VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1968

УДК — 517.8

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ (III)

А. БАКШТИС

1. Введение. Последовательность комплексных чисел $f(m), m=1, 2, 3, \ldots$, называется аддитивной или мультипликативной арифметической функцией в зависимости от того, имеет ли место для всех взаимно простых m, n

$$f(mn)=f(m)+f(n)$$

или

$$f(mn)=f(m)f(n).$$

Если, кроме того, еще $f(p^\alpha)=f(p)$ для $\alpha=2, 3, \ldots$ и для всех простых чисел p, то $f(m)$ называется сильно аддитивной (соответственно сильно мультипликативной) функцией.

Через $\nu_n\{\ldots\}$ будем обозначать частоту целых положительных чисел $m\leqslant n$, удовлетворяющих условиям, которые будут указаны в скобках вместо многоточия; B – ограниченная по модулю функция, не всегда одна и та же.

Главной задачей вероятностной теории чисел является решение вопроса о сходимости при $n\to\infty$ распределения

$$\nu_n\{f(m)\in A\}=\frac{1}{n}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ f(m)\in A}} 1$$

к некоторому предельному распределению $P(A)$. В более общей постановке этой задачи рассматриваются соответствующим образом нормированные арифметические функции. Для вещественных аддитивных функций этот вопрос получил исчерпывающее решение в монографии [1], на идеях и методах которой основана настоящая работа.

Как показано в заметках [2, 3], существование предельных законов распределения вещественных мультипликативных арифметических функций $g(m)$ тесно связано с поведением рядов

$$\sum_p \frac{(|g(p)|-1)^*}{p}, \tag{1}$$

$$\sum_p \frac{((|g(p)|-1)^*)^2}{p}, \tag{2}$$

где

$$x^*=\begin{cases} x & \text{для } |x|\leqslant 1,\\ 1 & \text{для } |x|>1.\end{cases}$$

Именно, в [2] мы занимались случаем, когда оба ряда (1) и (2) сходятся. В [3] рассматривали случай, когда сходится только ряд [2]. В настоящей работе дается решение поставленной задачи для некоторого класса сильно мультипликативных функций в предположении, что ряд (2) расходится.

Сперва заметим, что если сильно мультипликативная функция $g(m)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{g(p)=0} \frac{1}{p} = +\infty,$$

то для любых постоянных $A_n > 0$ и $B_n > 0$ при $n \to \infty$

$$\nu_n\{A_n |g(m)|^{B_n} \operatorname{sgn} g(m) < x\} \to \varepsilon(x),$$

где

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \leqslant 0, \\ 1 & \text{для} \quad x > 0. \end{cases}$$

Действительно, при любых фиксированных $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$ имеем

$$\nu_n\{A_n |g(m)|^{B_n} \operatorname{sgn} g(m) < x_1\} + \nu_n\{g(m) = 0\} +$$
$$+ \nu_n\{A_n |g(m)|^{B_n} \operatorname{sgn} g(m) \geqslant x_2\} \leqslant 1. \tag{3}$$

Кроме того, если $\mathbf{T}$ – некоторое множество попарно взаимно простых чисел $a_k > 1$, то [4, стр. 14]

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n\{a_k \nmid m,\ a_k \in \mathbf{T}\} = \prod_{a_k \in \mathbf{T}} \left(1 - \frac{1}{a_k}\right). \tag{4}$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n\{g(m) = 0\} = 1 - \lim_{n\to\infty} \nu_n\{g(m) \neq 0\} =$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \nu_n\{p \nmid m,\ g(p) = 0\} = 1 - \prod_{g(p)=0} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1, \tag{5}$$

и наше утверждение следует из (3) и (5).

Таким образом, естественно рассматривать только такие мультипликативные функции $g(m)$, для которых

$$\sum_{g(p)=0} \frac{1}{p} < +\infty. \tag{6}$$

Ради справедливости надо заметить, что мультипликативные функции, не удовлетворяющие условию (6), тоже могут быть интересным предметом исследования, когда ставится вопрос о быстроте сходимости к предельному распределению. Этим, однако, мы заниматься не будем.

Таким образом, согласно неравенству

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{\left((|g(p)| - 1)^*\right)^2}{p} \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant n \\ g(p) \neq 0}} \frac{\ln^2 |g(p)|}{p} + \sum_{\substack{p \leqslant n \\ g(p) = 0}} \frac{1}{p}$$

в случае расходимости ряда (2) необходимо принять, что при $n \to \infty$

$$B^2(n)=\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)\neq 0}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\to\infty.$$

Ввиду этих обстоятельств, а также причин, вызванных применяемым методом, мы будем ограничиваться рассмотрением только таких вещественных сильно мультипликативных функций $g(m)$, которые удовлетворяют условию (6) и при $n\to\infty$

1) $B(n)\to\infty$,

2) существует неограниченно возрастающая функция $r=r(n)$ такая, что

$$\frac{\ln r}{\ln n}\to 0,\qquad \frac{B(r)}{B(n)}\to 1,$$

3) $\nu_n\left\{\prod_{\substack{p\mid m\\ p>r}} g(p)<0\right\}\to 0.$

Класс таких функций обозначим $\mathfrak{M}_H$.

Ясно, что сильно мультипликативные функции, принимающие отрицательные значения только при ограниченном числе простых чисел p, удотвлетворяют условию 3). В частности, этому условию удовлетворяют сильно мультипликативные функции, принимающие отрицательное значение только при $p=2$.

Основные результаты изложены в § 3 (теоремы 1–4) и § 4 (теоремы 5, 6).

2. Сближение законов распределения. Для решения рассматриваемой задачи мы воспользуемся теоретико-вероятностной интерпретацией арифметических функций, данной Й. П. Кубилюсом в [1, стр. 47–50]. Как известно, для этой цели строятся два вероятностных пространства $\{E, \mathfrak{F}, \nu_n\}$ и $\{E, \mathfrak{F}, \mathbf{P}\}$, в которых множество элементарных событий $E=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, а алгебра событий $\mathfrak{F}$ определяется следующим образом. Пусть $\alpha_p(m)$ означает наибольшее целое $\alpha\geqslant 0$, удовлетворяющее условию $p^\alpha\mid m$. Положим

$$\gamma_p=\left[\frac{\ln r}{\ln p}\right],\qquad \beta_p(m)=\min\{\alpha_p(m),\ \gamma_p\},$$

$$E(p^\alpha)=\{m:\ m\leqslant n,\quad \beta_p(m)=\alpha\},$$

$$\pi(p^\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{p^\alpha}\left(1-\dfrac{1}{p}\right) & \text{для}\quad 0\leqslant\alpha<\gamma_p,\\[2mm] \dfrac{1}{p^\alpha} & \text{для}\quad \alpha=\gamma_p.\end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{F}$ – наименьшая алгебра подмножеств множества E, содержащая все множества $E(p^\alpha)$, $p\leqslant r$, $\alpha=0, 1, 2, \ldots, \gamma_p$.

Вероятностная мера первого вероятностного пространства равна $\nu_n(A)=$ $=\nu_n\{m\in A\}$. Поскольку каждое событие $A\in\mathfrak{F}$ представимо в виде суммы

$$A=\bigcup_k{}'\bigcap_{p\leqslant r}E\left(p^{\alpha_p(k)}\right),$$

где суммирование ведется по некоторым k вида

$$k=\prod_{p\leqslant r}p^{\alpha_p},\qquad 0\leqslant\alpha_p\leqslant\gamma_p,$$

вероятностную меру другого пространства можно определить по формуле

$$\mathbf{P}(A)=\sum_k{}' \prod_{p\leq r} \pi(p^{\alpha_p(k)}), \quad A\in\mathfrak{F},$$

где сумма берется по тем же k. В упомянутой монографии доказано, что при $n\to\infty$

$$\nu_n(A)-\mathbf{P}(A)\to 0 \tag{7}$$

равномерно относительно $A\in\mathfrak{F}$.

В данной теоретико-вероятностной интерпретации рассматривается не сама мультипликативная функция $g(m)$, а некоторым образом „урезанная" функция

$$g(m)_r=\prod_{p\leq r} g(p^{\beta_p(m)}).$$

Для этой цели на вероятностном пространстве $\{E, \mathfrak{F}, \nu_n\}$ определяются случайные величины

$$g^{(p)}(m)=g(p^{\beta_p(m)}), \qquad p\leq r,$$

принимающие значения $g(p^\alpha)$, $\alpha=0, 1, \ldots, \gamma_p$, с вероятностями $\nu_n\{\beta_p(m)=\alpha\}$. На вероятностном пространстве $\{E, \mathfrak{F}, \mathbf{P}\}$, в свою очередь, определяются независимые случайные величины ξ_p, $p\leq r$, принимающие те же самые значения $g(p^\alpha)$, но с вероятностями $\pi(p^\alpha)$.

Если $g(m)$ является сильно мультипликативной, то, поскольку $g(p^\alpha)=g(p)$ для $\alpha=2, 3, \ldots$, случайные величины ξ_p, $p\leq r$ принимают только два значения $g(p)$ и 1 с вероятностями $\frac{1}{p}$ и $1-\frac{1}{p}$, соответственно.

Пусть A и E' — некоторые множества из $\mathfrak{F}$, причем E' — не пустое. Обозначим, как обычно,

$$\nu_n\{A\mid E'\}=\frac{\nu_n\{A\cap E'\}}{\nu_n\{E'\}}.$$

Как замечено в монографии [1], при изучении предельных законов распределения мультипликативных функций целесообразно рассматривать меру $\nu_n\{A\mid E'\}$, где $E'=\{m: m\leq n,\ g(m)\neq 0\}$. Для мультипликативных функций $g(m)\in\mathfrak{M}$н это всегда возможно, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n\{E'\}=\lim_{n\to\infty}\nu_n\{p\nmid m,\ g(p)=0\}=\prod_{g(p)=0}\left(1-\frac{1}{p}\right)>0,$$

откуда для всех достаточно больших n имеем $\nu_n\{E'\}>0$.

Таким образом, ввиду (7) находим, что

$$\nu_n\{A_n|g(m)_r|^{B_n}\operatorname{sgn} g(m)_r<x\mid g(m)\neq{}_r 0\}=$$
$$=\mathbf{P}\left\{A_n\prod_{p\leq r}|\xi_p|^{B_n}\operatorname{sgn}\xi_p<x\ \middle|\ \xi_p\neq 0,\ p\leq r\right\}=o(1),\ n\to\infty,$$

где $A_n>0$ и $B_n>0$ — некоторые постоянные. Следовательно, вместо „урезанных" функций $g(m)_r$ мы можем рассматривать предельные законы распределения произведений независимых случайных величин ξ_p, $p \leqslant r$. Вернуться же обратно к самим мультипликативным функциям $g(m)$ можно с помощью следующей леммы, являющейся аналогом леммы 4.1 [1].

Лемма 1. *Пусть даны две последовательности тождественно не равны 0 вещественных арифметических функций*

$$u_1(m),\ u_2(m),\ \ldots,\ u_n(m),\ \ldots,$$
$$v_1(m),\ v_2(m),\ \ldots,\ v_n(m),\ \ldots,$$

и пусть для любого $\varepsilon>0$ при $n\to\infty$

$$\nu_n\left\{\left(\left|\frac{u_n(m)}{v_n(m)}\right|-1\right)^2>\varepsilon \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\right\}\to 0,$$
$$\nu_n\{u_n(m)\,v_n(m)<0 \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\}\to 0.$$

Если

$$\nu_n\{u_n(m)<x \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\}$$

при $n\to\infty$ стремится к некоторой функции распределения $F(x)$ в ее точках непрерывности, то тогда и

$$\nu_n\{v_n(m)<x \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\}$$

при $n\to\infty$ стремится к $F(x)$ в ее точках непрерывности.

Доказательство. Пусть $0<\varepsilon<1$, а $x\geqslant 0$ и $x(1\pm\sqrt{\varepsilon})$ — точки непрерывности $F(x)$. Поскольку для $x\geqslant 0$ и достаточно большого n имеют место неравенства

$$\nu_n\{v_n(m)<x \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\}+\nu_n\left\{\left(\left|\frac{u_n(m)}{v_n(m)}\right|-1\right)^2>\right.$$
$$\left.>\varepsilon \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\right\}+\nu_n\{u_n(m)\,v_n(m)<0 \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\}\geqslant$$
$$\geqslant \nu_n\{u_n(m)<x(1-\sqrt{\varepsilon}) \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\},$$
$$\nu_n\{u_n(m)<x(1+\sqrt{\varepsilon}) \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\}+\nu_n\left\{\left(\left|\frac{u_n(m)}{v_n(m)}\right|-1\right)^2>\right.$$
$$\left.>\varepsilon \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\right\}+\nu_n\{u_n(m)\,v_n(m)<0 \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\}\geqslant$$
$$\geqslant \nu_n\{v_n(m)<x \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\},$$

то

$$F\left(x(1-\sqrt{\varepsilon})\right)\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\ \nu_n\{v_n(m)<x \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\}\leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\ \nu_n\{v_n(m)<x \mid u_n(m)\,v_n(m)\neq 0\}\leqslant F\left(x(1+\sqrt{\varepsilon})\right).$$

Так как x — точка непрерывности $F(x)$, то отсюда следует утверждение леммы для $x\geqslant 0$. Аналогично этому для $x<0$ утверждение леммы следует из неравенств

$$\nu_n\{v_n(m)<x\mid u_n(m)v_n(m)\neq 0\}+\nu_n\left\{\left(\left|\frac{u_n(m)}{v_n(m)}\right|-1\right)^2>\right.$$

$$\left.>\varepsilon\mid u_n(m)v_n(m)\neq 0\right\}+\nu_n\{u_n(m)v_n(m)<0\mid u_n(m)v_n(m)\neq 0\}\geqslant$$

$$\geqslant\nu_n\{u_n(m)<x(1+\sqrt{\varepsilon})\mid u_n(m)v_n(m)\neq 0\},$$

$$\nu_n\{u_n(m)<x(1-\sqrt{\varepsilon})\mid u_n(m)v_n(m)\neq 0\}+\nu_n\left\{\left(\left|\frac{u_n(m)}{v_n(m)}\right|-1\right)^2>\right.$$

$$\left.>\varepsilon\mid u_n(m)v_n(m)\neq 0\right\}+\nu_n\{u_n(m)v_n(m)<0\mid u_n(m)v_n(m)\neq 0\}\geqslant$$

$$\geqslant\nu_n\{v_n(m)<x\mid u_n(m)v_n(m)\neq 0\},$$

имеющих место для достаточно большого n.

Следствие. *Если при* $n\to\infty$ $B_n=B_n'+o(B_n')$, $A_n=A_n'+o(B_n')$, *и одна из функций распределения*

$$\nu_n\left\{e^{-\frac{A_n}{B_n}}|g(m)|^{\frac{1}{B_n}}\operatorname{sgn}g(m)<x\mid g(m)\neq 0\right\},\tag{8}$$

$$\nu_n\left\{e^{-\frac{A_n'}{B_n'}}|g(m)|^{\frac{1}{B_n'}}\operatorname{sgn}g(m)<x\mid g(m)\neq 0\right\}\tag{9}$$

сходится к некоторой предельной функции распределения $F(x)$, *непрерывной в точке* $x=0$, *то и другая также сходится к* $F(x)$.

В самом деле, пусть, например, (8) сходится к предельной функции распределения $F(x)$, непрерывной в точке $x=0$. Очевидно, для любого фиксированного $0<\varepsilon<1$ и достаточно большого n имеем

$$\delta_n=\nu_n\left\{\left(e^{-\frac{A_n}{B_n}+\frac{A_n'}{B_n'}}|g(m)|^{\frac{1}{B_n}-\frac{1}{B_n'}}-1\right)^2>\varepsilon\mid g(m)\neq 0\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\nu_n\left\{e^{-\frac{A_n}{B_n}}|g(m)|^{\frac{1}{B_n}}>u\mid g(m)\neq 0\right\}+$$

$$+\nu_n\left\{e^{-\frac{A_n}{B_n}}|g(m)|^{\frac{1}{B_n}}<\frac{1}{u}\ \middle|\ g(m)\neq 0\right\},$$

где $u>0$ — любое фиксированное число. Если u и $\frac{1}{u}$ — точки непрерывности $F(x)$, то отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n\leqslant 1-F(u)+F(-u)+F\left(\frac{1}{u}\right)-F\left(-\frac{1}{u}\right).$$

Полагая здесь $u\to\infty$, находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0,$$

т. е. — условия леммы удовлетворены. Аналогично этому доказывается и другой случай.

В дальнейшем нам будут нужны еще три леммы, две из которых являются обобщением соответствующих лемм из [1], а третья — аналог закона больших чисел для мультипликативных функций. Пусть P — некоторое множество целых положительных степеней простых чисел p^α, удовлетворяющих условию

$$\sum_{p^\alpha \in P} \frac{1}{p^\alpha} < +\infty.$$

Множество всех целых положительных чисел $m \leqslant n$, в каноническое разложение которых входят только $p^\alpha \in P$, обозначим E_P. Далее, для любой комплекснозначной аддитивной арифметической функции $f(m)$ положим

$$A_P(n) = \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in P}} \frac{f(p)}{p},$$

$$B_P^2(n) = \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in P}} \frac{|f(p)|^2}{p}, \qquad D_P^2(n) = \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant n \\ p^\alpha \in P}} \frac{|f(p^\alpha)|^2}{p^\alpha}.$$

Лемма 2. *Для любой комплекснозначнсй аддитивной арифметической функции* $f(m)$

$$\sum_{m \in E_P} |f(m) - A_P(n)|^2 = Bn\, D_P^2(n).$$

Доказательство. Введем аддитивную арифметическую функцию $f'(m)$, положив

$$f'(p^\alpha) = \begin{cases} f(p^\alpha), & \text{если } p^\alpha \in P, \\ 0, & \text{если } p^\alpha \notin P. \end{cases}$$

Тогда для функции $f'(m)$ имеем

$$A'(n) = \sum_{p \leqslant n} \frac{f'(p)}{p} = \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in P}} \frac{f(p)}{p} = A_P(n),$$

$$D'(n) = \left\{ \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{|f(p^\alpha)|^2}{p^\alpha} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant n \\ p^\alpha \in P}} \frac{|f(p^\alpha)|^2}{p^\alpha} \right\}^{\frac{1}{2}} = D_P(n).$$

Наконец, согласно лемме 3.1 из [1] находим, что

$$\sum_{m \in E_P} |f(m) - A_P(n)|^2 \leqslant \sum_{m \leqslant n} |f'(m) - A'(n)|^2 = Bn \left((D'(n) \right)^2 = Bn\, D_P^2(n).$$

Замечание. *Для любой комплекснозначной сильно аддитивнсй функции* $f(m)$ *применением леммы* 3.1[a] *из* [1] *получаем*

$$\sum_{m \in E_P} |f(m) - A_P(n)|^2 = Bn\, B_P^2(n).$$

Лемма 3. *Если $f(m)$ — вещественная аддитивная арифметическая функция с условием $D_P(n)\to\infty$; $\lambda>0$ — фиксированное число, то*

$$\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant n\\ p^\alpha\in P}}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^{\alpha+\lambda}}=o\left(D_P^2(n)\right),\qquad \sum_{\substack{p^\alpha\leqslant n\\ p^\alpha\in P}}\frac{|f(p^\alpha)|}{p^{\alpha+1}}=o\left(D_P(n)\right),$$

$$\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant n\\ \alpha>1\\ p^\alpha\in P}}\frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha}=o\left(D_P(n)\right),\qquad \sum_{p\leqslant n}\left(\sum_{\substack{\alpha=1\\ p^\alpha\in P}}^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)=o\left(D_P^2(n)\right).$$

Доказательство этой леммы ничем не отличается от доказательства леммы 4.2 из [1], с той только разницей, что к условиям суммирования необходимо еще прибавить $p^\alpha\in P$.

Приступим теперь к выводу аналога закона больших чисел для мультипликативной функции $g(m)$. В качестве множества P теперь мы возьмем множество всех p^α, $\alpha\geqslant 1$, для которых $g(p^\alpha)\neq 0$. Следовательно, $E_P=\{m:m\leqslant n,\ g(m)\neq 0\}$. Для любой комплекснозначной мультипликативной функции $g(m)$ положим

$$A(n)=\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)\neq 0}}\frac{\ln|g(p)|}{p},\qquad D^2(n)=\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant n\\ g(p^\alpha)\neq 0}}\frac{\ln^2|g(p^\alpha)|}{p^\alpha}.$$

Роль величины $D^2(n)$ по отношению к сильно мультипликативной функции играет $B^2(n)$, определенная во введении.

Лемма 4. *Для любой комплекснозначной мультипликативной арифметической функции $g(m)$, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{g(p^\alpha)=0}\frac{1}{p^\alpha}<+\infty,$$

при каждом $\varepsilon>0$ и всех достаточно больших n

$$\nu_n\left\{\left(|g(m)|e^{-A(n)}-1\right)^2>\varepsilon\,|\,g(m)\neq 0\right\}=\frac{B\,D^2(n)}{\ln^2(1+\sqrt{\varepsilon})}.$$

Доказательство. Введем аддитивную арифметическую функцию $f(m)$, положив

$$f(p^\alpha)=\begin{cases}\ln|g(p^\alpha)|, & \text{если}\quad g(p^\alpha)\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad g(p^\alpha)=0.\end{cases}$$

Величины $A_P(n)$, $B_P(n)$ и $D_P(n)$, соответствующие $f(m)$, очевидно, равны соответственно $A(n)$, $B(n)$ и $D(n)$. Множество всех целых положительных чисел $m\leqslant n$, удовлетворяющих условию

$$\left(|g(m)|e^{-A(n)}-1\right)^2>\varepsilon,$$

обозначим K. Тогда, опираясь на лемму 2 находим, что

$$\nu_n\{m\in K\cap E_P\}=\frac{B\,D^2(n)}{\ln^2(1+\sqrt{\varepsilon})},$$

а, вместе с тем,

$$\nu_n\left\{\left(|g(m)|\,e^{-A(n)}-1\right)^2>\varepsilon\,|\,g(m)\neq 0\right\}=\frac{B\,D^2(n)}{\nu_n\{m\in E_P\}\ln^2(1+\sqrt{\varepsilon})}.$$

Остается только показать, что для всех достаточно больших n частота $\nu_n\{m\in E_P\}$ ограничена снизу некоторой положительной константой. В самом деле, множество всех $p^\alpha\notin_P\alpha$, $\geqslant 1$, при каждом допустимом p имеющих наименьший показатель степени α, обозначим Q. Очевидно, если m не делится ни на одного $p^\alpha\in Q$, то $m\in E_P$. Следовательно, согласно (4) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n\{m\in E_P\}\geqslant\lim_{n\to\infty}\nu_n\{p^\alpha\nmid m,\ p^\alpha\in Q\}=$$

$$=\prod_{p^\alpha\in Q}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)\geqslant\prod_{p^\alpha\notin P}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)>0,$$

откуда для всех достаточно больших n

$$\nu_n\{m\in E_P\}>\frac{1}{2}\prod_{p^\alpha\notin P}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)>0,$$

чем и завершается доказательство леммы.

Замечание. Аналогично этому, опираясь на замечание леммы 2, находим, что если $g(m)$ – сильно мультипликативная арифметическая функция, удовлетворяющая условию (6), то при каждом $\varepsilon>0$ для всех достаточно больших n

$$\nu_n\{(|g(m)|\,e^{-A(n)}-1)^2>\varepsilon\,|\,g(m)\neq 0\}=\frac{B\,B^2(n)}{\ln^2(1+\sqrt{\varepsilon})}.$$

3. Сходимость к данным законам распределения. Предварительно приведем некоторые сведения из общей теории перемножения независимых случайных величин (М-схема) [5].

Характеристическим преобразованием случайной величины ξ (функции распределения ее F_ξ) называется матрица

$$W(t)=\begin{bmatrix} w_0(t) & 0\\ 0 & w_1(t)\end{bmatrix}$$

с элементами

$$w_j(t)=\mathbf{M}\,|\xi|^{it}\,\mathrm{sgn}^j\xi,\qquad j=0,1,$$

причем считается $0^{it}=0$ для всех вещественных t.

В М-схеме имеются тоже своего рода безгранично делимые законы распределения (М-безгранично делимые законы), играющие ту же роль, что обычные безгранично делимые законы (А-безгранично делимые законы) в теории суммирования. Пусть ξ и η – независимые случайные величины с функциями распределения F_ξ, F_η и $\zeta=\xi\eta$. Тогда операция $F_\zeta=F_\xi\circ F_\eta$ называется М-композицией, причем

$$F_\zeta(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}\left[1-F_\xi\left(\frac{x}{y}\right)\right]dF_\eta(y)+\int\limits_{0}^{+\infty}F_\xi\left(\frac{x}{y}\right)dF_\eta(y),$$

$$W_\zeta(t)=W_\xi(t)\,W_\eta(t).$$

Несколько обобщим операцию М-композиции в нужном нам направлении. Пусть нам даны условные функции распределения

$$F_\xi(x\mid\xi\neq0)=\mathbf{P}\{\xi<x\mid\xi\neq0\},$$

$$F_\eta(x\mid\eta\neq0)=\mathbf{P}\{\eta<x\mid\eta\neq0\},$$

где ξ и η — независимые случайные величины. Так как для условной функции распределения произведения $\zeta=\xi\eta$ имеем

$$F_\zeta(x\mid\zeta\neq0=\mathbf{P}\{\zeta<x\mid\zeta\neq0\}=\int\limits_{-\infty}^{0}\left[1-F_\xi\left(\frac{x}{y}\mid\xi\neq0\right)\right]dF_\eta(y\mid\eta\neq0)+$$

$$+\int\limits_{0}^{+\infty}F_\xi\left(\frac{x}{y}\mid\xi\neq0\right)dF_\eta(y\mid\eta\neq0),$$

то $F_\zeta(x\mid\zeta\neq0)$ тоже назовем М-композицией условных функций распределения $F_\xi(x\mid\xi\neq0)$ и $F_\eta(x\mid\eta\neq0)$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 5. *Если $F_\zeta(x\mid\zeta\neq0)$ является М-композицией условных функций распределения $F_\xi(x\mid\xi\neq0)$ и $F_\eta(x\mid\eta\neq0)$ независимых случайных величин ξ и η, то соответствующие им характеристические преобразования удовлетворяют соотношению*

$$W_\zeta(t\mid\zeta\neq0)=W_\xi(t\mid\xi\neq0)\,W_\eta(t\mid\eta\neq0).$$

Доказательство. Пусть $a=x_{n1}<x_{n2}<\ldots<x_{nk_n}=b$, $x_{nk}\neq0$ — такое разбиение промежутка $[a,\ b]$, $a<0$, $b>0$, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_k(x_{n,k+1}-x_{nk})=0.$$

Тогда

$$\int\limits_{a}^{b}|x|^{it}\operatorname{sgn}^j x\,dF_\zeta(x\mid\zeta\neq0)=\lim_{n\to\infty}\sum_k|x_{nk}|^{it}\operatorname{sgn}^j x_{nk}[F_\zeta(x_{n,k+1}\mid\zeta\neq0)-$$

$$-F_\zeta(x_{nk}\mid\zeta\neq0)]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_k\left|\frac{x_{nk}}{y}\right|^{it}\operatorname{sgn}^j\left(\frac{x_{nk}}{y}\right)\operatorname{sgn}y\left[F_\xi\left(\frac{x_{n,k+1}}{y}\,\middle|\,\xi\neq0\right)-\right.$$

$$\left.-F_\xi\left(\frac{x_{nk}}{y}\,\middle|\,\xi\neq0\right)\right]\cdot|y|^{it}\operatorname{sgn}^j y\,dF_\eta(y\mid\eta\neq0)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int\limits_{\frac{a}{y}}^{\frac{b}{y}}|x|^{it}\operatorname{sgn}^j x\operatorname{sgn}y\,dF_\xi(x\mid\xi\neq0)\right\}\cdot|y|^{it}\operatorname{sgn}^j y\,dF_\eta(y\mid\eta\neq0),$$

$j=0,\ 1,$

где черточка посредине знака интеграла означает, что из промежутка интегрирования удалена точка 0. Полагая теперь $a \to -\infty$, $b \to +\infty$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^{it} \operatorname{sgn}^j x \, dF_\zeta(x \mid \zeta \neq 0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^{it} \operatorname{sgn}^j x \, dF_\xi(x \mid \xi \neq 0) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|^{it} \operatorname{sgn}^j y \, dF_\eta(y \mid \eta \neq 0), \qquad j = 0, 1,$$

что равносильно утверждению леммы.

Функция распределения $F(x)$ называется М-безгранично делимой, если для нее найдется такая последовательность целых чисел $0 < n_1 < n_2 < \ldots$, что для любого члена этой последовательности n_k функция распределения $F(x)$ может быть представлена в виде n_k -кратной М-композиции $F_{n_k} \circ F_{n_k} \circ \ldots \circ F_{n_k}$. Принадлежность функции распределения к классу М-безгранично делимых законов выявляется следующей теоремой В. М. Золотарева.

Функция распредесления $F(x)$ является М-безгранично делимой тогда и только тогда, когда соответствующее ей характеристическое преобразование представимо в виде

$$w_0(t) = \alpha_0 f^{(1)}(t) f^{(2)}(t), \qquad w_1(t) = \alpha_1 \frac{f^{(1)}(t)}{f^{(2)}(t)},$$

где

a) $f^{(\nu)}(t)$, $\nu = 1, 2$ — характеристические функции некоторых А-безгранично делимых законов, причем $f^{(2)}(t)$ имеет вид

$$f^{(2)}(t) = \exp\left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1) \, dH(x) \right\},$$

($H(x)$ — функция Леви);

b) вещественные пераметры α_0, α_1 удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1, \qquad |\alpha_1| \leqslant \alpha_0 \exp\left\{ -2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dH(x) \right\}.$$

Пусть

$$\xi_{n1}, \ \xi_{n2}, \ \ldots, \ \xi_{nk_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин с функциями распределения $F_{nk}(x)$ и элементами характеристического преобразования ${}_{nk}w_j(t), j = 0,1$. Случайные величины ξ_{nk} называются М-предельно пренебрегаемыми, если при любом фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \max_k \mathbf{P}\{(|\xi_{nk}| - 1)^2 > \varepsilon\} = 0.$$

Лемма 6. *Случайные величины ξ_{nk} являются М-предельно пренебрегаемыми тогда и только тогда, когда при $n \to \infty$*

$$\max_k |{}_{nk}w_0(t) - 1| \to 0$$

равномерно в каждом конечном t-интервале.

Доказательство. Пусть случайные величины ξ_{nk} являются М-предельно пренебрегаемыми. Поскольку при любом $0<\varepsilon<1$ имеем

$$|{}_{nk}w_j(t)-{}_{nk}w_j(0)|\leqslant \int\limits_{(|x|-1)^2\leqslant\varepsilon} |t\ln|x||\,dF_{nk}(x)+\int\limits_{(|x|-1)^2>\varepsilon} dF_{nk}(x)\leqslant$$

$$\leqslant|t\ln(1-\sqrt{\varepsilon})|+2\mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\},\qquad j=0,1,$$

то, полагая $n\to\infty$, а затем $\varepsilon\to0$, находим, что

$$\max_k|{}_{nk}w_j(t)-{}_{nk}w_j(0)|\to0,\qquad j=0,1. \tag{10}$$

Далее, в силу очевидного неравенства

$$\mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\}\geqslant\mathbf{P}\{\xi_{nk}=0\},$$

имеем

$$\max_k\mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\}\geqslant1-\min_k{}_{nk}w_0(0).$$

Поэтому

$$\min_k{}_{nk}w_0(0)\to1,\qquad n\to\infty,$$

что вместе с (10) доказывает необходимость утверждения.

Пусть теперь при $n\to\infty$

$$\max_k|{}_{nk}w_0(t)-1|\to0$$

равномерно в каждом конечном t-интервале. Тогда для $0<\varepsilon<1$ в силу оценки

$$\int\limits_0^\infty e^{-t}[{}_{nk}w_0(0)-\mathrm{Re}\,{}_{nk}w_0(t)]\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln^2|x|}{\ln^2|x|+1}\,dF_{nk}(x)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\varepsilon}{5}\Big[\int\limits_{(|x|-1)^2>\varepsilon}dF_{nk}(x)-1+{}_{nk}w_0(0)\Big],$$

при $n\to\infty$ имеем

$$\max_k\mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\}\leqslant\frac{5}{\varepsilon}\max_k\int\limits_0^\infty e^{-t}|1-{}_{nk}w_0(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{5}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty e^{-t}\max_k|1-{}_{nk}w_0(t)|\,dt\to0.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем рассматривать условные функции распределения

$$F_{nk}(x\,|\,\xi_{nk}\neq0)=\mathbf{P}\{\xi_{nk}<x\,|\,\xi_{nk}\neq0\},$$

элементы характеристического преобразования которых обозначим ${}_{nk}w_j(t\,|\,\xi_{nk}\neq\neq0)$, $j=0, 1$. Из доказательства леммы 6 видно, что если выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty}\max_k\mathbf{P}\{(|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\,|\,\xi_{nk}\neq0\}=0,$$

то при $n\to\infty$

$$\max_k |{}_{nk}w_j(t\,|\,\xi_{nk}\neq 0) - {}_{nk}w_j(0\,|\,\xi_{nk}\neq 0)| \to 0, j=0,1. \quad (10')$$

Кроме того, очевидно, ${}_{nk}w_0(0\,|\,\xi_{nk}\neq 0)=1$.

Обратимся теперь к условиям сходимости при $n\to\infty$ условных функций распределения

$$\mathbf{P}\left\{A_n \prod_{p\leqslant r} |\xi_p|^{B_n} \operatorname{sgn} \xi_p < x\,|\,\xi_p\neq 0, p\leqslant r\right\},$$

где независимые случайные величины ξ_p, $p\leqslant r$, соответствуют сильно мультипликативной функции $g(m)\in\mathfrak{M}_{\text{u}}$, к некоторой предельной функции распределения. В качестве нормирующих постоянных мы обычно будем использовать

$$A_n = \exp\left\{-\frac{A(n)}{B(n)}\right\}, \qquad B_n = \frac{1}{B(n)}.$$

Конечно, здесь n должен быть настолько большим, чтобы $B(n)\neq 0$. Будем считать, не оговаривая этого каждый раз, что это условие выполнено.

Предварительно построим следующий М-безгранично делимый закон распределения. Пусть случайные величины ξ_k, $k=1, 2, \ldots$, распределены по законам

$$\mathbf{P}\{\xi_k = l_k^\varkappa\} = \frac{\lambda_k^\varkappa}{\varkappa!} e^{-\lambda_k}, \qquad \varkappa=0,1,2,\ldots, \quad l_k, \lambda_k > 0,$$

элементы характеристического преобразования которых равны

$${}_kw_j(t) = \exp\{\lambda_k(l_k^{it}-1)\}, \qquad j=0,1.$$

Пусть, далее, случайные величины η_s, $s=1, 2, \ldots$, распределены по законам

$$\mathbf{P}\{\eta_s = (-1)^k h_s^\varkappa\} = [{}_s\alpha_0 + (-1)^{\varkappa+k}\,{}_s\alpha_1 e^{2\mu_s}]\, \frac{\mu_s^\varkappa}{2\varkappa!} e^{-\mu_s},$$

$$\mathbf{P}\{\eta_s = 0\} = 1 - {}_s\alpha_0,$$

$$\varkappa = 0,1,2,\ldots, \qquad k=0,1, \qquad h_s, \mu_s > 0,$$

$$0\leqslant {}_s\alpha_0 \leqslant 1, \qquad |{}_s\alpha_1| \leqslant {}_s\alpha_0 e^{-2\mu_s}.$$

Последним законам распределения соответствуют характеристические преобразования с элементами

$${}_sw_j(t) = {}_s\alpha_j \exp\{(-1)^j \mu_s (h_s^{it}-1)\}, \qquad j=0,1.$$

Если теперь взять М-композицию в нужном количестве из каждого типа распределений, то получим некоторый закон распределения, которому соответствует характеристическое преобразование с элементами

$$w_j(t) = \alpha_j \exp\left\{\sum_k \lambda_k(l_k^{it}-1) + (-1)^j \sum_s \mu_s(h_s^{it}-1)\right\}, \qquad j=0,1, \quad (11)$$

причем

$$0\leqslant \alpha_0 = \prod_s {}_s\alpha_0 \leqslant 1, \quad |\alpha_1| = \prod_s |{}_s\alpha_1| \leqslant \alpha_0 e^{-2\sum_s \mu_s}. \quad (12)$$

Этот закон, очевидно, является М-безгранично делимым.

Лемма 7. *Пусть случайные величины* ξ_p, $p\leqslant r$, *соответствуют сильно мультипликативной арифметической функции* $g(m)\in\mathfrak{M}_n$. *Для сходимости при* $n\to\infty$ *функций распределения*

$$\mathbf{P}\left\{ e^{-\frac{A(n)}{B(n)}} \prod_{p\leqslant r} |\xi_p|^{\frac{1}{B(n)}} \operatorname{sgn}\xi_p < x \mid \xi_p\neq 0,\quad p\leqslant r \right\} \tag{13}$$

к предельной, необходимо и достаточно, чтобы к предельному закону распределения сходились М-безгранично делимые законы с элементами характеристического преобразования

$$ {}_n\tilde{w}_0(t)=f_n^{(1)}(t)\, f_n^{(2)}(t),\quad {}_n\tilde{w}_1(t)=\prod_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left(1-\frac{2}{p}\right)\frac{f_n^{(1)}(t)}{f_n^{(2)}(t)}, \tag{14}$$

$$f_n^{(1)}(t)=\exp\left\{ \sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)\neq 0}} \left(|g(p)|^{-\frac{it}{B(n)}}-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)+\right.$$

$$\left. +\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)>0}}\left(|g(p)|^{\frac{it}{B(n)}\left(1-\frac{1}{p}\right)}-1\right)\frac{1}{p}\right\},$$

$$f_n^{(2)}(t)=\exp\left\{ \sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left(|g(p)|^{\frac{it}{B(n)}\left(1-\frac{1}{p}\right)}-1\right)\frac{1}{p}\right\},$$

причем предельные распределения в случае их существования совпадают.

Доказательство. Очевидно, что элементы характеристического преобразования (14) имеют вид (11), причем параметры

$${}_n\alpha_0=1,\qquad {}_n\alpha_1=\prod_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left(1-\frac{2}{p}\right),$$

в силу неравенства

$$1+x\leqslant e^x,$$

удовлетворяют условию (12).

Элементы характеристического преобразования функций распределения (13) обозначим ${}_nw_j(t\mid \xi_p\neq 0,\ p\leqslant r)$, $j=0,\ 1$, а функций распределения

$$\mathbf{P}\{g|(p)|^{-\frac{1}{B(n)p}}|\xi_p|^{\frac{1}{B(n)}}\operatorname{sgn}\xi_p<x\mid \xi_p\neq 0\},\qquad p\leqslant r$$

$-{}_{np}w_j(t|\xi_p\neq 0)$, $\quad j=0,1.$ Легко видеть, что

$${}_{np}w_j(t\mid\xi_p\neq 0)=\begin{cases} |g(p)|^{-\frac{it}{B(n)p}}\left(1-\frac{1}{p}\right)+ \\ +|g(p)|^{\frac{it}{B(n)}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\dfrac{\operatorname{sgn}^j g(p)}{p}, & \text{если } g(p)\neq 0,\\ 1, & \text{если } g(p)=0.\end{cases}$$

Согласно лемме 5 имеем

$$ {}_n w_j(t) \mid \xi_p \neq 0,\ p \leqslant r) = \prod_{p \leqslant r} {}_{np}w_j(t \mid \xi_p \neq 0), \quad j = 0, 1. $$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$ h_n(\varepsilon) = \max_{p \leqslant r} \mathbf{P} \left\{ \left(|g(p)|^{-\frac{1}{B(n)p}} |\xi_p|^{\frac{1}{B(n)}} - 1 \right)^2 > \varepsilon \mid \xi_p \neq 0 \right\} \to 0. \qquad (15) $$

В самом деле, введем сильно мультипликативную арифметическую функцию $g'(m)$, положив

$$ g'(p) = \begin{cases} g(p), & \text{если } g(p) \neq 0, \\ 1, & \text{если } g(p) = 0. \end{cases} $$

Очевидно, что $g'(m)$ также принадлежит классу $\mathfrak{M}_\text{н}$, а сильно аддитивная арифметическая функция $\ln|g'(m)|$ — классу H [1, стр. 72]. Через ξ'_p, $p \leqslant r$, обозначим случайные величины, соответствующие функции $g'(m)$. Тогда имеем

$$ h_n(\varepsilon) = \max_{p \leqslant r} \frac{1}{\mathbf{P}\{\xi_p \neq 0\}} \mathbf{P} \left\{ \left(|g(p)|^{-\frac{1}{B(n)p}} |\xi_p|^{\frac{1}{B(n)}} - 1 \right)^2 > \varepsilon, \quad \xi_p \neq 0 \right\} \leqslant $$

$$ \leqslant 2 \max_{p \leqslant r} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\ln|\xi_p| - \frac{\ln|g(p)|}{p}}{B(n)} \right| > \ln(1 + \sqrt{\varepsilon}),\ \xi_p \neq 0 \right\} \leqslant $$

$$ \leqslant 2 \max_{p \leqslant r} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\ln|\xi'_p| - \mathrm{M}\ln|\xi'_p|}{B(n)} \right| > \ln(1 + \sqrt{\varepsilon}) \right\}. $$

Последнее же выражение, как показано в [1, стр. 84], при $n \to \infty$ стремится к 0.

Отсюда в силу (10′) при $n \to \infty$

$$ \max_{p \leqslant r} |{}_{np}w_0(t \mid \xi_p \neq 0) - 1| \to 0 $$

равномерно в каждом конечном t-интервале. Поэтому в каждом конечном t-интервале для всех достаточно больших n

$$ \max_{p \leqslant r} |{}_{np}w_0(t \mid \xi_p \neq 0) - 1| \leqslant \frac{1}{2}. $$

Далее, используя неравенство

$$ |e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \leqslant \frac{\alpha^2}{2}, $$

имеющее место при любом вещественном α, найдем

$$ \sum_{p \leqslant r} |{}_{np}w_0(t \mid \xi_p \neq 0) - 1| = \sum_{\substack{p \leqslant r \\ g(p) \neq 0}} \left| \left(|g(p)|^{-\frac{it}{B(n)p}} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right) + \right. $$

$$ \left. + \left(|g(p)|^{\frac{it}{B(n)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} - 1 \right) \frac{1}{p} \right| \leqslant \frac{t^2 B^2(r)}{B^2(n)} \leqslant t^2. $$

Теперь в силу вышесказанного и неравенства

$$ |\ln z - z + 1| \leqslant |z|^2 \qquad \text{для} \qquad |z - 1| \leqslant \frac{1}{2} $$

при $n \to \infty$

$$|\ln {}_nw_0(t\,|\,\xi_p\neq 0,\ \ p\leqslant r)-\ln {}_n\tilde{w}_0(t)\,|=\Big|\sum_{p\leqslant r}\{\ln {}_{np}w_0(t\,|\,\xi_p\neq 0)-$$

$$-{}_{np}w_0(t\,|\,\xi_p\neq 0)+1\}\Big|\leqslant\sum_{p\leqslant r}|\,{}_{np}w_0(t\,|\,\xi_p\neq 0)-1\,|^2\leqslant$$

$$\leqslant\max_{p\leqslant r}|\,{}_{np}w_0(t\,|\,\xi_p\neq 0)-1\,|\sum_{p\leqslant r}|\,{}_{np}w_0(t\,|\,\xi_p\neq 0)-1\,|\leqslant$$

$$\leqslant t^2\max_{p\leqslant r}|\,{}_{np}w_0(t\,|\,\xi_p\neq 0)-1\,|\to 0$$

равномерно в каждом конечном t-интервале.

Обратимся теперь к сближению элементов ${}_nw_1(t\,|\,\xi_p\neq 0,\ p\leqslant r)$ и ${}_n\tilde{w}_1(t)$. Положим

$$\beta=\prod_{g(p)<0}\left(1-\frac{2}{p}\right).$$

Рассмотрим случаи $\beta>0$ и $\beta=0$ каждый в отдельности.

1) Если $\beta>0$, то, очевидно, $g(2)\geqslant 0$,

$$\sum_{g(p)<0}\frac{1}{p}<+\infty$$

и $\quad {}_{np}w_1(0\,|\,\xi_p\neq 0)\geqslant\dfrac{1}{3}$. Поэтому

$$|\ln {}_nw_1(t\,|\,\xi_p\neq 0,\ \ p\leqslant r)-\ln {}_n\tilde{w}_1(t)\,|=\left|\ln\frac{{}_nw_1(t\,|\,\xi_p\neq 0,\ p\leqslant r)}{{}_nw_1(0\,|\,\xi_p\neq 0,\ p\leqslant r)}-\ln\frac{{}_n\tilde{w}_1(t)}{{}_n\tilde{w}_1(0)}\right|=$$

$$=\Bigg|\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)\neq 0}}\Bigg\{\ln\frac{{}_{np}w_1(t\,|\,\xi_p\neq 0)}{{}_{np}w_1(0\,|\,\xi_p\neq 0)}-\left(|g(p)|^{-\frac{it}{B(n)p}}-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)-$$

$$-\left(|g(p)|^{\frac{it}{B(n)}\left(1-\frac{1}{p}\right)}-1\right)\frac{\operatorname{sgn} g(p)}{p}\Bigg\}\Bigg|\leqslant x_n+y_n,$$

где

$$x_n=\Bigg|\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)\neq 0}}\Bigg\{\ln\frac{{}_{np}w_1(t\,|\,\xi_p\neq 0)}{{}_{np}w_1(0\,|\,\xi_p\neq 0)}-\frac{{}_{np}w_1(t\,|\,\xi_p\neq 0)}{{}_{np}w_1(0\,|\,\xi_p\neq 0)}+1\Bigg\}\Bigg|,$$

$$y_n=\Bigg|\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)\neq 0}}\Bigg\{\frac{{}_{np}w_1(t\,|\,\xi_p\neq 0)}{{}_{np}w_1(0\,|\,\xi_p\neq 0)}-1-\left(|g(p)|^{-\frac{it}{B(n)p}}-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)-$$

$$-\left(|g(p)|^{\frac{it}{B(n)}\left(1-\frac{1}{p}\right)}-1\right)\frac{\operatorname{sgn} g(p)}{p}\Bigg\}\Bigg|=$$

$$=\Bigg|\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\Bigg\{\frac{{}_{np}w_1(t\,|\,\xi_p\neq 0)}{1-\frac{2}{p}}-\left(|g(p)|^{-\frac{it}{B(n)p}}-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)+$$

$$+\left(|g(p)|^{\frac{it}{B(n)}\left(1-\frac{1}{p}\right)}-1\right)\frac{1}{p}\Bigg\}\Bigg|=\Bigg|\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\Bigg\{\left(|g(p)|^{-\frac{it}{B(n)p}}-1\right)\frac{2(p-1)}{p(p-2)}-$$

$$-\left(|g(p)|^{\frac{it}{B(n)}\left(1-\frac{1}{p}\right)}-1\right)\frac{2}{p(p-2)}\Bigg\}\Bigg|.$$

Оценим x_n и y_n. Ввиду (15) и (10′) при $n\to\infty$

$$\max_{p\leqslant r}\left|\frac{{}_{np}w_1(t\mid\xi_p\neq 0)}{{}_{np}w_1(0\mid\xi_p\neq 0)}-1\right|\leqslant 3\max_{p\leqslant r}|{}_{np}w_1(t\mid\xi_p\neq 0)-{}_{np}w_1(0\mid\xi_p\neq 0)|\to 0$$

равномерно в каждом конечном t-интервале. Кроме того, поскольку для каждого вещественного α имеет место неравенство

$$|e^{i\alpha}-1|\leqslant|\alpha|,$$

находим, что

$$\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left|\frac{{}_{np}w_1(t\mid\xi_p\neq 0)}{{}_{np}w_1(0\mid\xi_p\neq 0)}-1\right|\leqslant 3\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}|{}_{np}w_1(t\mid\xi_p\neq 0)-$$

$$-{}_{np}w_1(0\mid\xi_p\neq 0)|=3\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left|\left(|g(p)|^{-\frac{it}{B(n)p}}-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(|g(p)|^{\frac{it}{B(n)}\left(1-\frac{1}{p}\right)}-1\right)\frac{1}{p}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{6|t|}{B(n)}\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\frac{\ln|g(p)|}{p}\leqslant$$

$$\leqslant 6|t|\left\{\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)\neq 0}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{g(p)<0}\frac{1}{p}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant c_1|t|,$$

где c_1 — постоянная, зависящая лишь от функции $g(m)$. Поэтому при $n\to\infty$

$$x_n\leqslant\sum_{p\leqslant r}|{}_{np}w_0(t\mid\xi_p\neq 0)-1|^2+\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left|\frac{{}_{np}w_1(t\mid\xi_p\neq 0)}{{}_{np}w_1(0\mid\xi_p\neq 0)}-1\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant t^2\max_{p\leqslant r}|{}_{np}w_0(t\mid\xi_p\neq 0)-1|+\max_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left|\frac{{}_{np}w_1(t\mid\xi_p\neq 0)}{{}_{np}w_1(0\mid\xi_p\neq 0)}-1\right|\times$$

$$\times\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left|\frac{{}_{np}w_1(t\mid\xi_p\neq 0)}{{}_{np}w_1(t\mid\xi_p\neq 0)}-1\right|\leqslant t^2\max_{p\leqslant r}|{}_{np}w_0(t\mid\xi_p\neq 0)-1|+$$

$$+c_1|t|\max_{p\leqslant r}\left|\frac{{}_{np}w_1(t\mid\xi_p\neq 0)}{{}_{np}w_1(0\mid\xi_p\neq 0)}-1\right|\to 0$$

равномерно в каждом конечном t-интервале. Имеет место также оценка

$$y_n\leqslant\frac{4|t|}{B(n)}\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\frac{|\ln|g(p)||}{p}\cdot\frac{p-1}{p(p-2)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4|t|}{B(n)}\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)\neq 0}}\frac{|\ln|g(p)||}{p^{1+\frac{1}{8}}},$$

откуда согласно лемме 3 следует сходимость $y_n \to 0$ при $n \to \infty$, равномерная в каждом конечном t-интервале. Этим доказано сближение элементов ${}_nw_1(t | \xi_p \neq 0,\ p \leqslant r)$ и ${}_n\tilde{w}_1(t)$, когда $\beta > 0$.

2) Если $\beta = 0$, то имеет место хотя бы одно из следующих условий

a) $g(2) < 0$,

b) $\sum\limits_{g(p)<0} \frac{1}{p} = +\infty$,

откуда следует, что ${}_nw_1(t \mid \xi_p \neq 0,\ p \leqslant r) \to 0$ при $n \to \infty$ и сходимость равномерна в каждом коннечном t-интервале. Действительно, если имеет место a), то при $n \to \infty$

$$|{}_nw_1(t \mid \xi_p \neq 0, p \leqslant r)| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} |g(2)|^{\frac{it}{B(n)}} \right| \prod_{2<p\leqslant r} |{}_{np}w_1(t \mid \xi_p \neq 0)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|t \ln |g(2)||}{2B(n)} \to 0$$

равномерно в каждом конечном t-интервале. Если имеет место условие b), тогда для любого $0 < \varepsilon < 2$ имеем

$$\sum_{g(p)<0} \frac{2-\varepsilon}{p} = +\infty,$$

откуда

$$\prod_{g(p)<0} \left(1 - \frac{2-\varepsilon}{p}\right) = 0.$$

Поэтому существует такое n_0, что для $n \geqslant n_0$

$$\prod_{\substack{p\leqslant r \\ g(p)<0}} \left(1 - \frac{2-\varepsilon}{p}\right) < \varepsilon.$$

Далее, поскольку $B(n) \to \infty$, для любого фиксированного $T > 0$ можно найти такое n_1, что для $n \geqslant n_1$

$$\max_{\substack{p\leqslant r(n_0) \\ g(p)<0}} \frac{T |\ln |g(p)||}{B(n)} < \varepsilon.$$

Тогда для $n \geqslant n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ при $|t| \leqslant T$ имеем

$$|{}_nw_1(t \mid \xi_p \neq 0,\ p \leqslant r)| \leqslant \prod_{\substack{p\leqslant r(n_0) \\ g(p)<0}} |{}_{np}w_1(t \mid \xi_p \neq 0)| =$$

$$= \prod_{\substack{p\leqslant r(n_0) \\ g(p)<0}} \left| 1 - \frac{1}{p} - |g(p)|^{\frac{it}{B(n)}} \frac{1}{p} \right| \leqslant \prod_{\substack{p\leqslant r(n_0) \\ g(p)<0}} \left(1 - \frac{2-\varepsilon}{p}\right) < \varepsilon,$$

что и требовалось показать.

С другой стороны, при $n\to\infty$

$$|{}_n\tilde{w}_1(t)|=\prod_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left(1-\frac{2}{p}\right)\exp\left\{\operatorname{Re}\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)\neq 0}}\left[\left(|g(p)|^{-\frac{it}{B(n)p}}-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(|g(p)|^{\frac{it}{B(n)}\left(1-\frac{1}{p}\right)}-1\right)\frac{\operatorname{sgn} g(p)}{p}\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left(1-\frac{2}{p}\right)\exp\left\{\sum_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left[1-\cos\frac{t\ln|g(p)|}{B(n)}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]\frac{1}{p}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left(1-\frac{2}{p}\right)\exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\}\to 0$$

равномерно в каждом конечном t-интервале.

Лемма доказана.

Таким образом, вместо функций распределения (13) мы можем рассматривать более удобные „сопровождающие" законы, соответствующие характеристическим преобразованиям (14). Это обстоятельство позволяет нам сделать некоторые предположения относительно предельного закона распределения, элементы характеристического преобразования которого обозначим $w_j(t)$, $j=0, 1$. Итак, пусть при $n\to\infty$

$${}_n\tilde{w}_j(t)\to w_j(t), \qquad j=0, 1.$$

Ясно, что при каждом целом положительном k функции

$${}_n\tilde{w}_j^{(k)}(t)=\left({}_n\tilde{w}_j(t)\right)^{\frac{1}{k_i}}, \qquad j=0, 1,$$

являются элементами характеристического преобразования некоторой функции распределения. Поскольку функции

$$w_j^{(k)}(t)=\lim_{n\to\infty}{}_n\tilde{w}_j^{(k)}(t)=\left(w_j(t)\right)^{\frac{1}{k}}, \qquad j=0, 1,$$

являются непрерывными, то $w_j^{(k)}(t)$, $j=0$, 1 — элементы характеристического преобразования, откуда следует, что предельная функция распределения М-безгранично делима.

Как известно, характеристическое преобразование М-безгранично делимой функции распределения образуется с помощью некоторых А-безгранично делимых характеристических функций $f^{(\nu)}(t)$, $\nu=1, 2$, и параметров α_0, α_1. В рассматриваемом нами случае

$$\alpha_0=w_0(0)=\lim_{n\to\infty}{}_n\tilde{w}_0(0)=1,$$

$$\alpha_1=w_1(0)=\lim_{n\to\infty}{}_n\tilde{w}_1(0)=\lim_{n\to\infty}\prod_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left(1-\frac{2}{p}\right)=\beta.$$

Поскольку параметр β полностью определяется только функцией $g(m)$, мы будем считать его данным, как только нам дана функция $g(m)$.

Характеристические функции $f_n^{(\nu)}(t)$, $\nu=1, 2$, определяют случайные величины $\xi_n^{(\nu)}$, $\nu=1, 2$, с ограниченными дисперсиями

$$\mathbf{D}\,\xi_n^{(1)}=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leq r\\ g(p)>0}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}+o(1),$$

$$\mathbf{D}\,\xi_n^{(2)}=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leq r\\ g(p)<0}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}+o(1).$$

Все это позволяет нам окончательно определить вид предельного закона распределения. Именно, когда $\beta>0$, предельному закону распределения соответствует характеристическое преобразование

$$w_0(t)=f^{(1)}(t)f^{(2)}(t),\qquad w_1(t)=\beta\,\frac{f^{(1)}(t)}{f^{(2)}(t)},\tag{16}$$

$$f^{(1)}(t)=\exp\left\{it\gamma+\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1-itx)\,\frac{1}{x^2}\,dK^{(1)}(x)\right\},$$

$$f^{(2)}(t)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\,\frac{1}{x^2}\,dK^{(2)}(x)\right\},$$

где γ — вещественная постоянная, $K^{(\nu)}(x)$, $K^{(\nu)}(-\infty)=0$, $\nu=1, 2$ — неубывающие функции ограниченной вариации, причем $K^{(2)}(x)$ удовлетворяет условию

$$\beta\leq\exp\left\{-2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dK^{(2)}(x)\right\}.\tag{17}$$

Если $\beta=0$, тогда элементы характеристического преобразования равны

$$w_0(t)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1-itx)\,\frac{1}{x^2}\,dK(x)\right\},$$

$$w_1(t)\equiv 0,\tag{18}$$

где $K(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации такая, что $K(-\infty)=0$.

Обратимся к некоторым числовым характеристикам случайных величин в M-схеме. Пусть случайная величина ξ имеет характеристическое преобразование с элементами $w_j(t)$, $j=0, 1$, необязательно M-безгранично делимое. По анологии с семиинвариантами, используемыми в теории суммирования, определим M-семиинварианты m-ого порядка

$$\lambda_j(m)=(-i)^m\left[\frac{d^m}{dt^m}\ln w_j(t)\right]_{t=0},\qquad j=0, 1,$$

в предположении, что $w_j(0)\neq 0$, $j=0, 1$. Если же какой-нибудь из них равен 0, то соответствующий M-семиинвариант не существует. Легко видеть, что

$$\lambda_0(1)=\mathbf{M}(\ln|\xi|\,|\,\xi\neq 0),\qquad \lambda_0(2)=\mathbf{D}(\ln|\xi|\,|\,\xi\neq 0),$$

$$\lambda_1(1)=\frac{w_0(0)}{w_1(0)}\,\mathbf{M}(\ln|\xi|\operatorname{sgn}\xi\,|\,\xi\neq 0),$$

$$\lambda_1(2)=\frac{w_0(0)}{w_1(0)}\,\mathbf{M}(\ln^2|\xi|\operatorname{sgn}\xi\,|\,\xi\neq 0)-\left[\frac{w_0(0)}{w_1(0)}\,\mathbf{M}(\ln|\xi|\operatorname{sgn}\xi\,|\,\xi\neq 0)\right]^2.$$

Если функция распределения случайной величины ξ является М-безгранично делимой, причем $\alpha_1 \neq 0$, тогда

$$\lambda_j(m) = (-i)^m \left[\frac{d^m}{dt^m} \ln f^{(1)}(t) + (-1)^j \frac{d^m}{dt^m} \ln f^{(2)}(t) \right]_{t=0} =$$

$$= \varkappa_m^{(1)} + (-1)^j \varkappa_m^{(2)}, \qquad j = 0, 1,$$

где $\varkappa_m^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$ — семиинварианты случайных величин $\xi^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$, соответствующих характеристическим функциям $f^{(\nu)}(t)$, $\nu = 1, 2$. В этом случае первые два М-семиинварианта равны

$$\lambda_j(1) = \mathbf{M}\,\xi^{(1)} + (-1)^j \mathbf{M}\,\xi^{(2)},$$

$$\lambda_j(2) = \mathbf{D}\,\xi^{(1)} + (-1)^j \mathbf{D}\,\xi^{(2)}, \qquad j = 0, 1.$$

Если $\alpha_1 = 0$, то $\lambda_1(m)$ не существует, а $\lambda_0(m), m = 1, 2$,имеют вероятностный смысл общего случая.

Теорема 1. *Для сходимости функций распределения*

$$\nu_n \left\{ e^{-\frac{A(n)}{B(n)}} |g(m)|^{\frac{1}{B(n)}} \operatorname{sgn} g(m) < x \,|\, g(m) \neq 0 \right\},$$

где $g(m)$ — сильно мультипликативная функция из класса $\mathfrak{M}_{\text{н}}$, к предельной функции распределения с М-семиинвариантами $\lambda_0(2) = 1$, $\lambda_1(2) = \lambda_1$, когда она несимметрическая и $\lambda_0(2) = 1$, когда она симметрическая, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

а) *в случае $\beta > 0$ существуют неубывающие функции $K^{(\nu)}(x)$, $K^{(\nu)}(-\infty) = 0$, $\nu = 1, 2$, с вариациями*

$$\operatorname{Var} K^{(\nu)}(x) = \frac{1 - (-1)^\nu \nu_1}{2}, \qquad \nu = 1, 2,$$

причем $K^{(2)}(x)$ удовлетворяет условию (17), такие, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\, dK^{(2)}(x) = c_2$$

сходится и при $n \to \infty$

$$1^\circ \qquad \frac{1}{B(n)} \sum_{\substack{p \leq n \\ g(p) < 0}} \frac{\ln |g(p)|}{p} \to c_2,$$

$$2^\circ \qquad \frac{1}{B^2(n)} \sum_{\substack{p \leq n \\ g(p) > 0 \\ \ln |g(p)| < x B(n)}} \frac{\ln^2 |g(p)|}{p} \to K^{(1)}(x),$$

$$3^\circ \qquad \frac{1}{B^2(n)} \sum_{\substack{p \leq n \\ g(p) < 0 \\ \ln |g(p)| < x B(n)}} \frac{\ln^2 |g(p)|}{p} \to K^{(2)}(x),$$

где сходимость в 2°, 3° имеет место не только в каждой точке непрерывности функций $K^{(\nu)}(x)$, $\nu = 1, 2$, но и в точке $x = +\infty$;

b) *в случае* $\beta=0$ *существует такая неубывающая функция* $K(x)$, $K(-\infty)=0$, *с вариацией* 1, *что при* $n\to\infty$

$$\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\le n\\ g(p)\ne 0\\ \ln|g(p)|<xB(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\to K(x)$$

не только в каждой точке непрерывности функции $K(x)$, *но и в точке* $x=+\infty$.

Предельной функции распределения соответствует характеристическое преобразование (16) *или* (18), *в зависимости от того,* $\beta>0$ *или* $\beta=0$, *с постоянной* $\gamma=-c_2$.

Доказательство. Рассмотрим сначала сходимость функций распределения (13) к некоторой предельной функции распределения. Согласно лемме 7 для этого необходимо и достаточно, чтобы законы распределения, соответствующие характеристическому преобразованию (14), сходились к некоторому предельному закону. Представим характеристические функции, входящие в (14) по формуле Колмогорова в виде

$$f_n^{(\nu)}(t)=\exp\left\{it\gamma_n^{(\nu)}+\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1-itx)\frac{1}{x^2}\,dK_n^{(\nu)}(x)\right\},\qquad \nu=1,2,$$

где

$$\gamma_n^{(1)}=-\frac{1}{B(n)}\sum_{\substack{p\le r\\ g(p)<0}}\frac{\ln|g(p)|}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)=-\frac{1}{B(n)}\sum_{\substack{p\le r\\ g(p)<0}}\frac{\ln|g(p)|}{p}+o(1),$$

$$\gamma_n^{(2)}=-\gamma_n^{(1)},$$

$$K_n^{(1)}(x)=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\le r\\ g(p)\ne 0\\ -\ln|g(p)|<xB(n)p}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p^2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+$$

$$+\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\le r\\ g(p)>0\\ \left(1-\frac{1}{p}\right)\ln|g(p)|<xB(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\le r\\ g(p>0\\ \left(1-\frac{1}{p}\right)\ln|g(p)|<xB(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}+o(1),$$

$$K_n^{(2)}(x)=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\le r\\ g(p)<0\\ \left(1-\frac{1}{p}\right)\ln|g(p)|<xB(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\le r\\ g(p)<0\\ \left(1-\frac{1}{p}\right)\ln|g(p)|<xB(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}+o(1),$$

причем оценки $o(1)$ равномерны по x. Если теперь воспользоваться леммой 3, то дословным повторением доказательства, данного в [1, стр. 85], можно показать, что функции

$$L_n^{(1)}(x)=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leq n\\ g(p)>0\\ \ln|g(p)|<xB(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p},$$

соответственно

$$L_n^{(2)}(x)=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leq n\\ g(p)<0\\ \ln|g(p)|<xB(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p},$$

при $n\to\infty$ сходятся лишь одновременно с функциями $K_n^{\nu}(x)$, $\nu=1, 2$, соответственно, причем предельные функции совпадают.

Дальнейший ход доказательства зависит от того, является ли $\beta>0$, или $\beta=0$.

а) Пусть $\beta>0$. Тогда предельный закон распределения в случае его существования является несимметрическим. Поэтому согласно известной теореме сходимости [6, стр. 98] функции распределения, соответствующие характеристическим преобразованиям (14), сходятся к некоторой предельной функции распределения и M-семиинварианты 2-ого порядка сходятся к соответствующим M-семиинвариантам предельного закона тогда и только тогда, когда существуют постоянные $\gamma^{(\nu)}$, $\nu=1, 2$, и неубывающие функции ограниченной вариации $K^{(\nu)}(x)$, $K^{(\nu)}(-\infty)=0$, $\nu=1, 2$, такие, что при $n\to\infty$

$$\gamma_n^{(\nu)}\to\gamma^{(\nu)},$$

$$K_n^{(\nu)}(x)\to K^{(\nu)}(x),\qquad K_n^{(\nu)}(+\infty)\to K^{(\nu)}(+\infty),\qquad \nu=1,2,$$

где сходимость имеет место в каждой точке непрерывности $K^{(\nu)}(x)$, $\nu=1, 2$, соответственно. Кроме того, поскольку $f^{(2)}(t)$ имеет специальный вид, то

$$\gamma^{(2)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dK^{(2)}(x)=c_2.$$

Характеристическое преобразование предельного закона распределения определяется по формулам (16), причем $\gamma=\gamma^{(1)}=-c_2$.

Поскольку в данном случае имеем

$$\sum_{g(p)<0}\frac{1}{p}<+\infty,$$

то при $n\to\infty$

$$\left|\frac{1}{B(n)}\sum_{\substack{p\leq n\\ g(p)<0}}\frac{\ln|g(p)|}{p}-\frac{1}{B(n)}\sum_{\substack{p\leq r\\ g(p)<0}}\frac{\ln|g(p)|}{p}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{B(n)}\sum_{\substack{r<p\leq n\\ g(p)<0}}\frac{|\ln|g(p)||}{p}\leq\left\{\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{r<p\leq n\\ g(p)<0}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{\substack{r<p\leq n\\ g(p)<0}}\frac{1}{p}\right\}^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\left\{\sum_{\substack{p>r\\ g(p)<0}}\frac{1}{p}\right\}^{\frac{1}{2}}\to 0.$$

Поэтому

$$\gamma_n^{(\nu)}=\frac{(-1)^\nu}{B(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)<0}}\frac{\ln|g(p)|}{p}+o(1),\qquad \nu=1,2.$$

Далее, поскольку М-семиинварианты 2-ого порядка закона распределения, соответствующего характеристическому преобразованию (14), равны

$${}_n\lambda_j(2)=K_n^{(1)}(+\infty)+(-1)^j\,K_n^{(2)}(+\infty),\qquad j=0,1,$$

то, ввиду сходимости

$$K_n^{(\nu)}(+\infty)\to K^{(\nu)}(+\infty)=\frac{1-(-1)^\nu\lambda_1}{2},\qquad \nu=1,2,$$

при $n\to\infty$, находим, что

$${}_n\lambda_0(2)=1+o(1),\qquad {}_n\lambda_1(2)=\lambda_1+o(1).$$

Поэтому из всего сказанного следует часть a) рассматриваемой теоремы по отношению к функциям распределения (13).

b) Пусть теперь $\beta=0$. Тогда предельный закон распределения в случае его существования является симметрическим. Следовательно, теперь нам предстоит рассмотреть сходимость

$${}_n\tilde{w}_0(t)=f_n^{(1)}(t)\,f_n^{(2)}(t)\to f(t),\tag{19}$$

$${}_n\tilde{w}_1(t)=\prod_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left(1-\frac{2}{p}\right)\frac{f_n^{(1)}(t)}{f_n^{(2)}(t)}\to 0\tag{20}$$

при $n\to\infty$. Согласно той же теореме сходимости законов распределения к предельному, сходимость (19) имеет место тогда и только тогда, когда существует неубывающая ограниченной вариации функция $K(x)$, $K(-\infty)=0$, такая, что при $n\to\infty$

$$L_n(x)=L_n^{(1)}(x)+L_n^{(2)}(x)=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)\neq 0\\ \ln|g(p)|<x B(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\to K(x)$$

в каждой точке непрерывности $K(x)$. Если еще потребовать, чтобы $L_n(+\infty)\to\to K(+\infty)=1$ при $n\to\infty$, тогда в силу соображений, изложенных в конце части a), для предельного закона распределения имеем $\lambda_0(2)=1$.

Сходимость же (19), в свою очередь, влечет за собой сходимость (20). В самом деле, поскольку

$$\varliminf_{n\to\infty}|f_n^{(2)}(t)|\geqslant\lim_{n\to\infty}|f_n^{(1)}(t)\,f_n^{(2)}(t)|=|f(t)|,$$

то для каждого t найдется такое $n_0(t)$, что при всех $n\geqslant n_0(t)$ будет

$$|f_n^{(2)}(t)|>\frac{1}{2}|f(t)|.$$

Отсюда для тех же n следует неравенство

$$|{}_n\tilde{w}_1(t)|\leqslant\frac{2}{f(t)}\prod_{\substack{p\leqslant r\\ g(p)<0}}\left(1-\frac{2}{p}\right),$$

в силу которого имеет место сходимость (20).

Таким образом, условия сходимости функций распределения (13) к предельной доказаны. Как следует из теоретико-вероятностной интерпретации мультипликативных арифметических функций, функции распределения

$$\nu_n\{ e^{-\frac{A(n)}{B(n)}} |g(m)_r|^{\frac{1}{B(n)}} \operatorname{sgn} g(m)_r < x \mid g(m)_r \neq 0 \} \tag{21}$$

при $n \to \infty$ сходятся к той же самой предельной функции распределения.

Для завершения доказательства остается только показать, что в функции распределения (21) „урезанную" функцию $g(m)_r$ можно заменить самой функцией $g(m)$, не повлияв ни на предельный закон распределения, ни на условия его существования. Введем сильно мультипликативную арифметическую функцию

$$g'(m) = \prod_{\substack{p \mid m \\ p > r}} g'(p),$$

где

$$g'(p) = \begin{cases} |g(p)|^{-\frac{1}{B(n)}}, & \text{если} \quad g(p) \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad g(p) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что как обычно, если множество простых чисел p, удовлетворяющих условиям $p \mid m$, $p > r$, пусто, то соответствующее произведение считается равным 1. Поскольку для введенной функции имеем

$$A'(n) = \sum_{\substack{r < p \leq n \\ g'(p) \neq 0}} \frac{\ln |g'(p)|}{p} = \frac{A(r) - A(n)}{B(n)},$$

$$\left(B'(n) \right)^2 = \sum_{\substack{r < p \leq n \\ g'(p) \neq 0}} \frac{\ln^2 |g'(p)|}{p} = 1 - \frac{B^2(r)}{B^2(n)},$$

то на основании леммы 4 и того, что $g(m) \in \mathfrak{M}_н$, при $n \to \infty$

$$\nu_n \left\{ \left(e^{\frac{A(n) - A(r)}{B(n)}} \left| \frac{g(m)_r}{g(m)} \right|^{\frac{1}{B(n)}} - 1 \right)^2 > \varepsilon \mid g(m)_r\, g(m) \neq 0 \right\} =$$

$$= \nu_n \left\{ \left(e^{\frac{A(n) - A(r)}{B(n)}} \prod_{\substack{p \mid m \\ p > r}} |g(p)|^{-\frac{1}{B(n)}} - 1 \right)^2 > \varepsilon \mid g(m) \neq 0 \right\} =$$

$$= B\nu_n \left\{ \left(|g'(m)|\, e^{-A'(n)} - 1 \right)^2 > \varepsilon \,|\, g'(m) \neq 0 \right\} =$$

$$= \frac{B}{\ln^2(1 + \sqrt{\varepsilon})} \left(1 - \frac{B^2(r)}{B^2(n)} \right) \to 0.$$

Кроме того, согласно определению класса $\mathfrak{M}_н$ при $n \to \infty$

$$\nu_n \{ g(m)_r\, g(m) < 0 \mid g(m)_r\, g(m) \neq 0 \} = \nu_n \left\{ \prod_{\substack{p \mid m \\ p > r}} g(p) < 0 \mid g(m) \neq 0 \right\} =$$

$$= \frac{\nu_n \left\{ \prod\limits_{\substack{p \mid m \\ g > r}} g(p) < 0 \right\}}{\nu_n \{ g(m) \neq 0 \}} < \frac{2\nu_n \left\{ \prod\limits_{\substack{p \mid m \\ p > r}} g(p) < 0 \right\}}{\prod\limits_{g(p) = 0} \left(1 - \frac{1}{p} \right)} \to 0.$$

Поэтому, поскольку условия леммы 1 выполнены, функции распределения

$$\nu_n\left\{ e^{-\frac{A(n)}{B(n)}}\,|\,g(m)\,|^{\frac{1}{B(n)}}\operatorname{sgn} g(m)<x \mid g(m)\neq 0\right\}$$

при $n\to\infty$ сходятся к той же самой предельной функции распределения, что и (21).

Теорема доказана.

В качестве приложения доказанной теоремы рассмотрим условия сходимости к нормальному, логарифмически нормальному и равномерному законам.

Теорема 2. *Для сходимости функций распределения*

$$\nu_n\left\{ A_n\,|g(m)|^{\frac{1}{B(n)}}\operatorname{sgn} g(m)<x \mid g(m)\neq 0\right\},$$

где $g(m)$ — сильно мультипликативная функция из класса $\mathfrak{M}_{\text{н}}$, при надлежащем подборе постоянных A_n к нормальному закону

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

необходимо и достаточно, чтобы

1° $\beta=0$,

2° $$\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leq n\\ g(p)\neq 0\\ \ln|g(p)|<x B(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\to\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{u\,du}{\operatorname{sh} u} & \text{для } x<0,\\[2ex] \dfrac{\pi^2}{4} & \text{для } x>0,\end{cases}$$

при $n\to\infty$.

В качестве постоянных A_n можно выбрать

$$A_n=\exp\left\{-\frac{A(n)}{B(n)}-\frac{C+\ln 2}{2}\right\},$$

где $C=0,577\ldots$ — постоянная Эйлера.

Доказательство. Нормальному закону распределения соответствует характеристическое преобразование с элементами

$$w_0(t)=\frac{2^{it}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1+it}{2}\right),\qquad w_1(t)\equiv 0.$$

Элемент $w_0(t)$ является А-безгранично делимой характеристической функцией, которую с помощью формулы Малмстэна [7, стр. 34]

$$\ln\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\left\{\frac{e^{-zt}-e^{-t}}{1-e^{-t}}+(z-1)e^{-t}\right\}\frac{dt}{t},\qquad \operatorname{Re} z>0,$$

представим в канонической форме. Имеем

$$\ln\Gamma\left(\frac{1+it}{2}\right)=I_1+I_2,$$

где

$$I_1=\int_0^\infty\left(e^{-\frac{itu}{2}}-1+\frac{itu}{2}\right)\frac{du}{u\left(e^{\frac{u}{2}}-e^{-\frac{u}{2}}\right)}=\int_{-\infty}^0\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{dx}{2x\operatorname{sh}x},$$

$$I_2=\int_0^\infty\left\{1-\frac{itu}{2}-e^{-\frac{u}{2}}+\frac{1}{2}\,it\,e^{-u}\left(e^{\frac{u}{2}}-e^{-\frac{u}{2}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\,e^{-u}\left(e^{\frac{u}{2}}-e^{-\frac{u}{2}}\right)\right\}\frac{du}{u\left(e^{\frac{u}{2}}-e^{-\frac{u}{2}}\right)}=\ln\sqrt{\pi}-\frac{it}{2}\,(C+2\ln 2).$$

Следовательно,

$$\ln w_0(t)=it\gamma+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)dK(x),$$

где

$$\gamma=-\frac{C+\ln 2}{2},$$

$$K(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{u\,du}{\operatorname{sh}u} & \text{для}\quad x\leqslant 0,\\[2ex] \dfrac{\pi^2}{4} & \text{для}\quad x>0.\end{cases}$$

Согласно теореме 1 для сходимости функций распределения

$$\nu_n\left\{e^{-\frac{A(n)}{B(n)}}|g(m)|^{\frac{1}{B(n)}}\operatorname{sgn} g(m)<x \mid g(m)\neq 0\right\} \tag{22}$$

при $n\to\infty$ к предельной, соответствующей характеристическому преобразованию

$$w_0'(t)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}\,dK(x)\right\},$$

$$w_1'(t)\equiv 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

(I) $\quad\beta=0,$

(II) $\quad\displaystyle\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)\neq 0\\ \ln|g(p)|<xB(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\to K(x)$

при $n\to\infty$ в каждой точке непрерывности функции $K(x)$. Так как элементы характеристического преобразования соответствующего нормальному закону равны

$$w_j(t)=e^{it\gamma}\,w_j'(t),\qquad j=0,1,$$

то функции распределения (22) необходимо дополнительно центрировать, умножением на $\exp\gamma$.

Теорема доказана.

Как видно из условий доказанной теоремы, нормальный закон распределет ния не обладает той общностью по сравнению с тем, какую роль он играе- по отношению к аддитивным арифметическим функциям. Его место теперь занимает логарифмически нормальный закон. Рассмотрим сначала следующие три логарифмически нормальных закона с плотностями:

a) правосторонний

$$p_1(x)=\begin{cases} 0 & \text{для } x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\ln^2 x}{2}} & \text{для } x>0;\end{cases}$$

b) левосторонний

$$p_2(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{|x|\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\ln^2 |x|}{2}} & \text{для } x<0,\\ 0 & \text{для } x\geqslant 0;\end{cases}$$

c) двусторонний симметрический

$$p_3(x)=\frac{1}{2|x|\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\ln^2 |x|}{2}}, \qquad x\neq 0.$$

Поскольку элементы соответствующих им характеристических преобразований равны

$$w_0(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad w_1(t)=\alpha_1 e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где

$$\alpha_1=\begin{cases} 1 & \text{в случае a)},\\ -1 & \text{в случае b)},\\ 0 & \text{в случае c)},\end{cases}$$

то все три перечисленных закона распределения М-безгранично делимы. Как мы уже видели, для мультипликативных функций класса $\mathfrak{M}_н$ параметр $\bar{\alpha}_1=\beta$. Поскольку он не может быть отрицательным, то левосторонний логарифмически нормальный закон предельным законом служить не может. Если же $\beta=1$, то для всех простых p имеем $g(p)>0$ и вопрос сведется к аддитивным функциям

$$f(m)=\ln g(m).$$

Поэтому заслуживает внимания только двусторонний симметрический логарифмический нормальный закон распределения. Его функция распределения равна

$$L(x)=\frac{1}{2}\,[1+G(\ln|x|)\operatorname{sgn} x].$$

Теорема 3. *Для сходимости функций распределения*

$$\nu_n\{e^{-\frac{A(n)}{B(n)}}\,|g(m)|^{\frac{1}{B(n)}}\operatorname{sgn} g(m)<x \mid g(m)\neq 0\},$$

где $g(m)$ — сильно мультипликативная функция из класса $\mathfrak{M}_н$, к двустороннему симметрическому логарифмически нормальному закону $L(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

1° $\beta=0$,

2° *для любого* $\varepsilon>0$ *при* $n\to\infty$

$$\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)\neq 0\\ \left|\ln|g(p)|\right|>\varepsilon B(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\to 0.$$

Доказательство. Поскольку закону $L(x)$ соответствует характеристическое преобразование с элементами

$$w_0(t)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}\,dK(x)\right\},$$

$$w_1(t)\equiv 0,$$

где

$$K(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x\leqslant 0,\\ 1 & \text{для } x>0,\end{cases}$$

то на основании теоремы 1 требуемая сходимость имеет место тогда и только тогда, когда $\beta=0$ и для любого $\varepsilon>0$ при $n\to\infty$

$$\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)\neq 0\\ \ln|g(p)|<-\varepsilon B(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\to 0,$$

$$\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)\neq 0\\ \ln|g(p)|<\varepsilon B(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\to 1.$$

А эти условия равносильны приведенным в теореме.

Теорема доказана.

В отличие от аддитивных арифметических функций, для мультипликативных функций в качестве предельного закона распределения может выступить равномерное распределение в интервале $(-a, a)$.

Теорема 4. *Для сходимости функций распределения*

$$\nu_n\left\{A_n|g(m)|^{\frac{1}{B(n)}}\operatorname{sgn} g(m)<x \mid g(m)\neq 0\right\},$$

где $g(m)$ — сильно мультипликативная функция из класса $\mathfrak{M}_н$, при надлежащем подборе постоянных A_n к равномерному распределению в интервале $(-a, a)$, необходимо и достаточно, чтобы

1° $\beta=0$,

2° $$\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)\neq 0\\ \ln|g(p)|<xB(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\to\begin{cases}(1-x)e^x & \text{для } x\leqslant 0,\\ 1 & \text{для } x>0,\end{cases}$$

при $n\to\infty$.

В качестве постоянных A_n можно выбрать

$$A_n = \exp\left\{-\frac{A(n)}{B(n)} + \ln a - 1\right\}.$$

Доказательство. Элементы характеристического преобразования равномерного распределения в интервале $(-a,\ a)$ равны

$$w_0(t) = \frac{a^{it}}{1+it}, \qquad w_1(t) \equiv 0.$$

Элемент $w_0(t)$ представим в виде произведения

$$w_0(t) = e^{it \ln a} \varphi(t),$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+it}$$

является характеристической функцией некоторого A-безгранично делимого закона. Найдем ее кононическое представление по формуле Колмогорова. Для этого с одной стороны воспользуемся тем, что экспонентный закон с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \leqslant 0, \\ e^{-x} & \text{для} \quad x > 0, \end{cases}$$

имеет характеристическую функцию, равную [6, стр. 94]

$$f(t) = \frac{1}{1-it} = \exp\left\{it + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx)\frac{1}{x^2}\,dK(x)\right\},$$

где

$$K(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \leqslant 0, \\ 1-(x+1)e^{-x} & \text{для} \quad x > 0. \end{cases}$$

С другой стороны имеем

$$\varphi(t) = f(-t) = \exp\left\{-it + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-itx} - 1 + itx)\frac{1}{x^2}\,dK(x)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-it + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx)\frac{1}{x^2}\,dK'(x)\right\},$$

где

$$K'(x) = K(+\infty) - K(-x) = \begin{cases} (1-x)e^{x} & \text{для} \quad x \leqslant 0, \\ 1 & \text{для} \quad x > 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$w_0(t) = \exp\left\{it(\ln a - 1) + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx)\frac{1}{x^2}\,dK'(x)\right\},$$

и рассматриваемая теорема является прямым следствием теоремы 1.

4. Квазисимметрические законы распределения. Поскольку предельные распределения аддитивных арифметических функций широко изучены Й. П. Кубилюсом в его монографии [1], то естественно возникает желание свести задачу о распределении мультипликативных функций к аналогичным, уже решенным задачам для аддитивных функций. Конечно, в общем случае этого сделать невозможно. Частные случаи, по-видимому, надо искать среди тех законов распределения, для которых знак и абсолютное значение случайной величины независимы. Оказывается, что таким свойством обладают квазисимметрические законы распределения, т. е. такие законы, функции распределения которых при каждом $x>0$ удовлетворяют условию

$$1-F(x)=cF(-x+0), \qquad 0<c<+\infty,$$

где c — некоторая постоянная. При $c=1$ получаем симметрический закон распределения.

Кроме того, квазисимметрический закон распределения обладает следующим очевидным свойством. Если случайная величина ξ распределена по некоторому квазисимметрическому закону $F_\xi(x)$, то при каждом $x>0$ имеем

$$F_\xi(x)=\frac{cF_{|\xi|}(x)+1}{c+1}, \qquad F_\xi(-x+0)=\frac{1-F_{|\xi|}(x)}{c+1},$$

где $F_{|\xi|}(x)$ — функция распределения $|\xi|$. Следовательно, если случайная величина ξ распределена по квазисимметрическому закону, то ее функция распределения вполне определяется с помощью функции распределения ее абсолютной величины $|\xi|$ и параметра c, равного

$$c=\frac{\mathbf{P}(\xi>0)}{\mathbf{P}(\xi<0)}.$$

Лемма 8. *Пусть случайная величина ξ принимает как положительные, так и отрицательные значения с положительными вероятностями. Для независимости абсолютной величины $|\xi|$ и знака* sgn ξ *необходимо и достаточно, чтобы случайная величина ξ была распределена по некоторому квазисимметрическому закону, непрерывному в точке $x=0$.*

Доказательство. Через y обозначим любое из чисел -1, 0, 1. Случайные величины $|\xi|$ и $\operatorname{sgn}\xi$ будут независимы тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}(|\xi|<x,\ \operatorname{sgn}\xi=y)=\mathbf{P}(|\xi|<x)\ \mathbf{P}(\operatorname{sgn}\xi=y) \tag{23}$$

при всех допустимых значениях x и y. Поскольку

$$\mathbf{P}(|\xi|<x,\ \operatorname{sgn}\xi=y)=\begin{cases} 0 & \text{для } x\leqslant 0,\\ \mathbf{P}(-x<\xi<0) & \text{для } x>0,\ y=-1\\ \mathbf{P}(\xi=0) & \text{для } x>0,\ y=0,\\ \mathbf{P}(0<\xi<x) & \text{для } x>0,\ y=1,\end{cases}$$

а также

$$\mathbf{P}(\operatorname{sgn}\xi=y)=\begin{cases} \mathbf{P}(\xi<0) & \text{для } y=-1,\\ \mathbf{P}(\xi=0) & \text{для } y=0,\\ \mathbf{P}(\xi>0) & \text{для } y=1,\end{cases}$$

то (23) имеет место тогда и только тогда, когда при любом $x>0$ выполенены следующие три соотношения:

$$\mathbf{P}(-x<\xi<0)=\mathbf{P}(|\xi|<x)\ \mathbf{P}(\xi<0),$$
$$\mathbf{P}(\xi=0)=\mathbf{P}(|\xi|<x)\ \mathbf{P}(\xi=0),$$
$$\mathbf{P}(0<\xi<x)=\mathbf{P}(|\xi|<x)\ P(\xi>0).$$

Согласно условиям леммы

$$\mathbf{P}(\xi=0)<1.$$

Поэтому второе из приведенных трех соотношений имеет место тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}(\xi=0)=0.$$

Ввиду этого два остальных соотношения равносильны следующему

$$1-F(x)=\frac{1-F(0)}{F(0)}F(-x+0),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 9. *Функция распределения $F(x)$ является квазисимметрической тогда и только тогда, когда элементы соответствующего ей характеристического преобразования удовлетворяют соотношению*

$$w_1(t)=K\,w_0(t), \qquad |K|<1, \tag{24}$$

где K – вещественная постоянная.

Доказательство. Пусть функция распределения $F(x)$ является квазисимметрической. Тогда

$$w_0(t)=\int_0^{+\infty} x^{it}\,dF(x)-\int_0^{+\infty} x^{it}\,d\left\{\frac{1-F(x)}{c}\right\}=\left(1+\frac{1}{c}\right)\int_0^{+\infty} x^{it}\,dF(x),$$

$$w_1(t)=\int_0^{+\infty} x^{it}\,dF(x)+\int_0^{+\infty} x^{it}\,d\left\{\frac{1-F(x)}{c}\right\}=\left(1-\frac{1}{c}\right)\int_0^{+\infty} x^{it}\,dF(x),$$

откуда следует требуемое соотношение:

$$w_1(t)=\frac{c-1}{c+1}\,w_0(t).$$

Пусть теперь имеет место (24). Тогда, обозначая

$$c^+=\mathbf{P}(\xi>0), \qquad c^-=\mathbf{P}(\xi<0),$$

при $t=0$ получаем

$$c^+-c^-=K(c^++c^-).$$

Отсюда следует, что $c^-=0$ тогда и только тогда, когда $c^+=0$. В этом случае имеем

$$\mathbf{P}(\xi=0)=1,$$

т. е. симметрический закон распределения.

Если же $c^- \neq 0$ и $\pm x$ являются точками непрерывности функции распределения $F(x)$, тогда с помощью формулы обращения для $x>0$ находим, что

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} c^+ - \frac{1+K}{2\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \{ x^{-it} w_0(t) \} \frac{dt}{t},$$

$$F(-x) = \frac{1}{2} c^- + \frac{1+K}{2\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \{ x^{-it} w_0(t) \} \frac{dt}{t}.$$

Поэтому

$$1 - F(x) = \frac{1+K}{1-K} F(-x) + \frac{1}{2} c^+ - \frac{1}{2} c^- \frac{1+K}{1-K} = \frac{1+K}{1-K} F(-x),$$

что и требовалось доказать.

Согласно доказанной лемме, М-безгранично делимая функция распределения $F(x)$ является квазисимметрической тогда и только тогда, когда $f^{(2)}(t) \equiv 1$. Таким образом, элементы характеристического преобразования, соответствующего М-безгранично делимой квазисимметрической функции распределения, имеют вид

$$w_0(t) = \alpha_0 f^{(1)}(t), \qquad w_1(t) = \alpha_1 f^{(1)}(t).$$

Следовательно, теперь (16) и (18) превращаются в

$$w_0(t) = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} dK^{(1)}(x) \right\},$$

$$w_1(t) = \beta \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} dK^{(1)}(x) \right\},$$

где $K^{(1)}(x)$ – неубывающая функция ограниченной вариации такая, что $K^{(1)}(-\infty) = 0$.

Теорема 5. *Пусть $g(m)$ – сильно мультипликативная функция из класса $\mathfrak{M}_{\text{н}}$, не принимающая значения 0. Тогда для сходимости функций распределения*

$$\nu_n \left\{ e^{-\frac{A(n)}{B(n)}} |g(m)|^{\frac{1}{B(n)}} \operatorname{sgn} g(m) < x \right\} \tag{25}$$

к некоторой квазисимметрической предельной функции распределения с М-семиинвариантами $\lambda_j(2) = 1$, $j = 0, 1$ (в случае $\beta = 0$ только $\lambda_0(2) = 1$), необходимо и достаточно выполнения следующих условий.

а) *В случае $\beta > 0$ при $n \to \infty$*

1° $$\frac{1}{B^2(n)} \sum_{\substack{p \le n \\ g(p) < 0}} \frac{\ln^2 |g(p)|}{p} \to 0,$$

2° *существует функция распределения $\Phi(x)$ с дисперсией 1 такая, что в каждой ее точке непрерывности*

$$\nu_n \left\{ \frac{\ln |g(m)| - A(n)}{B(n)} < x \right\} \to \Phi(x).$$

b) *В случае* $\beta=0$ *имеет место только условие* 2°.

Предельная функция распределения $F(x)$ *определяется по формулам*

$$F(x)=\frac{1+\beta}{2}\left[\frac{1-\beta}{1+\beta}+\Phi(\ln x)\right],$$

$$F(-x+0)=\frac{1-\beta}{2}\left[1-\Phi(\ln x)\right],\qquad x>0.$$

Доказательство. Теорема становится тривиальной, когда $\beta=1$. Если же $0<\beta<1$, тогда по теореме 1 требуемая сходимость имеет место тогда и только тогда, когда при $n\to\infty$

$$\text{(I)}\qquad \frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)<0\\ \ln|g(p)|<xB(n)}}^{n\to 8}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\to K^{(2)}(x)\equiv 0,$$

(II) существует неубывающая функция $K^{(1)}(x)$, $K^{(1)}(-\infty)=0$, с вариацией 1 такая, что

$$\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)>0\\ \ln|g(p)|<xB(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\to K^{(1)}(x),$$

$$\text{(III)}\qquad \frac{1}{B(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)<0}}\frac{\ln|g(p)|}{p}\to 0,$$

причем сходимость в (I) и (II) имеет место не только в каждой точке непрерывности функций $K^{(\nu)}(x)$, $\nu=1,2$ соответственно, но и в точке $x=+\infty$. Следовательно, тогда М-семиинварианты предельной функции распределения равны

$$\lambda_j(2)=K^{(1)}(+\infty)+(-1)^j K^{(2)}(+\infty)=1,\qquad j=0,1.$$

Очевидно, в данном случае функция $K^{(2)}(x)$ условию (17) удовлетворяет. Кроме того, условие (I) равносильно условию 1°.

Далее, в силу неравенства Коши имеем

$$\left|\frac{1}{B(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)<0}}\frac{\ln|g(p)|}{p}\right|\leqslant\left\{\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)<0}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{g(p)<0}\frac{1}{p}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому, ввиду того, что $\beta>0$, условие (III) выполнено всегда, когда только имеет место (I).

Условия же (I) и (II) вместе взятые согласно теореме 4.1 из [1] являются необходимыми и достаточными для того, чтобы при $n\to\infty$

$$\nu_n\left\{\frac{\ln|g(m)|-A(n)}{B(n)}<x\right\}\to\Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — некоторая функция распределения с дисперсией 1.

Пусть теперь $\beta=0$. Тогда согласно теореме 1 для требуемой сходимости необходимо и достаточно существования неубывающей функции $K^{(1)}(x)$, $K^{(1)}(-\infty)=0$, с вариацией 1 такой, чтобы при $n\to\infty$

$$\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ \ln|g(p)|<xB(n)}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}\to K^{(1)}(x)$$

не только в каждой точке непрерывности функции $K^{(1)}(x)$, но и в точке $x=+\infty$. Это же равносильно одному только условию 2°, причем для предельного закона распределения $\lambda_0(2)=1$.

Наконец, ввиду того, что предельная функция распределения $F(x)$ является квазисимметрической с параметром

$$c=\frac{1+\beta}{1-\beta},$$

для любого $x>0$ находим, что

$$F(x)=\frac{c\Phi(\ln x)+1}{c+1}=\frac{1+\beta}{2}\left[\frac{1-\beta}{1+\beta}+\Phi(\ln x)\right],$$

$$F(-x+0)=\frac{1-\Phi(\ln x)}{c+1}=\frac{1-\beta}{2}\left[1-\Phi(\ln x)\right].$$

Теорема доказана.

Как уже видели, логарифмически нормальный закон по отношению к мультипликативным функциям занимает место нормального закона. Поэтому не лишен интереса частный случай теоремы 5, когда в качестве предельного закона распределения выступает логарифмически нормальный закон. Для этой цели упомянутые выше три логарифмически нормальных закона, конечно, непригодны. Односторонние законы не являются квазисимметрическими, а симметрический охватывает только случай в) теоремы 5. Поэтому определим двусторонний квазисимметрический логнормальный закон распределения полностью

$$l(p,x)=\begin{cases}\dfrac{p}{x\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\ln^2 x}{2}} & \text{для} \quad x>0,\\[2ex] \dfrac{q}{|x|\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\ln^2|x|}{2}} & \text{для} \quad x<0,\end{cases}$$

где неотрицательные параметры p, q удовлетворяют условию $p+q=1$. Функция распределения, соответствующая этой плотности равна

$$L(p,x)=\begin{cases}q-q\;G(\ln|x|) & \text{для} \quad x<0,\\ q+p\;G(\ln x) & \text{для} \quad x>0.\end{cases}$$

Легко видеть, что если случайная величина ξ распределена по закону $L(p, x)$, то логарифм ее абсолютной величины $\ln|\xi|$ распределен по нормальному закону $G(x)$.

Поскольку элементы характеристического преобразования, соответствующего функции распределения $L(p, x)$ равны

$$w_0(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad w_1(t)=\alpha_1\,e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где $\alpha_1=p-q$, то функция распределения $L(p, x)$ — квазисимметрическая и прямым следствием теоремы 5 является

Теорема 6. *Для сходимости функций распределения*

$$\nu_n\left\{e^{-\frac{A(n)}{B(n)}}\,|g(m)|^{\frac{1}{B(n)}}\operatorname{sgn} g(m)<x\right\},$$

где $g(m)$ — сильно мультипликативная функция из класса $\mathfrak{M}_н$, не принимающая значения 0, к функции распределения $L\left(\frac{1+\beta}{2}, x\right)$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий.

a) *В случае $\beta>0$ при $n\to\infty$*

$$1^\circ \qquad \frac{1}{B^2(n)} \sum_{\substack{p\leq n \\ g(p)<0}} \frac{\ln^2 |g(p)|}{p} \to 0,$$

$$2^\circ \qquad \nu_n\left\{ \frac{\ln|g(m)|-A(n)}{B(n)}<x \right\} \to G(x).$$

b) *В случае $\beta=0$ имеет место только условие 2°.*

Пример. Рассмотрим сильно мультипликативную функцию

$$g(m)=e^{\omega(m)}\prod_{\substack{p\mid m \\ p>2}} \operatorname{sgn}(p-a),$$

где $\omega(m)$ — число различных простых делителей m, a — некоторая вещественная постоянная, неравная простому числу. Очевидно, эта функция принадлежит классу $\mathfrak{M}_н$. Согласно теореме 4.2 из [1], при $n\to\infty$

$$\nu_n\left\{ \frac{\omega(m)-A(n)}{B(n)}<x \right\} \to G(x),$$

где

$$A(n)=B^2(n)=\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}=\ln\ln n+B.$$

Так как функция $g(m)$ принимает отрицательные значения только при ограниченном количестве простых чисел, то условие 1° теоремы 6 заведомо выполняется. Параметр β равен

$$\beta=\prod_{2<p<a}\left(1-\frac{2}{p}\right).$$

Следовательно, по теореме 6 и следствию леммы 1 при $n\to\infty$ имеем

$$\nu_n\left\{ \exp\left\{ \frac{\omega(m)-\ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}} \right\} \prod_{\substack{p\mid m \\ p>2}} \operatorname{sgn}(p-a)<x \right\}\to L\left(\frac{1+\beta}{2}, x\right).$$

В заключение хочу выразить глубокую благодарность своему научному руководителю Йонасу Петровичу Кубилюсу.

Каунасский Политехнический институт

Поступило в редакцию 8.III.1968

Литература

1. Й. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.
2. А. Бакштис, О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций, Лит. мат. сб., VIII, № 1 (1968), 5-20.
3. А. Бакштис, О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций (II). Лит. мат. сб., VIII, № 2, (1968), 201—219.

4. H. Ostmann, Additive Zahlentheorie, II, Erg. Math., № 11, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer—Verlag, 1956.
5. В. М. Золотарев, Общая теория перемножения независимых случайных величин, ДАН СССР, 142, № 4, 1962, 788–791.
6. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., Гостехиздат, 1949.
7. Э. Т. Уиттекер и Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.

MULTIPLIKATYVINIŲ ARITMETINIŲ FUNKCIJŲ RIBINIŲ PASISKIRSTYMO DĖSNIŲ KLAUSIMU (III)

A. BAKŠTYS

(Reziumė)

Pažymėsime $\nu_n\{\ldots\}$ — dažnumą sveikų teigiamų skaičių $m \leqslant n$, kuriems yra patenkinta skliaustuose nurodyta sąlyga,

$$\nu_n\{A \mid B\} = \frac{\nu_n\{A \cap B\}}{\nu_n\{B\}},$$

$g(m)$ — multiplikatyvinė aritmetinė funkcija,

$$A(n) = \sum_{\substack{p \leqslant n \\ g(p) \neq 0}} \frac{\ln |g(p)|}{p}, \qquad B^2(n) = \sum_{\substack{p \leqslant n \\ g(p) \neq 0}} \frac{\ln^2 |g(p)|}{p}.$$

Įrodytos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad pasiskirstymo funkcijos

$$\nu_n\{e^{-\frac{A(n)}{B(n)}} |g(m)|^{\frac{1}{B(n)}} \operatorname{sgn} g(m) < x \mid g(m) \neq 0\},$$

kai $n \to \infty$, konverguotų į ribinę pasiskirstymo funkciją, jeigu tik $g(m)$ yra reali stipriai multiplikatyvinė aritmetinė funkcija, patenkinanti šias sąlygas (klasė $\mathfrak{M}_H$):

$$\sum_{g(p)=0} \frac{1}{p} < +\infty,$$

ir kai $n \to \infty$

1) $B(n) \to \infty$,

2) egzistuoja tokia neaprėžtai didėjanti funkcija $r = r(n)$, kad

$$\frac{\ln r}{\ln n} \to 0, \qquad \frac{B(r)}{B(n)} \to 1,$$

3) $\nu_n \left\{ \prod_{\substack{p \mid m \\ p > r}} g(p) < 0 \right\} \to 0.$

ÜBER DIE GRENZVERTEILUNGEN VON MULTIPLIKATIVEN ZAHLENTHEORETISCHEN FUNKTIONEN (III)

A. BAKŠTYS

(Zusammenfassung)

Bezeichnungen:

$\nu_n\{\ldots\}$ ist Häufigkeit der ganzen positiven Zahlen $m \leqslant n$, die die hinweisenen Bedingungen in Klammern genügen,

$$\nu_n\{A \mid B\} = \frac{\nu_n\{A \cap B\}}{\nu_n\{B\}},$$

$g(m)$ ist multiplikative zahlentheoretische Funktion,

$$A(n)=\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)\neq 0}}\frac{\ln|g(p)|}{p}, \qquad B^2(n)=\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)\neq 0}}\frac{\ln^2|g(p)|}{p}.$$

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Konvergenz einer Folge von Verteilungsfunktionen

$$\nu_n\{e^{-\frac{A(n)}{B(n)}}|g(m)|^{\frac{1}{B(n)}}\operatorname{sgn} g(m)<x \mid g(m)\neq 0\}$$

für $n\to\infty$ gegen eine Grenzverteilungsfunktion bewiesen, wenn die stark multiplikative zahlentheoretische Funktion $g(m)$ diese Bedingungen erfüllt (Klasse $\mathfrak{M}_B$):

$$\sum_{g(p)=0}\frac{1}{p}<+\infty$$

ist und für $n\to\infty$

1) $B(n)\to\infty$,

2) es gibt derartige unbegrenzt wachsende Funktion $r=r(n)$, daß

$$\frac{\ln r}{\ln n}\to 0, \qquad \frac{B(r)}{B(n)}\to 1,$$

3) $\nu_n\left\{\prod_{\substack{p\mid m\\ p>r}} g(p)<0\right\}\to 0.$