1968

УДК–517.5

О ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОКАЗАТЕЛЕ РЯДА ДИРИХЛЕ

Е. ДАГЕНЕ

Пусть аналитическая в полуплоскости $\mathrm{Re}z=x<0$ функция $f(z)$ представлена абсолютно сходящимся рядом Дирихле

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z=x+iy, \tag{1}$$

где

$$0<\lambda_1<\lambda_2< \qquad <\lambda_n \uparrow \infty. \tag{2}$$

Максимальным членом ряда (1) при фиксированном x называется число

$$\mu(x, f)=\mu(x)=\max_n |a_n| e^{\lambda_n x} \tag{3}$$

Этот максимум достигается при одном или нескольких в конечном числе значениях n. Наибольшее из этих значений n, которое обозначается через $\nu(x)$, называется центральным индексом, а число $\lambda_{\nu(x)}=\lambda(x)$ – центральным показателем. Для функции $f(z)$, определенной с помощью (1), верхняя грань

$$S(x, f)=\sup_{-\infty<y<+\infty} |f(x+iy)|<\infty, \ x<0,$$

так как ряд (1) сходится абсолютно для любого x, и

$$S(x,f)\leqslant \sum_{1}^{\infty} |a_n| e^{\lambda_n x}<\infty.$$

Значит, указанная функция $f(z)$ принадлежит классу π_0 (см. [4]) и для нее справедливы асимптотические соотношения, доказанные нами в [4], о производных функции из множества π_0. В настоящей работе функция $S(x, f)$ оценивается с помощью максимального члена и центрального показателя и исследуется связь, существующая между функцией $L(x, f)=\frac{S'(x,f)}{S(x, f)}$, построенной для ряда (1), ($S'(x, f)$ – производная справа) и центральных его показателем; рассматривается вопрос о взаимосвязи роста функции заданной рядом (1) с ростом последовательности его коэффициентов.

1. Итак, пусть ряд

$$f(z)=\sum_{1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \tag{1}$$

где

$$0<\lambda_1<\lambda_2< \qquad <\lambda_n\uparrow\infty, \tag{2}$$

абсолютно сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}z=x<0$.

По определению

$$\mu(x,f)=\mu(x)=|a_{\nu(x)}|e^{\lambda_{\nu(x)}x}=|a_{\nu(x)}|e^{\lambda(x)x}. \tag{4}$$

Покажем, что функции $\mu(x)$, $\lambda(x)$ и $\nu(x)$ не убывают, когда x возрастает.

Пусть $h>0$. По определению максимального члена

$$\mu(x+h]\geqslant|a_{\nu(x)}|e^{\lambda(x)(x+h)}.$$

Отсюда

$$\frac{\mu(x+h)}{\mu(x)}\geqslant e^{\lambda(x)h}. \tag{5}$$

С другой стороны

$$\mu(x)\geqslant|a_{\nu(x+h)}|e^{\lambda(x+h)x}$$

или

$$\frac{\mu(x+h)}{\mu(x)}\geqslant e^{\lambda(x+h)h}. \tag{6}$$

Неравенства (5) и (6) дают:

$$e^{\lambda(x)h}\leqslant\frac{\mu(x+h)}{\mu(x)}\leqslant e^{\lambda(x+h)h}.$$

И, следовательно,

$$\lambda(x)h\leqslant\ln\mu(x+h)-\ln\mu(x)\leqslant\lambda(x+h)h. \tag{7}$$

Из неравенства (7) следует, что $\mu(x)$, $\lambda(x)$ и $\nu(x)$ не убывают, когда x $(x<0)$ возрастает.

$\lambda(x)$ представляет собой кусочно-постоянную неубывающую функцию, непрерывную справа в точках разрыва. На каждом конечном интервале оси x таких точек имеется конечное число. Значит существует производная:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\lambda(x).$$

Отсюда и (7) следует теорема.

Теорема 1. *Функция* $\ln\mu(x)$ *есть выпуклая функция от* x.

Установим условия, при которых $\mu(x)$ стремится к бесконечности при $x\to0$. Заметим сначала, что, если $\lim\limits_{x\to0}\mu(x)=\infty$, то и $\lambda(x)$, а вместе с $\lambda(x)$ и $\nu(x)$ стремится к бесконечности. Действительно, из (7) имеем:

$$\ln\mu(x)-\ln\mu(x_0)\leqslant\lambda(x)(x-x_0),\quad 0>x>x_0\neq0.$$

Следовательно,

$$\lambda(x)\geqslant\frac{\ln\mu(x)-\ln\mu(x_0)}{x-x_0},$$

и

$$\lim_{x\to0}\lambda(x)\geqslant\lim_{x\to0}\frac{\ln\mu(x)-\ln\mu(x_0)}{x-x_0}=\infty.$$

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием для соотношения*

$$\lim_{x\to0}\mu(x)=\infty \tag{8}$$

является неограниченность последовательности коэффициентов $|a_n|$.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть выполнено (8), т.е.

$$\lim_{x\to 0} |a_{\nu(x)}| e^{\lambda(x)x} = \infty.$$

Тогда при $|x| < |x_0|$ $(x<0)$

$$|a_{\nu(x)}| e^{\lambda(x)x} > N\left(N > N(x_0)\right),$$

и

$$|a_{\nu(x)}| > Ne^{-\lambda(x)x},$$

а это значит, что последовательность коэффициентов $|a_n|$ неограничена, так как $x<0$ и $e^{-\lambda(x)x} > 1$.

Достаточность. Пусть теперь

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| = \infty.$$

По определению

$$\mu(x) \geqslant |a_n| e^{\lambda_n x}$$

для всех $x<0$ и любом постоянном n. Отсюда, переходя к пределу, находим

$$\lim_{x\to 0} \mu(x) \geqslant |a_n|,$$

т.е.

$$\lim_{x\to 0} \mu(x) = \infty.$$

2. Обозначим, по-прежнему,

$$S(x, f) = \sup_{-\infty<y<+\infty} |f(x+iy)|, \quad -\infty < x < 0.$$

Докажем следующее предложение.

Теорема 3. *Пусть* $f(z)$ $(-\infty \leqslant x = \mathrm{Re}\, z < 0)$ *аналитическая функция, заданная рядом* (1), *удовлетворяющим условию* (2). *Справедливо неравенство*:

$$\mu(x, f) \leqslant S(x, f). \tag{9}$$

Доказательство. Умножим ряд (1):

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$$

на $e^{-\lambda_m z}$, проинтегрируем его при постоянном x по y от $-T$ до $+T$ и разделим затем все полученное равенство на $2T$. Имеем:

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(z)\, e^{-\lambda_m z}\, dy = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(\lambda_n-\lambda_m)(x+iy)}\, dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(\lambda_n-\lambda_m)x} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i(\lambda_n-\lambda_m)y}\, dy. \tag{10}$$

Если $\lambda_n \neq \lambda_m$, то

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i(\lambda_n-\lambda_m)y}\, dy = \frac{1}{T(\lambda_n-\lambda_m)} \sin(\lambda_n-\lambda_m)T,$$

если же $\lambda_n = \lambda_m$, то

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i(\lambda_n - \lambda_m) y} \, dy = 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i(\lambda_n - \lambda_m) y} \, dy = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

Так как

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(z)\, e^{-\lambda_m z} \, dy \right| \leqslant e^{-\lambda_m x} \, S(x, f),$$

то отсюда и (10) вытекает, что

$$|a_m| \, e^{\lambda_m x} \leqslant S(x, f).$$

Последнее неравенство имеет место при любом m и поэтому так же и

$$\mu(x, f) = \max_m |a_m| \, e^{\lambda_m x} \leqslant S(x, f).$$

Теорема доказана.

3. Для доказательства следующих теорем нам понадобятся предложения типа Бореля—Неванлина (см. [4]):

Лемма 1. *Пусть* $u(x) > 0$ *— неубывающая и непрерывная справа функция на полусегменте* $-1 \leqslant x < 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = \infty$.

Пусть, далее $\varphi(t) > 0$ *— убывающая и непрерывная на полуоси* $t > 0$ *функция, причем*

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t) \, dt < \infty.$$

Тогда вне множества интервалов E *полусегмента* $-1 \leqslant x < 0$ *конечной логарифмической меры*)* *справедливо неравенство*

$$u(x + \tau) - u(x) < 1,$$

где

$$\tau \leqslant |x| \, \varphi(t).$$

Так как нас интересует поведение функции $f(z)$, когда $x \to 0$, то в дальнейшем ограничимся интервалом $-1 \leqslant x < 0$.

Теорема 4. *Пусть* $f(z)$ ($\mathrm{Re}\, z = x < 0$) *функция, представимая рядом* (1), *удовлетворяющим условию* (2), *причем* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n| = \infty$.

Пусть, далее,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0. \tag{11}$$

---

*) т. е. множество E с $\int\limits_E \frac{dt}{t} < \infty$.

Тогда вне некоторого множества интервалов E полусегмента $-1 \leqslant x < 0$ конечной логарифмической меры справедливо неравенство:

$$S(x, f) \leqslant 2\mu(x)\, e^{\frac{x\lambda(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}} \tag{12}$$

Доказательство. Определим функцию $n(t)$, равную числу членов последовательности $\{\lambda_n\}$, не превосходящих t. Теперь условие (11) можно заменить эквивалентным условием

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln n(t)}{t} = 0. \tag{11a}$$

Действительно, если $\lambda_n \leqslant t < \lambda_{n+1}$, $n(t) = n$ и

$$\frac{\ln n(t)}{t} \leqslant \frac{\ln n}{\lambda_n}$$

т.е. из условия, (11) следует (11a).

Обратно, если $\lambda_{n-1} < t \leqslant \lambda_n$, то $n(t) \geqslant n-1$,

$$\frac{\ln(n-1)}{\lambda_n} \leqslant \frac{\ln n(t)}{t}$$

и, следовательно, из (11a) следует (11).

Положим:

$$\sigma_1 = \sum_{n=\nu(x)+1}^{\infty} |a_n|\, e^{\lambda_n x} = \sum_{n=\nu(x)+1}^{\infty} |a_n|\, e^{\lambda_n(x+h)}\, e^{-\lambda_n h}, \quad h > 0;$$

$$\sigma_2 = \sum_{n=1}^{\nu(x)} |a_n|\, e^{\lambda_n x} = \sum_{n=1}^{\nu(x)} |a_n|\, e^{\lambda_n(x-h)}\, e^{\lambda_n h}, \quad h > 0.$$

Заметив, что

$$|a_n|\, e^{\lambda_n(x+h)} \leqslant \mu(x+h),$$

$$|a_n|\, e^{\lambda_n(x-h)} \leqslant \mu(x-h),$$

выводим:

$$\sigma_1 \leqslant \mu(x+h) \sum_{n=\nu(x)+1}^{\infty} e^{-\lambda_n h} = \mu(x+h) \int_{\lambda(x)}^{\infty} e^{-th}\, dn(t) =$$

$$= \mu(x+h) \left\{ e^{-th}\, n(t) \Big|_{\lambda(x)}^{\infty} + h \int_{\lambda(x)}^{\infty} e^{-th}\, n(t)\, dt \right\}, \tag{13}$$

$$\sigma_2 \leqslant \mu(x-h) \sum_{n=1}^{\nu(x)} e^{\lambda_n h} = \mu(x-h) \int_{\lambda_1}^{\lambda(x)} e^{th}\, dn(t) \Big\} =$$

$$= \mu(x-h) \left\{ e^{th}\, n(t) \Big|_{\lambda_1}^{\lambda(x)} - h \int_{\lambda_1}^{\lambda(x)} e^{th}\, n(t)\, dt \right\}. \tag{14}$$

Далее, в силу условия (11a)

$$n(t) = e^{\varepsilon(t)t},$$

где $\varepsilon(t)\to 0$, когда $t\to\infty$. Следовательно, при $0<h=\mathrm{const}$

$$0<e^{-th}n(t)=e^{-t[h-\varepsilon(t)]}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

(13) и (14) с учетом $n\Big((\lambda(x)\Big)=\nu(x)$ дают нам теперь:

$$\sigma_1\leqslant\mu(x+h)\left\{-\nu(x)e^{-\lambda(x)h}+h\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-th}n(t)\,dt\right\}=$$

$$=\mu(x+h)e^{-\lambda(x)h}\left\{he^{\lambda(x)h}\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-th}n(t)\,dt-\nu(x)\right\},$$

а

$$\sigma_2\leqslant\mu(x-h)e^{\lambda(x)h}\left\{\nu(x)-he^{-\lambda(x)h}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda(x)}e^{th}n(t)\,dt\right\}.$$

На основании неравенства (7):

$$\mu(x+h)\leqslant\mu(x)\,e^{\lambda(x+h)h}$$

мы заключаем, что

$$\sigma_1\leqslant\mu(x)\,e^{[\lambda(x+h)-\lambda(x)]h}\left\{he^{\lambda(x)h}\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-th}n(t)\,dt-\nu(x)\right\};\tag{15}$$

и

$$\sigma_2\leqslant\mu(x)\,e^{[\lambda(x)-\lambda(x-h)]h}\left\{\nu(x)-he^{-\lambda(x)h}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda(x)}e^{th}n(t)\,dt\right\}.\tag{16}$$

Фукнция $\lambda(x)>0$ — неубывающая с $\lim\limits_{x\to 0}\lambda(x)=\infty$, ступенчатая и непрерывная справа функция, т.е. $\lambda(x)$, а вместе с ней и функция $\ln\lambda(x)$ при $0>x>x_0$ удовлетворяет условиям леммы 1. Применив лемму 1 к функции:

$$u(x)=\ln^{1+\alpha}\lambda(x),\ \alpha>0,$$

полагая

$$\varphi(t)=\frac{1}{t\ln^{1+\alpha}t},$$

находим, что вне некоторого множества $E=E(\alpha)$ конечной логарифмической меры

$$\ln^{1+\alpha}\lambda(x+\tau)-\ln^{1+\alpha}\lambda(x)<1\tag{17}$$

при

$$\tau\leqslant\frac{|x|}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)\ln^{1+\alpha}\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}.$$

Так как при $0>x>x_0$ с достаточно малым $|x_0|$

$$\frac{1}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)\ln^{1+\alpha}\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}>\frac{1}{\ln^{1+2\alpha}\lambda(x)},$$

то ниже будем предполагать, что

$$\tau\leqslant\frac{|x|}{\ln^{1+2\alpha}\lambda(x)}$$

В соответствии с теоремой Логранжа о конечных приращениях, (17) дает нам:

$$[\lambda(x+\tau)]-\lambda(x)]\,(1+\alpha)\,\frac{\ln^{\alpha}\lambda(c)}{\lambda(c)}<1,\quad x\leqslant c\leqslant x+\tau.$$

Но, $\lambda(x)$ — неубывающая функция. Поэтому

$$\lambda(x+\tau)-\lambda(x)<\frac{\lambda(x+\tau)}{(1+\alpha)\ln^{1+\alpha}\lambda(x)} \tag{18}$$

При $|x|$ достаточно малом

$$\lambda(x)>\lambda(x+\tau)\left(1-\frac{1}{(1+\alpha)\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}\right)>\frac{1}{2}\lambda(x+\tau).$$

Итак,

$$\lambda(x+\tau)<2\lambda(x) \tag{19}$$

при

$$\tau\leqslant\frac{|x|}{\ln^{1+2\alpha}\lambda(x)},\quad x\notin E. \tag{20}$$

Вернемся к неравенствам (15) и (16). В силу (19) при

$$h=\frac{|x|}{\ln^{1+2\alpha}\lambda(x)}$$

получаем ($x\notin E$):

$$\sigma_1<\mu(x)\,e^{h\lambda(x)}\left\{he^{\lambda(x)h}\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-th}\,n(t)\,dt-\nu(x)\right\}, \tag{21}$$

$$\sigma_2<\mu(x)\,e^{h\lambda(x)}\left\{\nu(x)-he^{-\lambda(x)h}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda(x)}e^{th}\,n(t)\,dt\right\} \tag{22}$$

Из (21) и (22) далее следует, что

$$\sigma_1+\sigma_2<\mu(x)\,e^{\lambda(x)h}\,h\left\{e^{\lambda(x)h}\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-th}\,n(t)\,dt-\right.$$

$$\left.-e^{-\lambda(x)h}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda(x)}e^{th}\,n(t)\,dt\right\}<\mu(x)\,e^{2\lambda(x)h}\,h\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-th}\,n(t)\,dt.$$

По условию (11a)

$$n(t)<e^{\varepsilon t},\quad t>t_0(\varepsilon).$$

Пусть $\varepsilon<\frac{h}{2}$. Тогда

$$\sigma_1+\sigma_2<\mu(x)\,e^{2\lambda(x)h}\,h\int\limits_{\lambda(x)}^{\infty}e^{-\frac{th}{2}}\,dt=$$

$$=\mu(x)\,e^{2\lambda(x)h}\,h\cdot\frac{2}{-h}\,e^{-\frac{th}{2}}\Big|_{\lambda(x)}^{\infty}=2\mu(x)\,e^{\frac{3}{2}\lambda(x)h}$$

Итак, при

$$h=\frac{|x|}{\ln^{1+2\alpha}\lambda(x)},\quad x\notin E_0\left(\int\limits_{E_0}\frac{dt}{t}<\infty\right),$$

$$\sigma_1+\sigma_2<2\mu(x)\,e^{\frac{3|x|\lambda(x)}{2\ln^{1+2\alpha}\lambda(x)}}<2\mu(x)\,e^{\frac{|x|\lambda(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}}$$

так как при $|x|$ достаточно малом

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\ln^{\alpha}\lambda(x)}<1.$$

Но, $S(x,f)\leqslant\sigma_1+\sigma_2$, так что

$$S(x,f)\leqslant 2\mu(x)\,e^{\frac{|x|\,\lambda(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}}$$

$$x\notin E_0\left(\int\limits_{E_0}\frac{dt}{t}<\infty\right).$$

4. Сейчас докажем предложение об асимптотической связи между функцией

$$L(x,f)=\frac{S'(x,f)}{S(x,f)},$$

образованной для ряда (1), и центральным показателем.

По-прежнему, пусть

$$S(x,f)=\sup_{-\infty<y<+\infty}|f(x+iy)|,\quad L(x,f)=\frac{S'(x,f)}{S(x,f)}$$

($S'(x,f)$ — производная справа) и $\lambda(x)$ — центральный показатель ряда (1).

Теорема 5. *Пусть $f(z)$ функция, определенная рядом*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\lambda_n z}\ (\operatorname{Re} z=x<0) \tag{1}$$

с $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n\uparrow\infty$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|=\infty$.

Пусть, далее,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0$$

и

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{\ln\lambda(x)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\rho>1. \tag{23}$$

В этих условиях на некотором множестве точек отрезка $[-1,0]$ бесконечной логарифмической меры справедливо асимптотическое равенство:

$$L(x)=[1+o(1)]\,\lambda(x). \tag{24}$$

Доказательство. $\ln S(x,f)$ есть выпуклая функция от x (см. [3]), и поэтому

$$L(x)\tau\leqslant\ln S(x+\tau)-\ln S(x)\leqslant L(x+\tau)\,\tau.$$

В соответствии с (9) и (12) получаем:

$$L(x)\,\tau\leqslant\ln S(x+\tau)-\ln S(x)\leqslant\ln\mu(x+\tau)-\ln\mu(x)+\ln 2+ + \frac{|x+\tau|\,\lambda(x+\tau)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x+\tau)}; \tag{25}$$

$$L(x+\tau)\,\tau\geqslant\ln S(x+\tau)-\ln S(x)\geqslant\ln\mu(x+\tau)-\ln\mu(x)-\ln 2- - \frac{|x|\,\lambda(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)} \tag{26}$$

Используя неравенство (7), из (25) и (26) выводим:

$$L(x)\,\tau \leqslant \lambda(x+\tau)\,\tau + \ln 2 + \frac{|x+\tau|\,\lambda(x+\tau)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x+\tau)} \tag{27}$$

и

$$L(x+\tau)\,\tau \geqslant \lambda(x)\,\tau - \ln 2 - \frac{|x|\,\lambda(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)} \tag{28}$$

Разделим сейчас оба последних неравенства на τ:

$$L(x) \leqslant \lambda(x+\tau)\left[1 + \frac{\ln 2}{\tau\,\lambda(x+\tau)} + \frac{|x+\tau|}{\tau\ln^{1+\alpha}\lambda(x+\tau)}\right]; \tag{29}$$

$$L(x+\tau) \geqslant \lambda(x)\left[1 - \frac{\ln 2}{\tau\,\lambda(x)} - \frac{|x|}{\tau\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}\right] \tag{30}$$

При

$$\tau = \frac{|x|}{\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)} \tag{31}$$

из (18) вытекает неравенство:

$$\lambda(x) > \lambda(x+\tau)\left(1 - \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)\ln^{\frac{\alpha}{4}}\lambda(x)}\right), \quad x \notin E, \tag{32}$$

т.е.

$$\lambda(x+\tau) < \bigl(1+o(1)\bigr)\lambda(x). \tag{33}$$

Неравенства (29) и (30) с учетом (31), (32) и (33) дают нам теперь:

$$L(x) < \bigl(1+o(1)\bigr)\lambda(x)\left[1 + \ln 2\cdot\frac{\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)}{|x|\,\lambda(x)} + \right.$$

$$\left. + \frac{|x|\left(1+\dfrac{1}{\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)}\right)\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)}{|x|\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}\right]; \tag{34}$$

$$L(x+\tau) > \bigl(1+o(1)\bigr)\,\lambda(x+\tau)\left[1 - \ln 2\,\frac{\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)}{|x|\,\lambda(x)} - \right.$$

$$\left. - \frac{|x|\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x)}{|x|\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}\right] \tag{35}$$

Положим:

$$\varlimsup_{x\to 0}\frac{\ln\lambda(x)}{\ln\dfrac{1}{|x|}} = \rho > 1.$$

Существует последовательность $\{x_j\}$ $x_j \uparrow 0$ такая, что

$$\frac{\ln\lambda(x_j)}{\ln\dfrac{1}{|x_j|}} > \rho', \quad 1 < \rho' < \rho,\ j > j_0 \tag{36}$$

(если $\rho=\infty$, то ρ' – произвольное число). Если существует последовательность $\{x_j\}\ x_j\uparrow 0$, не принадлежащая исключенному по лемме 1 множеству E, которое удовлетворяет неравенству (36), т.е.

$$|x_j|>\lambda^{-\frac{1}{\rho'}}(x_j),$$

то на этой последовательности верно асимптотическое равенство

$$L(x)=\Big(1+o(1)\Big)\lambda(x). \tag{24}$$

Действительно, тогда

$$\frac{\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x_j)}{|x_j|\,\lambda(x_j)}<\frac{\ln^{1+\frac{\alpha}{2}}\lambda(x_j)}{\lambda^{1-\frac{1}{\rho'}}(x_j)}\underset{j\to\infty}{\to}0\quad(\rho'>1),$$

и равенство (24) следует из (34) и (35).

Покажем, что такие последовательности существуют. Наряду с последовательностью $\{x_j\}\ x_j\uparrow 0$, удовлетворяющей неравенству (36), рассмотрим последовательность интервалов

$$\frac{x_j}{2}>x>x_j. \tag{37}$$

Покажем, что для каждой точки интервала (37) верно (36). Через $\bar{x}_j$ обозначим точку интервала (37):

$$X_j=\frac{x_j}{2}>\bar{x}_j>x_j.$$

В силу возрастания функции $\lambda(x)$ находим:

$$\frac{\ln\lambda(X_j)}{\ln\frac{1}{|X_j|}}>\frac{\ln\lambda(\bar{x}_j)}{\ln\frac{1}{|\bar{x}_j|}}\cdot\frac{\ln\frac{1}{|\bar{x}_j|}}{\ln\frac{1}{|X_j|}}>\frac{\ln\lambda(x_j)}{\ln\frac{1}{|x_j|}}\cdot\frac{\ln\frac{1}{|x_j|}}{\ln\frac{1}{|X_j|}}.$$

Но,

$$\frac{\ln\frac{1}{|x_j|}}{\ln\frac{1}{|X_j|}}=\frac{\ln\frac{1}{|x_j|}}{\ln\frac{2}{|x_j|}}=\frac{1}{1+\frac{\ln 2}{\ln\frac{1}{|x_j|}}}\underset{j\to\infty}{\to}1,$$

$$\frac{\ln\frac{1}{|\bar{x}_j|}}{\ln\frac{1}{|X_j|}}<1.$$

Поэтому:

$$\frac{\ln\lambda(\bar{x}_j)}{\ln\frac{1}{|\bar{x}_j|}}>\frac{\ln\lambda(x_j)}{\ln\frac{1}{|x_j|}}\cdot\frac{1}{1+\frac{\ln 2}{\ln\frac{1}{|x_j|}}}>\rho',$$

как это следует из (36), если только $j>j_0'$ с достаточно большим j_0'. Итак, последовательность $\{\bar{x}_j\}\ \bar{x}_j\uparrow 0$ действительно удовлетворяет соотношению (36).

Вычислим теперь логарифмическую меру интервалов

$$\left(x_j,\ \frac{x_j}{2}\right)$$

Имеем:

$$\int\limits_{x_j}^{\frac{x_j}{2}} \frac{dt}{t} = \ln|x_j| - \ln 2 - \ln|x_j| = -\ln 2.$$

Значит,

$$\sum_{j=j_0'+1}^{\infty} \int\limits_{x_j}^{\frac{x_j}{2}} \frac{dt}{t} = -\sum_{j=j_0'+1}^{\infty} \ln 2 = -\infty,$$

и логарифмическая мера множества

$$E_1 = \bigcup_{j=j_0^1+1}^{\infty} \left(x_j,\ \frac{x_j}{2}\right)$$

бесконечна, в то время как исключенное в соответствии с леммой 1 множество E конечной логарифмической меры. Отсюда следует, что существует множество точек отрезка $(-1,\ 0)$ бесконечной логарифмической меры, в котором справедливо неравенство

$$\frac{\ln \lambda(x)}{\ln \frac{1}{|x|}} > \rho',\quad 1 < \rho' < \rho.$$

Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно показать тем же способом, которым мы только что пользовались, что при условии

$$\varliminf_{x\to 0} \frac{\ln \lambda(x)}{\ln \frac{1}{|x|}} = \mu > 1$$

равенство

$$L(x) = \Big(1 + o(1)\Big)\,\lambda(x)$$

имеет место вне некоторого множества интервалов отрезка $(-1,\ 0)$ конечной логарифмической меры.

5. Условие (23) теоремы 5 налагает ограничительные требования на рост центрального показателя $\lambda(x)$ для того, чтобы $\lambda(x)$ асимптотически равнялся $L(x)$ на последовательности значений $x_j \uparrow 0$. Условие (23) связано с ростом функции $S(x, f)$, но выражает это свойство в не совсем привычных терминах, что возможно, не очень полезно. Поэтому кажется целесообразным изучить связь существующую между ростом функции $\lambda(x)$ и $S(x, f)$, чему и посвящен настоящий пункт. В дальнейшем используются прежние обозначения:

$$S(x,\ f) = \sup_{-\infty < y < +\infty} |f(x+iy)|,$$

$\mu(x)$ — максимальный член, $\lambda(x)$ — центральный показатель, $\nu(x)$ — центральный индекс ряда (1). Число

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{\ln\ln S(x,f)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\rho$$

мы называем порядком функции $f(z)$.

Лемма 2. *Если*

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{\ln\ln S(x,f)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\rho, \tag{39}$$

то и

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{\ln\ln \mu(x)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\rho,\quad x\notin E, \tag{40}$$

где E — множество интервалов сегмента $(-1, 0)$ конечной логарифмической меры.

Доказательство. Имеем (см. теорему 3):

$$\mu(x)\leqslant S(x,f).$$

Отсюда с одной стороны следует, что

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{\ln\ln \mu(x)}{\ln\frac{1}{|x|}}\leqslant\rho. \tag{41}$$

С другой стороны, теорема 4 дает нам:

$$S(x,f)\leqslant 2\mu(x)e^{\frac{|x|\lambda(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}}\qquad x\notin E_1, \tag{42}$$

где E_1 — множество интервалов сегмента $(-1, 0)$ конечной логарифмической меры, т.е.

$$\ln S(x,f)\leqslant \ln\mu(x)+\frac{|x|\lambda(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}+\ln 2,\quad x\notin E_1. \tag{43}$$

Но функция $\ln\mu(x)$ выпуклая (см. теорему 1), так что

$$\ln\mu(x)>\ln\mu(x)-\ln\mu(x-h)>\lambda(x-h)\,h. \tag{44}$$

Если взять

$$h=\frac{|x|}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}$$

то в согласии с (19) верно неравенство:

$$\lambda(x-h)>\frac{1}{2}\lambda(x),\quad x>x_0,\quad x\notin E_0\Big(\int\limits_{E_0}\frac{dt}{t}<\infty\Big)$$

Теперь из (44) вытекает:

$$\ln\mu(x)>\frac{1}{2}\lambda(x)\frac{|x|}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}\qquad x\notin E \tag{44a}$$

(E — множество интервалов сегмента $(-1, 0)$ конечной логарифмической меры). Отсюда и из (43) сейчас заключаем:

$$\ln S(x,f)<3\ln\mu(x)+\ln 2.$$

Далее,

$$\ln\ln S(x,\ f) < \ln\ln \mu(x) + \ln\left[3 + \frac{\ln 2}{\ln \mu(x)}\right]$$

Последнее означает, что

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\ln\ln\cdot\mu(x)}{\ln\frac{1}{|x|}} \geqslant \rho \quad (x \notin E). \tag{45}$$

Соотношения (41) и (45) показывают, что

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\ln\ln \mu(x)}{\ln\frac{1}{|x|}} = \rho.$$

Лемма 3. *Если*

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\ln\ln S(x,\ f)}{\ln\frac{1}{|x|}} = \rho, \tag{46}$$

то

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\ln \lambda(x)}{\ln\frac{1}{|x|}} \leqslant \rho. \tag{47}$$

Доказательство. Из условия (46) на основании леммы 2 следует:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\notin E}} \frac{\ln\ln \mu(x)}{\ln\frac{1}{|x|}} = \rho$$

(E — множество интервалов сегмента $(-1, 0)$ конечной логарифмической меры). Выпуклость функции $\ln\mu(x)$ по x (см. теорему 1) дает:

$$\ln\mu(x) - \ln\mu(x_0) < \lambda(x)\ (x - x_0) < \lambda(x), \quad 0 > x > x_0 \neq 0,$$

т. е.

$$\frac{\ln \lambda(x)}{\ln\frac{1}{|x|}} > \frac{\ln\ \ln\ \mu(x)}{\ln\frac{1}{|x|}} + \frac{\ln\left(1 - \frac{\ln \mu(x_0)}{\ln \mu(x)}\right)}{\ln\frac{1}{|x|}} \tag{48}$$

Значит,

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln \lambda(x)}{\ln\frac{1}{|x|}} \geqslant \rho.$$

Лемма доказана.

Теперь из леммы 3 видно, что условие (23) в теореме 5 можно заменить условием:

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\ln\ \ln\ S(x,\ f)}{\ln\frac{1}{|x|}} = \rho > 1.$$

Теорема 5'. *Пусть $f(z)$ функция, определенная рядом*:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{\lambda_n z} \quad (\operatorname{Re} z = x < 0)$$

с $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \qquad < \lambda_n \uparrow \infty$.

Пусть, далее,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0$$

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\ \frac{\ln\ln S(x, f)}{\ln\dfrac{1}{|x|}}=\rho>1.$$

В этих условиях на некотором множестве точек отрезка $(-1, 0)$ *бесконечной логарифмической меры справедливо асимптотическое равенство*:

$$L(x)=\big(1+o(1)\big)\lambda(x).$$

6. Рассмотрим еще вопрос о взаимосвязи роста функции заданной рядом (1) с ростом последовательности его коэффициентов. Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}\ (\mathrm{Re}\, z=x<0),$$

где $0<\lambda_1<\lambda_2< \qquad <\lambda_n\uparrow\infty$.

Пусть, далее,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\ln\lambda_n}=\beta<\infty. \tag{49}$$

Для того, чтобы функция $f(z)$ *была порядка* ρ, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*:

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{\ln\ln|a_n|}{\ln\lambda_n}=\frac{\rho}{\rho+1} \tag{50}$$

Прежде чем доказать теорему 6, докажем следующее предложение.

Лемма 4. *Если*

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\ \frac{\ln\ln S(x, f)}{\ln\dfrac{1}{|x|}}=\rho, \tag{39}$$

то

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{\ln\ln|a_n|}{\ln\lambda_n}\leqslant\frac{\rho}{\rho+1} \tag{51}$$

Доказательство. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\, e^{\lambda_n z}$$

где $0<\lambda_1<\lambda_2< \qquad <\lambda_n\uparrow\infty$. Имеем:

$$|a_n|\, e^{\lambda_n x}\leqslant\mu(x)\leqslant S(x, f).$$

Отсюда на основании (39) при $|x|<|x_0|$ и $\rho'>\rho$, получаем:

$$|a_n|\, e^{\lambda_n x}<e^{\left(\frac{1}{|x|}\right)^{\rho'}}$$

$$\ln|a_n|<\left(\frac{1}{|x|}\right)^{\rho'}+|x|\lambda_n. \tag{52}$$

Выражение, стоящее в правой стороне последнего неравенства, достигает минимума, как нетрудно поверить, в точке

$$|x|=\left(\frac{\rho'}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\rho'+1}}$$

Поставив это значение $|x|$ в (52), находим следующую оценку:

$$\ln|a_n|<\left(\frac{\lambda_n}{\rho'}\right)^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}+\lambda_n\left(\frac{\rho'}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\rho'+1}}=$$

$$=\lambda_n^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}\left[\left(\frac{1}{\rho'}\right)^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}+(\rho')^{\frac{1}{\rho'+1}}\right]=\lambda_n^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}C_\rho,$$

где

$$C_\rho=\left(\frac{1}{\rho'}\right)^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}+(\rho')^{\frac{1}{\rho'+1}}$$

Таким образом,

$$\ln\ln|a_n|<\frac{\rho'}{\rho'+1}\ln\lambda_n+\ln C_\rho,$$

и в силу произвольности $\rho'>\rho$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\ln|a_n|}{\ln\lambda_n}\leqslant\frac{\rho}{\rho+1} \tag{51}$$

Лемма доказана.

Нашей целью сейчас является доказательство того факта, что в (51) имеет место знак равенства.

Доказательство теоремы 6. Нетрудно заметить, что условие (49) можно заменить эквивалентным условием:

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln n(t)}{\ln t}=\beta<\infty, \tag{49a}$$

где функция $n(t)$ равна числу членов последовательности $\{\lambda_n\}$, непревосходящих t. Далее, при $\beta'>\beta$ из (49а) следует, что

$$n(t)<C_0t^{\beta'}\ (C_0=\mathrm{const}). \tag{53}$$

Пусть выполнено соотношение (50). Тогда имеем:

$$|a_n|<C_1e^{\lambda_n^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}}\quad\rho'>\rho\ (C_1=\mathrm{const});$$

$$S(x,f)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,e^{\lambda_nx}<C_1\sum_{1}^{\infty}e^{\lambda_n^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}-|x|\lambda_n}=$$

$$=C_1\int_{\lambda_1}^{\infty}e^{t^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}-|x|t}dn(t)=C_1\int_{\lambda_1}^{\infty}e^{t^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}-|x+h|}\,{}^{-th}\,dn(t)\leqslant$$

$$\leqslant C_1e^{\max\limits_t\left\{t^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}-\quad|t\right\}}\int_{\lambda_1}^{\infty}e^{-th}\,dn(t),\quad h>0. \tag{54}$$

Так как

$$\frac{d}{dt}\left\{t^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}-|x+h|t\right\}=\frac{\rho'}{\rho'+1}t^{-\frac{1}{\rho'+1}}-|x+h|=0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\{t^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}-|x+h|t\right\}=-\frac{\rho'}{(\rho'+1)^2}t^{-\frac{1}{\rho'+1}-1}<0$$

при

$$t=\left(\frac{\rho'}{\rho'+1}\right)^{\rho'+1}\left(\frac{1}{|x+h|}\right)^{\rho'+1}$$

то при указанном значении t достигается максимум выражения:

$$t^{\frac{\rho'}{\rho'+1}}-|x+h|t.$$

Поставив значение t в (54) получаем:

$$S(x, f)<C_1 e^{\tilde{C}_\rho\left(\frac{1}{|x+h|}\right)^{\rho'}}\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}e^{-th}\,dn(t), \tag{55}$$

где

$$\tilde{C}_\rho=\left(\frac{\rho'}{\rho'+1}\right)^{\rho'}\cdot\frac{1}{\rho'+1}$$

Оценим теперь интеграл в правой части неравенства (55). Проинтегрируем этот интеграл сначала по частям

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}e^{-th}\,dn(t)=e^{-th}n(t)\Big|_{\lambda_1}^{\infty}+h\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}e^{-th}n(t)\,dt=$$

$$=-e^{-\lambda_1 h}+h\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}e^{-th}n(t)\,dt<C_0 h\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}e^{-th}t^{\beta'}\,dt. \tag{56}$$

Здесь мы воспользовались неравенством (53) и тем, что

$$^{-th}n(t)<C_0e^{-th}t^{\beta'}\xrightarrow[t\to\infty]{}0,$$

а $n(\lambda_1)=1$. Далее, полученный интеграл в правой стороне неравенства (56) опять интегрируем по частям $k=[\beta'+1]$ раз. Тогда под знаком интеграла t остается в отрицательной степени $\beta'-k$. Оценив подынтегральное выражение следующим образом:

$$e^{-th}t^{\beta'-k}<e^{-th}\lambda_1^{\beta'-k},$$

из (56) находим

$$\int^{\infty}e^{-th}\,dn(t)<C_0\Big[\lambda_1^{\beta'}e^{-\lambda_1 h}+\frac{\beta'}{h}\lambda_1^{\beta'-1}\,{}^{-\lambda_1 h}+\dots+$$

$$+\frac{\beta'(\beta'-1)\cdots(\beta'-k+1)}{h^{k-1}}\lambda_1^{\beta'-k}\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}e^{-th}\,dt\Big]=$$

$$=C_0e^{-\lambda_1 h}\left(\lambda_1^{\beta'}+\frac{\beta'}{h}\lambda_1^{\beta'-1}+\dots+\frac{\beta'(\beta'-1)\cdots(\beta'-k+1)}{h^k}\lambda_1^{\beta'-k}\right). \tag{57}$$

Возьмем $h=\frac{|x|}{2}$. Поставив это значение в (57), получаем:

$$\int_1^\infty e^{-th}\,dn(t) < C_0 e^{\lambda_1 \frac{|x|}{2}} \left[\lambda_1^{\beta'}\left(\frac{|x|}{2}\right)^k + \beta' \lambda_1^{\beta'-1}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{k-1} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \beta'(\beta'-1) \qquad (\beta'-k+1)\,\lambda_1^{\beta'-k}\right]\left(\frac{2}{|x|}\right)^k \tag{58}$$

Следовательно, при $|x|<|x_0|$

$$\int_1^\infty e^{-th}\,dn(t) < C_2\left(\frac{2}{|x|}\right)^k \tag{59}$$

где C_2 — некоторая постоянная, которая от x и k не зависит. Теперь (55) на основании (59) дает нам ($C=C_1C_2$):

$$S(x,f) < C\, e^{\tilde{c}_\rho\left(\frac{2}{|x|}\right)^{\rho'}}\left(\frac{2}{|x|}\right)^k = C\, e^{\tilde{c}_\rho\left(\frac{2}{|x|}\right)^{\rho'}+k\ln\frac{2}{|x|}} =$$

$$= C\, e^{\left(\frac{2}{|x|}\right)^{\rho'}\left[\tilde{c}_\rho + k\left(\ln\frac{2}{|x|}\right)\left(\frac{2}{|x|}\right)^{-\rho'}\right]} \tag{60}$$

т. е., при $|x|$ достаточно малом, (60) можно записать в следующем виде:

$$S(x,f) < C\, e^{C'\left(\frac{1}{|x|}\right)^{\rho'}} \qquad C' = \text{const}.$$

Так как $\rho'>\rho$ произвольно, то функция $f(z)$ имеет порядок не больше ρ. Отсюда с учетом (51) вытекает доказательство теоремы.

Замечание: Если условие (49):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln n}{\ln\lambda_n} = \beta < \infty$$

заменить условием

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln n}{\lambda_n^{1-\alpha}} = \gamma < \infty$$

с постоянным $0<\alpha<1$, то нам удается показать, что функция $f(z)$ имеет порядок ρ только при

$$\alpha > \frac{1}{\rho},$$

что возможно лишь, если $\rho>1$. Справедливо предложение:

Теорема 6′. *Пусть $f(z)$ функция определенная рядом:*

$$f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{\lambda_n z} \quad (-\infty < \operatorname{Re} z = x < 0)$$

с $0<\lambda_1<\lambda_2< \qquad <\lambda_n\uparrow\infty$.

Пусть, далее,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln n}{\lambda_n^{1-\alpha}} = \gamma < \infty\,(0<\alpha<1).$$

Для того, чтобы функция $f(z)$ была порядка ρ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln|a_n|}{\ln\lambda_n} = \frac{\rho}{\rho+1}, \quad \rho>1$$

Вильнюский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
28. II. 1968

Литература

1. Ж. Валирон, Аналитические функции, М. 1957.
2. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М.-Л. 1950.
3. Ш. Стрелиц, Асимптотические свойства функции, аналитической в полуплоскости, Лит. мат. сб., VIII, 2, 297-316 (1968).
4. Е. Дагене, Асимптотические свойства функции, аналитической в полуплоскости, Лит. мат. сб., VIII, 2, 243-264 (1968).

APIE DIRICHLE EILUTĖS CENTRINĮ RODIKLĮ

E. DAGIENĖ

(*Reziumė*)

Sakykime,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z} \quad (0<\lambda_1<\lambda_2< \quad <\lambda_n \uparrow \infty) \tag{1}$$

yra absoliučiai konverguojanti pusplokštumėje $\operatorname{Re} z=x<0$ Dirichle eilutė. Skaičius

$$\mu(x)=\max_n |a_n| e^{\lambda_n x}$$

yra vadinamas maksimaliniu nariu. Didžiausia reikšmė n, prie kurios pasiekiamas maksimumas, $\nu(x)$ vadinamas centriniu indeksu, o $\lambda_{\nu(x)}=\lambda(x)$ – centriniu rodikliu. Funkcijos $f(z)$ eile vadiname skaičių ρ:

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\ln\ln S(x,f)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\rho$$

$$\left(S(x,f)=\sup_{-\infty<y<+\infty}|f(x+iy)|\right).$$

Štai keletas straipsnyje įrodomų dėsnių.

4 teorema. *Sakykime, Dirichle eilutė*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$$

$(0<\lambda_1<\lambda_2< \quad <\lambda_n \uparrow \infty)$ *konverguoja pusplokštumėje* $x<0$.

Jeigu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}=0,$$

tai visoje atkarpoje $-1<x<0$, *išskyrus, gal būt, baigtinio logaritmo mato aibę* $E\left(\int_E \frac{dt}{t}<\infty\right)$, *galioja nelygybė*

$$S(x,f)\leqslant 2\mu(x)\, e^{\frac{x\lambda(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}}$$

5′ teorema. *Jeigu funkcija $f(z)$ tenkina 4 teoremos sąlygas ir jos eilė $\rho>1$, tai tam tikroje intervalo* (-1, 0) *begalinio logaritminio mato aibėje galioja priklausomybė*

$$L(x, f) = \left(1+o(1)\right)\lambda(x),$$

kur $L(x, f) = \dfrac{S'(x, f)}{S(x, f)}$ $\left(S'(x, f)\right.$ – *išvestinė iš dešinės*$\left.\right)$.

Suformuluosim dar šitokią teoremą.

6 teorema. *Tarkime, kad eilutė*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$$

kur λ_n *tenkina sąlygas*:

$$0<\lambda_1<\lambda_2< \quad <\lambda_n \uparrow \infty$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} = \beta < \infty,$$

konverguoja pusplokštumėje $x<0$.

Būtina ir pakankama sąlyga, kad funkcija $f(z)$ *būtų eilės* ρ *yra šitokia*:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln|a_n|}{\ln\lambda_n} = \frac{\rho}{\rho+1}$$

ON THE CENTRAL POWER OF THE DIRICHLET SERIES

E. DAGIENĖ

(*Summary*)

Let

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z} \quad (0<\lambda_1<\lambda_2< \quad \lambda_n \uparrow \infty)$$

be the Dirichlet series converging absolutely in the half-plane $x<0$. The number

$$\mu(x) = \max_n |a_n| e^{\lambda_n x}$$

is called the maximum term. The greatest of the n under which the $\mu(x)$ is achieved is called the central index and denote $\nu(x)$. $\lambda=\lambda_{\nu(x)}=\lambda(x)$ is called the centra power. The number

$$\rho = \overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\ln\ln S(x, f)}{\ln\dfrac{1}{|x|}} \quad \left(S(x, f) = \sup_{-\infty<y<+\infty} f(x+iy)\right)$$

is called the order of function $f(z)$.

We shall list several theorems proved in the paper.

Theorema 4. *Let the Dirichlet series*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z} \quad (0<\lambda_1<\lambda_2< \cdot \quad <\lambda_n \uparrow \infty)$$

converge in the half-plane $x<0$.

If

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0,$$

then in the whole interval $-1<x<0$, *except maybe the set* E *of finite logarithmic measure*

$$\left(\int_E \frac{dt}{t} < \infty\right),$$

the inequality

$$S(x, f) \leqslant 2\, e^{\frac{|x|\,\lambda(x)}{\ln^{1+\alpha}\lambda(x)}}\, \mu(x)$$

holds.

Theorem 5′. *Let the function* $f(z)$ *of oder* $\rho>1$ *satisfy the conditions of the theorem* 4. *Then .n the interval* $(-1, 0)$ *there exists the set of infinite logarithmic measure in which the relation*

$$L(x, f) = \Big(1 + o(1)\Big)\, \lambda(x)$$

$\left(L(x, f) = \dfrac{S'(x, f)}{S(x, f)},\ S'(x, f)\right.$ *denotes the right derivative*$\Big)$ *holds.*

Theorem 6. *Let the series*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{\lambda_n z}$$

converge in the half-plane $x<0$, *where* λ_n *satisfy the conditions*

$$0<\lambda_1<\lambda_2< \quad <\lambda_n \uparrow \infty$$

and

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} = \beta < \infty.$$

The necessary and sufficient condition for the function $f(z)$ *to be of order* ρ *is*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\ln \ln |a_n|}{\ln \lambda_n} = \frac{\rho}{\rho+1}$$