]+1,\ \ldots,\ 2,\ 1.$

Следствие 8. *Если номер* t *участвует в* Y, *то значение иргы* v *заключено в одном из интервалов*:

$$(1-p)^{\left[\frac{l+k_t^i+1}{2}\right]} a_i < v \leqslant (1-p)^{\left[\frac{l+k_t^i-1}{2}\right]} a_i,$$

$$(1-p)^{l_i} a_i \leqslant v \leqslant (1-p)^{l_i-1} a_i$$

при

$$\left[\frac{l+k_t^i-1}{2}\right] \geqslant l_i \geqslant k_t^i + 1,$$

$$(1-p)^{k_t^i} a_i \leqslant v < (1-p)^{k_t^{i}-1} a_i.$$

В дополнение к следствию 4, и принимая во внимание следствие 6, мы получаем.

Следствие 9. *Если* $a_2 > (1-p)^l a_1$, *то для показателя* l_1 *возможны лишь следующие значения*:

$$\left[\frac{l+k_2^1+1}{2}\right], \quad \left[\frac{l+k_2^1-1}{2}\right], \ \ldots, \ k_2^1+1, \ k_2^1.$$

При этом

$$(1-p)^{\left[\frac{l+k_2^1+1}{2}\right]} a_1 < v < (1-p)^{k_2^1-1} a_1.$$

Это утверждение можно несколько дополнить. Положим

$$r_1=l, \qquad r_i=\left[\frac{l+k_2^1+\cdots+k_i^1+(i-1)}{i}\right] \text{ для } i\geqslant 2.$$

Лемма 9. *Пусть $i_0\geqslant 2$ — наибольший номер, участвующий в Y. Тогда $r_{i-1}\geqslant k_i^1$ и $r_{i-1}\geqslant r_i$ для $2\leqslant i\leqslant i_0$, и $r_{i_0}\geqslant l_1\geqslant k_{i_0}^1$.*

Доказательство. Учитывая следствие 7, наибольшее возможное значение для l_1 получаем, когда в столбце вместе с показателем l_1 стоят в каждой i-ой, (где $2\leqslant i\leqslant i_0$) строке соответственно показатели $l_1-k_i^1-1$. Тогда должно быть $l_1+\sum_{s=2}^{i}(l_1-k_s^1-1)\leqslant l$, т. е. $il_1-k_2^1- \quad -k_i^1-(i-1)\leqslant l$, и

$$l_1\leqslant\frac{l+k_2^1+\cdot\quad\cdot+k_i^1+(i-1)}{i}$$

В частности это верно для i_0, и, кроме того, число l_1 целое.

Далее, если бы было $k_i^1>r_{i-1}$, то по лемме 6 номер i не мог бы участвовать в Y.

Наконец, при $i\geqslant 3$

$$\frac{l+k_2^1+\cdot\quad\cdot+k_{i-1}^1+(i-2)}{i-1}-\frac{l+k_2^1+\cdot\quad\cdot+k_{i-1}^1+k_i^1+(i-1)}{i}=$$

$$=\frac{1}{i(i-1)}\left\{l+k_2^1+\cdots+k_{i-1}^1-(i-1)k_i^1-1\right\}\geqslant\frac{-(i-1)}{i(i-1)}=-\frac{1}{i}$$

Следовательно

$$r_i\leqslant\left[\frac{l+k_2^1+\cdot\quad\cdot+k_{i-1}^1+(i-2)}{i-1}+\frac{1}{i}\right]=r_{i-1}.$$

Остальные неравенства очевидны.

Отсюда и из предшествующих лемме 7 неравенств мы получаем.

Следствие 10. *Чем бóльшие номера i участвуют в Y, тем, вообще говоря, ýже границы возможных значений показателя l_1.*

Следствие 11. *Пусть i_1 — наименьший номер, для которого имеет место неравенство $k_{i_1}^1>r_{i_1-1}$. Тогда все номера (объекты) i_1, i_1+1, ..., n не участвуют в Y (в защите).*

6. Решение игры в нескольких частных случаях. Легко видеть следующее.

Теорема 5. *Если $a_2\leqslant(1-p)^l a_1$, то $v=v(1)=(1-p)^l a_1$, $y_1=1$. Если $a_2<(1-p)^l a_1$, то $x_1=1$. Если $a_2=(1-p)^l a_1$, то $x_1=1-\alpha$, где α — произвольное число в интервале $0\leqslant\alpha<1$, и $x_i\geqslant 0$ для $i=2$, ..., m, $\sum_{i=2}^{m}x_i=\alpha$, где m* есть *наибольший номер с $a_m=v(1)=(1-p)^l a_1$.*

Теорема 6. *Пусть $a_2>(1-p)^l a_1$ и $a_3\leqslant(1-p)^{r_2}a_1$.* Тогда $(1-p)^{r_2}a_1<v\leqslant\leqslant(1-p)^{r_2-1}a_1$, *и при этом:*

1. *Если* $a_2=(1-p)^{k_2^1-1}a_1$ *число* $l+k_2^1-1$ *четно, то* $v=v(2)=$ $=(1-p)^{\frac{l+k_2^1-1}{2}}a_1$; $x_1>0$, $x_2>0$, $x_1+x_2=1$ *произвольны;* $y_j=1$ *при* $y_j\sim\left(l_1^j=\frac{l+k_2^1-1}{2},\ l_2^j=\frac{l-k_2^1+1}{2}\right)$.

2. *Если* $a_2=(1-p)^{k_2^1-1}$ *и число* $l+k_2^1-1$ *нечетно, то* $v=v(2)=$ $=\frac{1}{2}(1-p)^{\frac{l+k_2^1-2}{2}}(2-p)\,a_1$; $x_1=x_2=\frac{1}{2}$, $y_j=y_{j'}=\frac{1}{2}$

при

$$y_j\sim\left(l_1^j=\frac{l+k_2^1}{2},\qquad l_2^j=\frac{l-k_2^1}{2}\right),$$

$$y_{j'}\sim\left(l_1^{j'}=\frac{l+k_2^1-2}{2},\qquad l_2^{j'}=\frac{l-k_2^1+2}{2}\right).$$

3. *Если* $(1-p)^{k_2^1}a_1<a_2<(1-p)^{k_2^1-1}a_1$ *и число* $l+k_2^1$ *четно, то*

$$v=v(2)=\frac{(1-p)^{\frac{l+k_2^1-2}{2}}(2-p)\,a_1a_2}{(1-p)^{k_2^1-1}a_1+a_2};$$

$$x_1=\frac{a_2}{(1-p)^{k_2^1-1}a_1+a_2}\qquad x_2=\frac{(1-p)^{k_2^1-1}a_1}{(1-p)^{k_2^1-1}a_1+a_2};$$

$$y_j=\frac{(1-p)^{k_2^1-1}a_1-(1-p)\,a_2}{p\,[(1-p)^{k_2^1-1}a_1+a_2]},\qquad y_{j'}=\frac{-(1-p)^{k_2^1}a_1+a_2}{p\,[(1-p)^{k_2^1-1}a_1+a_2]}$$

при

$$y_i\sim\left(l_1^j=\frac{l+k_2^1}{2},\quad l_2^j=\frac{l-k_2^1}{2}\right),$$

$$y_{j'}\sim\left(l_1^{j'}=\frac{l+k_2^1-2}{2},\qquad l_2^{j'}=\frac{l-k_2^1+2}{2}\right).$$

4. *Если* $(1-p)^{k_2^1}a_1<a_2<(1-p)^{k_2^1-1}a_1$ *и число* $l+k_2^1$ *нечетно, то*

$$v=v(2)=\frac{(1-p)^{\frac{l+k_2^1-1}{2}}(2-p)\,a_1a_2}{(1-p)^{k_2^1}a_1+a_2};$$

$$x_1=\frac{a_2}{(1-p)^{k_2^1}a_1+a_2},\qquad x_2=\frac{(1-p)^{k_2^1}a_1}{(1-p)^{k_2^1}a_1+a_2},$$

$$y_j=\frac{(1-p)^{k_2^1}a_1-(1-p)\,a_2}{p\,[(1-p)^{k_2^1}a_1+a_2]},\qquad y_{j'}=\frac{-(1-p)^{k_2^1}a_1+a_2}{p\,[(1-p)^{k_2^1}a_1+a_2]}$$

при

$$y_j\sim\left(l_1^j=\frac{l+k_2^1+1}{2},\qquad l_2^j=\frac{l-k_2^1-1}{2}\right),$$

$$y_{j'}\sim\left(l_1^{j'}=\frac{l+k_2^1-1}{2},\qquad l_2^{j'}=\frac{l-k_2^1+1}{2}\right).$$

Доказатевльство. При условии $a_2>(1-p)^l a_1$ номер 2 обязательно будет участвовать в Y. В следствии 9 перечислены все соответствующие возможности для l_1. На основании леммы 6, номер 3 не может участвовать в Y, и так как следствие 8 дает $a_3<v$, имеем $x_3=0$.

Значит, для Y имеются лишь две возможности:

а) Y является чистой стратегией $y_j=1$, $y_j\sim(l_1^j=l_1,\ l_2^j=l-l_1)$;

б) Y является смесью двух чистых стратегий $y_j>0$, $y_{j'}>0$, $y_j+y_{j'}=1$, $y_j\sim(l_1^j=l_1,\ l_2^j=l-l_1)$, $y_{j'}\sim(l_1^{j'}=l_1-1,\ l_2^{j'}=l-l_1+1)$.

Случай а). Здесь должно быть $v=(1-p)^{l_1}a_1$ и $v=(1-p)^{l_2}a_2$, откуда $a_2=(1-p)^{l_1-l_2}a_1=(1-p)^{k_2^1-1}a_1$, т. е. $l_1-l_2=k_2^1-1$, и $l_2=l_1-k_2^1+1$ (это согласуется со следствием 7). Но при этом должно быть $l_1+l_2=l$, т. е. оказывается

$$l_1=\frac{l+k_2^1-1}{2} \text{ и } l_2=\frac{l-k_2^1+1}{2}.$$

Следовательно, случай а) возможен только если $a_2=(1-p)^{k_2^1-1}a_1$ и число $l+k_2^1-1$ четно (четность чисел $l+k_2^1-1$ и $l-k_2^1+1$ одинакова).

Случай б). Из следствия 7 получаем, что для номера 2 возможны лишь следующие показатели:

либо б') $l_1-k_2^1+1$ и $l_1-k_2^1$ для $(1-p)^{k_2^1}a_1<a_2\leqslant(1-p)^{k_2^1-1}a_1$,

либо б'') $l_1-k_2^1$ и $l_1-k_2^1-1$ для $(1-p)^{k_2^1}a_1<a_2<(1-p)^{k_2^1-1}a_1$.

Мы имеем $l_2=l_2^{j'}=l-l_1+1$ и $l_1+(l_2-1)=l$. Поэтому при б') получим $l_1+l_1-k_2^1=l$, т. е.

$$l_1=\frac{l+k_2^1}{2} \text{ и } l_2=\frac{l-k_2^1+2}{2};$$

значит при б') имеем для номера 1 показатели

$$\frac{l+k_2^1}{2} \text{ и } \frac{l+k_2^1-2}{2},$$

а для номера 2 показатели

$$\frac{l-k_2^1+2}{2} \text{ и } \frac{l-k_2^1}{2}.$$

Соответственно, при б'') получим $l_1+l_1-k_2^1-1=l$, т. е.

$$l_1=\frac{l+k_2^1+1}{2} \text{ и } l_2=\frac{l-k_2^1+1}{2};$$

значит при б'') имеем для номера 1 показатели

$$\frac{l+k_2^1+1}{2} \text{ и } \frac{l+k_2^1-1}{2},$$

а для номера 2 показатели

$$\frac{l-k_2^1+1}{2} \text{ и } \frac{l-k_2^1-1}{2}$$

Отсюда ясно, что если $a_2=(1-p)^{k_2^1-1}a_1$, но число $l+k_2^1-1$ нечетно, то $l+k_2^1$ четно, и мы будем иметь случай б'). Если $(1-p)^{k_2^1}a_1<a_2<(1-p)^{k_2^1-1}a_1$, то при четном $l+k_2^1$ будем иметь случай б'), и при четном $l+k_2^1+1$ — случай б''). Остается только найти решение игры в случае б).

Итак, $v=(1-p)^{l_1}a_1x_1+(1-p)^{l_2-1}a_2(1-x_1)$ и $v=(1-p)^{l_1-1}a_1x_1+(1-p)^{l_2}a_2(1-$ $-x_1)$, т. е. $(1-p)^{l_2-1}pa_2(1-x_1)=(1-p)^{l_1-1}pa_1x_1$, $a_2(1-x_2)=(1-p)^{l_1-l_2}a_1x_1$. Отсюда

$$x_1=\frac{a_2}{(1-p)^{l_1-l_2}a_1+a_2}, \qquad x_2=1-x_1=\frac{(1-p)^{l_1-l_2}a_1}{(1-p)^{l_1-l_2}a_1+a_2},$$

$$v=\frac{(1-p)^{l_1}a_1a_2+(1-p)^{l_1-1}a_1a_2}{(1-p)^{l_1-l_2}a_1+a_2}=\frac{(1-p)^{l_1-1}(2-p)a_1a_2}{(1-p)^{l_1-l_2}a_1+a_2}.$$

Далее, $v=(1-p)^{l_1}a_1y_j+(1-p)^{l_1-1}a_1(1-y_j)$,

$$\frac{(2-p)a_2}{(1-p)^{l_1-l_2}a_1+a_2}=(1-p)y_j+(1-y_j),$$

$$y_j=\frac{(1-p)^{l_1-l_2}a_1-(1-p)a_2}{p[(1-p)^{l_1-l_2}a_1+a_2]}, \qquad y_{j'}=1-y_j=\frac{-(1-p)^{l_1-l_2+1}a_1+a_2}{p[(1-p)^{l_1-l_2}a_1+a_2]}$$

В случае б′) получаем $l_1-l_2=k_2^1-1$, в случае б″) получаем $l_1-l_2=k_2^1$, так что всегда $y_j>0$ и $y_{j'}>0$. Отсюда следуют все утверждения тоеремы.

Замечание. Значение игры и Y в случае б″) при допущении $a_2=(1-p)^{k_2^1-1}$ сводятся к значению игры и Y в случае а).

В самом деле, четности чисел $l+k_2^1-1$ и $l+k_2^1+1$ совпадают, и при $a_2=$ $=(1-p)^{k_2^1-1}a_1$ соответствующие случаю б″) формулы дают $y_j=0$, $y_{j'}=1$,

$$y_{j'}\sim\left(l_1^{j'}=\frac{l+k_2^1-1}{2}, \qquad l_2^{j'}=\frac{l-k_2^1+1}{2}\right),$$

$$v=(1-p)^{\frac{l+k_2^1-1}{2}}a_1.$$

Опираясь на теорему 2, получаем.

Следствие 12. *Пусть* $a_3>(1-p)^{r_3}a_1$. *Находим* $v(2)$; *при этом всегда* $v(2)>(1-p)^{r_3}a_1$. *Если* $a_3<v(2)$, *то решение игры также дается теоремой* 6. *Если* $a_3=v(2)$, *то значение игры и* Y *также дается теоремой* 6, *но* $x_1+x_2=$ $=1-\alpha$, *где* α — *произвольное число в интервале* $0\leqslant\alpha<1$, *и* $x_i\geqslant0$ *для* $i=3,\ldots,m$, $\sum_{i=3}^{m}x_i=\alpha$, *где* m *есть наибольший номер с* $a_m=v(2)$. *При этом в случае* а) $x_1>0$, $x_2>0$ *произвольны, а в случае* б) *имеем*

$$x_1=\frac{(1-\alpha)a_2}{(1-p)^{l_1-l_2}a_1+a_2}, \qquad x_2=\frac{(1-\alpha)(1-p)^{l_1-l_2}a_1}{(1-p)^{l_1-l_2}a_1+a_2}$$

Теорема 7. *Пусть* $k_2^1=l$. *Тогда* $i_0\geqslant2$,

$$Y=(y_1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ y_{s_2},\ \ldots,\ y_{s_{i_0}},\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

$y_1\sim(l_1^1=l)$, $y_{s_i}\sim(l_1^{s_i}=l-1,\ l_i^{s_i}=1)$ *для* $2\leqslant i\leqslant i_0$,

$$v(i)=\frac{(1-p)^{l-1}(i-p)a_1a_2\cdots a_i}{\Delta(i)}, \qquad v=v(i_0),$$

где i_0 — *в силу теоремы* 2, *наибольший из номеров* i, *для которых* $a_s>v(s-1)$ *при* $2\leqslant s\leqslant i$, *а*

$$\Delta(i)\equiv(1-p)^{l-1}\sum_{k=l}^{2}a_1 \qquad a_i+a_2 \qquad a_i \text{ для } 2\leqslant i\leqslant i_0$$

(здесь значок $\wedge$ *над* a_k *означает отсутствие* a_k*); кроме того,*

$$y_1=\frac{(1-p)^{l-1}\sum\limits_{k=i_0}^{2} a_1\cdots\hat{a}_k\cdots a_{i_0}-[(i_0-1)-p]\,a_2\cdots}{p\cdot\Delta(i_0)},$$

$$y_{s_i}=\frac{(1-p)^{l-1}\sum\limits_{k=i_0,\,k\neq i}^{2}\cdots\hat{a}_k\cdots{}_{i_0}+a_2\cdots a_{i_0}-(1-p)^{l-1}[(i_0-1)-p]a_1\cdots\hat{a}_i\cdots}{p\cdot\Delta(i_0)}$$

для $2\leqslant i\leqslant i_0$,

$$x_1=\frac{(1-\alpha)\,a_2\cdots a_{i_0}}{\Delta(i_0)},\qquad x_i=\frac{(1-\alpha)\,(1-p)^{l-1}a_1\cdots\hat{a}_i\cdots a_{i_0}}{\Delta(i_0)}\quad \text{для}\quad 2\leqslant i\leqslant i_0,$$

где α *— произвольное число в интервале* $0\leqslant\alpha<1$, $\alpha=\sum\limits_{s=i_0+1}^{m}x_s$, $x_s\geqslant 0$, m *— наибольший номер с* $a_m=v(i_0)$.

Доказательство. В этом случае номер 2 в Y участвует, $r_2=l=k_2^1$, и из следствия 9 видно, что номер 1 должен участвовать с двумя показателями l и $l-1$. Значит, номер 2 участвует в Y с двумя показателями 1 и 0. Пусть i_1 — наибольший номер из таких i, что $k_i^1=l$. По лемме 6, номера i_1+1, i_1+2, $\ldots$, n в Y не участвуют. Очевидно, номера 3, $\ldots$, i_1 могут участвовать в Y только с двумя показателями 1 и 0; следовательно, Y является стратегией из числа указанных в следствии 5, 2). Таким образом, для нахождения v, обозначив соответствующие y_s через y_1, y_{s_2}, $\ldots$, y_{s_i}, причем $y_1+y_{s_2}+\quad+y_{s_i}=1$, мы получаем систему уравнений следующего вида ($i\leqslant i_1$):

$$\begin{aligned}
&(1-p)^l a_1y_1+(1-p)^{l-1}a_1y_{s_2}+(1-p)^{l-1}a_1y_{s_3}+\quad+(1-p)^{l-1}a_1y_{s_i}=v(i),\\
&a_2y_1+(1-p)a_2y_{s_2}+a_2y_{s_3}+\quad+a_2y_{s_i}=v(i),\\
&a_3y_1+a_3y_{s_2}+(1-p)a_3y_{s_3}+\quad+a_3y_{s_i}=v(i),\\
&\\
&a_{i-1}y_1+a_{i-1}y_{s_2}+\quad+(1-p)a_{i-1}y_{s_{i-1}}+a_{i-1}y_{s_i}=v(i),\\
&a_iy_1+a_iy_{s_2}+\quad+a_iy_{s_{i-1}}+(1-p)a_iy_{s_i}=v(i);
\end{aligned}$$

здесь нужно найти i_0 ($i_0\geqslant 2$), для которого $v=v(i_0)$.

Этой системы достаточно для вычисления $v(i)$. Действительно, примем во внимание, что $y_{s_i}=1-y_1-\quad-y_{s_{i-1}}$ и проведем соответствующие преобразования ($i\geqslant 2$):

$$\begin{aligned}
&(1-p)^{l-1}a_1-v(i)=(1-p)^{l-1}a_1py_1,\\
&a_2-v(i)=a_2py_{s_2},\\
&a_3-v(i)=a_3py_{s_3},\\
&\\
&a_{i-1}-v(i)=a_{i-1}py_{s_{i-1}},\\
&v(i)-(1-p)a_i=a_ip\,(y_1+y_{s_2}+\quad+y_{s_{i-1}});
\end{aligned}$$

$$\frac{(1-p)^{l-1}a_1-v(i)}{(1-p)^{l-1}a_1}+\frac{a_2-v(i)}{a_2}+\frac{a_3-v(i)}{a_3}+\cdots+\frac{a_{i-1}-v(i)}{a_{i-1}}=$$
$$\frac{v(i)-(1-p)a_i}{a_i},$$

$$v(i)=\frac{(1-p)^{l-1}(i-p)a_1a_2\ldots a_i}{(1-p)^{l-1}a_1a_2\ldots a_{i-1}+(1-p)^{l-1}a_1\ldots a_{i-2}a_i+\ldots+(1-p)^{l-1}a_1a_2a_4\ldots a_i+(1-p)^{l-1}a_1a_3\ldots a_i+a_2\ldots a_i}=$$
$$=\frac{(1-p)^{l-1}(i-p)a_1a_2\cdots a_i}{(1-p)^{l-1}\sum\limits_{k=i}^{2}a_1\cdots\hat{a}_k\cdots a_i+a_2\cdots}=\frac{(1-p)^{l-1}(i-p)a_1a_2\cdots a_i}{\Delta(i)}$$

Отметим, что для любого i $(2\leqslant i\leqslant i_1)$ мы имеем

$$a_i-v(i)=\frac{a_i}{\Delta(i)}\{\Delta(i)-(1-p)^{l-1}(i-p)a_1\cdots a_{i-1}\}=$$
$$=\frac{a_i}{\Delta(i)}\{\Delta(i-1)\cdot a_i-(1-p)^{l-1}[(i-1)-p]a_1\cdot\quad\cdot a_{i-1}\},$$

а также

$$v(i)-v(i-1)=\frac{(1-p)^{l-1}a_1\cdots a_{i-1}}{\Delta(i)\cdot\Delta(i-1)}\{(i-p)a_i\cdot\Delta(i-1)-$$
$$-[(i-1)-p]\cdot\Delta(i)\}=\frac{(1-p)^{l-1}a_1\cdots a_{i-1}}{\Delta(i)\cdot\Delta(i-1)}\{(\Delta(i-1)\cdot a_i-(1-p)^{l-1}\times$$
$$\times[(i-1)-p]a_1\cdots a_{i-1}\}.$$

Следовательно, $a_i>v(i)>v(i-1)$ тогда и только тогда, когда $a_i>v(i-1)$. Номер i_0 легко находится.

Теперь легко вычислить y_1, y_{s_2}, $\ldots$, $y_{s_{i_0}}$, используя их явные выражения через $v(i_0)$ в системе уравнений. Отметим, что $y_1>0$, и при условиях $a_i>v(i-1)$ для $2\leqslant i\leqslant i_0$ имеем $y_{s_i}>0$, $2\leqslant i\leqslant i_0$.

Для x_1, $\quad x_{i_0}$, обозначив через α сумму $\sum\limits_{s>i_0}x_s$ таких $x_s\geqslant 0$, что $a_s=v(i_0)$, мы имеем систему

$$(1-p)^l a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\qquad+a_{i_0}x_{i_0}+v(i_0)\alpha=v(i_0),$$
$$(1-p)^{l-1}a_1x_1+(1-p)a_2x_2+a_3x_3+\qquad+a_{i_0}x_{i_0}+v(i_0)\alpha=v(i_0),$$
$$(1-p)^{l-1}a_1x_1+a_2x_2+(1-p)a_3x_3+\qquad+a_{i_0}x_{i_0}+v(i_0)\alpha=v(i_0),$$

$$(1-p)^{l-1}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\qquad+(1-p)a_{i_0}x_{i_0}+v(i_0)\alpha=v(i_0),$$

откуда $a_2x_2=\qquad=a_{i_0}x_{i_0}=(1-p)^{l-1}a_1x_1$, $(1-p)^{l-1}a_1x_1(i_0-p)=v(i_0)\cdot(1-\alpha)$, и мы получаем указанные выражения для x_i.

Ленинград

Поступило в редакцию 19.I.1968

Литература

1. М. Дрешер, Стратегические игры, теория и приложения, „Советское радио“, М., 1964.
2. Н. Н. Воробьев, Игра „нападение-защита, Лит. мат. сб., VIII, 3 (1968), 437–444.

VIENO PUOLĖJO LOŠIMAS PRIEŠ KELETĄ GYNĖJŲ

I. VRUBLEVSKAJA

(Reziumė)

Nagrinėjamas apibendrintas M. Drešerio [1] lošimas. Surastos jo sprendinio charakteristikos. Atskiri atvejai išnagrinėti pilnai.

A GAME OF THE ONE ATTACKER AGAINST SEVERAL DEFENDERS

I. VRUBLEVSKAJA

(Summary)

The game which is a generalisation of the problem discussed by Dresher [1] is investigated. Some characteristics of the solution are derived; in some particular cases the solution is obtained completely.