VIII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1968

УДК — 517.521.8

ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ И СХОДИМОСТИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

В. М. ТУРПАНОВА

§1. Пусть $K(\alpha, \beta, \Theta)$ – произвольная функция, ограниченная в области $0 \leqslant a \leqslant \alpha \leqslant A$, $0 \leqslant b \leqslant \beta \leqslant B$, $t \leqslant \Theta \leqslant T$.

Пусть $\Delta \in (t, T]$ – некоторый интервал (открытый, замкнутый или полуоткрытый), $\sigma_i \in \Delta$ – либо точка, либо интервал (открытый, замкнутый или полуоткрытый), $\{\sigma_i\}$ – разбиение интервала Δ ($\sigma_i \cap \sigma_k = 0$ при $i \neq K$, $U\sigma_i = \Delta$), $\alpha(\sigma)$, $\beta(\sigma)$ – некоторые меры.

Разобьем интервал Δ произвольным образом на множества $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} {}^{(l)} K[\alpha(\sigma_i), \beta(\sigma_i), \Theta_i]$,

где Θ_i – некоторое значение, принадлежащее $\overline{\sigma_i}$ и выбранное по некоторому признаку l.

Верхнюю грань всех таких сумм по всевозможным разбиениям обозначим

$$\sup \sum_{i=1}^{n} {}^{(l)} K[\alpha(\sigma_i), \beta(\sigma_i), \Theta_i] = \overset{+}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K[\alpha(d\sigma), \beta(d\sigma), \Theta],$$

а нижнюю грань

$$\inf \sum_{i=1}^{n} {}^{(l)} K[\alpha(\sigma_i), \beta(\sigma_i), \Theta_i] = \overset{-}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K[\alpha(d\sigma), \beta(d\sigma), \Theta].$$

Рассмотрим некоторые свойства введенных интегралов.

1. Если a – произвольное положительное число, то

$$\overset{+}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} a \cdot K = a \overset{+}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K, \quad \overset{-}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} a \cdot K = a \overset{-}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K.$$

2. Если $a < 0$, то $\overset{+}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} a \cdot K = a \overset{-}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K$, $\overset{-}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} a \cdot K = a \overset{+}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K$.

3. $$\overset{-}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K_1 + \overset{+}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K_2 \leqslant \overset{+}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} (K_1 + K_2) \leqslant \overset{+}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K_1 + \overset{+}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K_2,$$

$$\overset{-}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K_1 + \overset{-}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K_2 \leqslant \overset{-}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} (K_1 + K_2) \leqslant \overset{-}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K_1 + \overset{+}{\int\limits_{\Theta \in \Delta, l}} K_2,$$

(K_1 и K_2 – равноправны).

Свойства 1 и 2 очевидны, свойство 3 следует из известных свойств верхней и нижней граней.

Следствия

1. $$\overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} (K_1-K_2) = \overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} [K_1+(-K_2)],$$

поэтому

$$\overset{-}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_1 - \overset{-}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_2 \leqslant \overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} (K_1-K_2) \leqslant \overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_1 - \overset{-}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_2.$$

А так как K_1 и K_2 равноправны, то также справедливо неравенство:

$$\overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} [K_1+(-K_2)] \geqslant \overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_1 + \overset{-}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} (-K_2) = \overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_1 - \overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_2.$$

Отсюда следует, что

$$\max\left\{\left(\overset{-}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_1 - \overset{-}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_2\right), \left(\overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_1 - \overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_2\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} (K_1-K_2) \leqslant \overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_1 - \overset{-}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_2.$$

2. Аналогично,

$$\overset{-}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_1 - \overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_2 \leqslant \overset{-}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} (K_1-K_2) \leqslant$$

$$\leqslant \min\left\{\left(\overset{-}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_1 - \overset{-}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_2\right), \left(\overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_1 - \overset{+}{\int\limits_{\theta\in\Delta,\, l}} K_2\right)\right\}.$$

Пусть $\{\lambda_n\}$ – последовательность комплексных чисел, причем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty$, а $\{\lambda_{n_k}\}$ – ее подпоследовательность, составленная из тех членов последовательности $\{\lambda_n\}$, аргументы которых принадлежат множеству σ,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|} = \beta(\sigma), \qquad \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|} = \alpha(\sigma).$$

Очевидно, что выполняются неравенства:

$$\alpha(\sigma_1+\sigma_2) \geqslant \alpha(\sigma_1)+\alpha(\sigma_2),$$
$$\beta(\sigma_1+\sigma_2) \leqslant \beta(\sigma_1)+\beta(\sigma_2).$$

Если последовательность $\{\lambda_n\}$ содержится в угле $|\arg z| \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}$, то для всякого ψ, не принадлежащего углам $|\arg(\pm z)^2| \leqslant \gamma$ имеют место ([3], [4]) оценки вида

$$H_1' - \varepsilon < \frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r} < H_2' + \varepsilon,$$

где $L(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$ — характеристическая функция последовательности $\{\lambda_n\}$, $\varepsilon>0$ — любое, r — достаточно велико, а H_1' и H_2' определяются следующим образом.

Пусть $\Delta=[-\gamma,\gamma]$, Δ_1, Δ_2, Δ_3 — пересечения Δ с интервалами

$$\left[\psi-\frac{\pi}{4},\gamma\right],\ \left[\psi-\frac{3}{4}\pi,\ \psi-\frac{\pi}{4}\right),\ \left[-\gamma,\ \psi-\frac{3}{4}\pi\right).$$

Тогда

$$H_1'=\overset{+}{\int\limits_{\varphi\in\Delta_1 l^-}}\Big\{\pi\alpha(d\sigma)\cdot\sin|\psi-\varphi|-$$

$$-\sqrt{2}H_1\left[\alpha(d\sigma),\ \beta(d\sigma),\ |\psi-\varphi|\right]\cdot\sin\left[\frac{\pi}{4}-|\psi-\varphi|\right]\Big\}+$$

$$+\overset{+}{\int\limits_{\varphi\in\Delta_2,\,l^-}}\pi\alpha(d\sigma)\cdot\sin|\psi-\varphi|+\overset{+}{\int\limits_{\varphi\in\Delta_3,\,l^-}}\Big\{\pi\alpha(d\sigma)\cdot\sin|\psi-\varphi|-$$

$$-\sqrt{2}H_1\left[\alpha(d\sigma),\ \beta(d\sigma),\ |\psi-\varphi|\right]\cdot\sin\left[\frac{3}{4}\pi-|\psi-\varphi|\right]\Big\},$$

$$H_2'=\overset{-}{\int\limits_{\varphi\in\Delta_1,\,l^+}}\Big\{\pi\beta(d\sigma)\cdot\sin|\psi-\varphi|+$$

$$+\sqrt{2}H_2[\alpha(d\sigma),\ \beta(d\sigma)]\cdot\sin\left[\frac{\pi}{4}-|\psi-\varphi|\right]\Big\}+$$

$$+\overset{-}{\int\limits_{\varphi\in\Delta_2,\,l^+}}\pi\beta(d\sigma)\cdot\sin|\psi-\varphi|+$$

$$+\overset{-}{\int\limits_{\varphi\in\Delta_3,\,l^+}}\Big\{\pi\beta(d\sigma)\cdot\sin|\psi-\varphi|+\sqrt{2}H_2[\alpha(d\sigma),\ \beta(d\sigma)]\sin\left[\frac{3}{4}\pi-|\psi-\varphi|\right]\Big\}. \quad (1.1)$$

Здесь l^+, l^- — признаки, состоящие в том, что для всякого σ_i выбирается такое $\varphi=\varphi_i\in\bar{\sigma}_i$, для которого значение $\sin|\psi-\varphi|$ — наибольшее или наименьшее соответственно. Что же касается H_1 и H_2, то это некоторые неотрицательные элементарные функции (см. [3], [4]) равные нулю при $\alpha=\beta$, малые при малом $\beta-\alpha$, причем функция H_1 зависит от $|\psi-\varphi|$, возрастает при убывании $\sin|\psi-\varphi|$, вообще, может стремиться к ∞ при $\psi-\varphi\to 0$, $|\psi-\varphi|\to\pi$. При некоторых дополнительных условиях, которые мы будем в дальнейшем предполагать выполненными (например, если существует такое $\delta>0$, что та часть последовательности $\{\lambda_n\}$, которая принадлежит углам $\gamma-\delta\leqslant\arg z\leqslant\gamma$, $-\gamma\leqslant\arg z\leqslant-\gamma+\delta$ имеет угловую плотность), функция $H_1[\alpha,\beta,\psi-\varphi]$ равномерно ограничена для всех ψ, $\gamma<|\psi|<\pi-\gamma$.

В том частном случае, когда все $\lambda_n>0$ оценки (1.1) принимают, для $0<\psi<\frac{\pi}{2}$, вид

$$\pi\alpha\sin\psi-\varepsilon\leqslant\frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r}\leqslant\pi\beta\sin\psi+\varepsilon, \tag{1.2}$$

если $\frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$ и

$$\pi\alpha\sin\psi-\sqrt{2}H_1\sin\left(\frac{\pi}{4}-\psi\right)-\varepsilon\leqslant\frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r}\leqslant$$

$$\leqslant\pi\beta\sin\psi+\sqrt{2}H_2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\psi\right)+\varepsilon, \tag{1.3}$$

если $0<\psi<\frac{\pi}{4}$, (α и β — нижняя и верхняя плотности последовательности $\{\lambda_n\}$).

Будем в дальнейшем для простоты рассматривать только тот случай, когда последовательность $\{\lambda_n\}$ симметрична относительно действительной оси. Пусть $\{\lambda_n'\}$ — подпоследовательность последовательности $\{\lambda_n\}$, расположенная в двух симметричных углах $\nu<\arg\lambda_n\leqslant\vartheta$ и $-\vartheta\leqslant\arg\lambda_n<-\nu$, обозначим их соответственно Φ и Φ'.

Пусть $\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n'|}=\alpha$ — нижняя плотность последовательности $\{|\lambda_n'|\}$, а $\beta=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n'|}$ — верхняя плотность.

Оценим модуль канонического произведения $L_{\nu,\vartheta}(z)=\prod\limits_{\lambda_n\in\Phi,\Phi'}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$.

Пусть $h_{\nu,\vartheta}(\psi)$ и $\underline{h}_{\nu,\vartheta}(z)$, $\left(\gamma<\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ — индикатриса и нижняя индикатриса функции $L_{\nu,\vartheta}(z)$. Учитывая тот факт, что величина $\left|1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right|$ возрастает и убывает (при постоянных r и $|\lambda_n|$) одновременно с $\sin|\psi-\varphi|$ ($z=re^{i\psi}$, $\lambda_n=|\lambda_n|e^{i\varphi}$) заменим в случае, когда $\gamma>\frac{\pi}{4}$ последовательность $\{\lambda_n'\}$ последовательностью $\{\lambda_n''\}$ расположенной на двух лучах, лежащих в углах $\nu<\arg z\leqslant\vartheta$, $-\vartheta\leqslant\arg z<-\nu$. Обозначим через $\bar h^*_{\nu,\vartheta}(\gamma)$, $\bar h^*_{\nu,\vartheta}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\underline{h}^*_{\nu,\vartheta}(\gamma)$, $\underline{h}^*_{\nu,\vartheta}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ оценки для $h_{\nu,\vartheta}(\gamma)$, $h^*_{\nu,\vartheta}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\underline{h}_{\nu,\vartheta}(\gamma)$ и $\underline{h}_{\nu,\vartheta}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, полученные с помощью последовательности $\{\lambda_n''\}$ и оценок типа (1.2), (1.3). С помощью элементарных выкладок можно показать, что всегда $\bar h^*_{\nu,\vartheta}(\gamma)-\bar h^*_{\nu,\vartheta}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\gamma\geqslant0$, а

$$\underline{h}^*_{\nu,\vartheta}(\gamma)-\underline{h}^*_{\nu,\vartheta}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\gamma\leqslant0.$$

Пользуясь свойством тригонометрической выпуклости индикатрисы, получим

$$h_{\nu,\vartheta}(\psi)\leqslant\frac{\bar h^*_{\nu,\vartheta}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(\psi-\gamma)+\bar h^*_{\nu,\vartheta}(\gamma)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}=$$

$$=\pi\left[C^{(2)}_{\nu,\vartheta}\sin\psi+D^{(2)}_{\nu,\vartheta}\cos\psi\right], \tag{1.4}$$

причем

$$C^{(2)}_{\nu,\vartheta}>0,\quad D^{(2)}_{\nu,\vartheta}=\frac{1}{\cos\gamma}\left[\bar h^*_{\nu,\vartheta}(\gamma)-\bar h^*_{\nu,\vartheta}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\gamma\right]\geqslant0.$$

Аналогично,

$$\underline{h}_{\nu,\vartheta}(\psi) \geqslant \frac{\underline{h}^*_{\nu,\vartheta}(\gamma)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)+\underline{h}^*_{\nu,\vartheta}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(\psi-\gamma)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}=$$

$$=\pi\left[C^{(1)}_{\nu,\vartheta}\sin\psi - D^{(1)}_{\nu,\vartheta}\cos\psi\right], \tag{1.5}$$

где

$$C^{(1)}_{\nu,\vartheta}>0, \quad D^{(1)}_{\nu,\vartheta}=\frac{1}{\cos\gamma}\left[\underline{h}^*_{\nu,\vartheta}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\gamma - h^*_{\nu,\vartheta}(\gamma)\right]\geqslant 0.$$

Разобьем угол $0<\arg z\leqslant\gamma$ $\left(\text{напоминаем, что по предположению } \gamma\geqslant\frac{\pi}{4}\right)$ произвольным образом на углы $\varphi_{i-1}<\arg z\leqslant\varphi_i$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ \varphi_n=\gamma)$. С помощью оценок (1.2), (1.4), (1.5) получим

$$\pi(C_1\sin\psi - D_1\cos\psi)-\varepsilon<\frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r}<\pi(C_2\sin\psi + D_2\cos\psi)+\varepsilon, \tag{1.6}$$

где $\varepsilon>0$ сколь угодно мало, r — достаточно велико.

Здесь

$$C_2=\inf\sum_{i=1}^{n}C^{(2)}_{\varphi_{i-1},\varphi_i}+\pi\beta_0>0, \quad D_2=\inf\sum_{i=1}^{n}D^{(2)}_{\varphi_{i-1},\varphi_i}\geqslant 0,$$

$$C_1=\sup\sum_{i=1}^{n}C^{(1)}_{\varphi_{i-1},\bar{\varphi}_i}+\pi\alpha_0>0, \quad D_1=\sup\sum_{i=1}^{n}D^{(1)}_{\varphi_{i-1},\varphi_i}\geqslant 0,$$

α_0 и β_0 — нижняя и верхняя плотности той подпоследовательности $\{\lambda_n\}$, для членов которой $\arg\lambda_n=0$, а верхняя и нижняя грани берутся по всем разбиениям указанного вида.

Из равенства (1.1) и свойств функций H_1 и H_2 следует, что $C_1=C_2$, $D_1=D_2=0$ при $\alpha(\sigma)\equiv\beta(\sigma)$.

В силу симметрии последовательности $\{\lambda_n\}$ и четности функции $L(z)$ получим:

1) если $\gamma<|\psi|\leqslant\frac{\pi}{2}$, то

$$\pi(C_1|\sin\psi|-D_1\cos\psi)-\varepsilon<\frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r}<\pi(C_2|\sin\psi|+D_2\cos\psi)+\varepsilon, \tag{1.7}$$

2) для $\frac{\pi}{2}\leqslant|\psi|<\pi-\gamma$

$$\pi(C_1|\sin\psi|+D_1\cos\psi)-\varepsilon<\frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r}<\pi(C_2|\sin\psi|-D_2\cos\psi)+\varepsilon. \tag{1.8}$$

§ **2.** Рассмотрим функции

$$I_\psi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_\psi}\frac{e^{-tz}}{L(t)}\,dt, \qquad I_{-\psi}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{-\psi}}\frac{e^{-tz}}{L(t)}\,dt,$$

где l_ψ — луч, $\arg z=\psi$, $l_{-\psi}$ — луч $\arg z=-\psi$ и $\gamma<\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$. Как бы не было мало $\varepsilon>0$, при достаточно большом r имеем $\ln|L(re^{i\psi})|>\{\pi(C_1|\sin\psi|-D_1\cos\psi)-\varepsilon\}\cdot r$, для $\gamma<|\psi|\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\gamma>\frac{\pi}{4}$. Отсюда на l_ψ $(t=re^{i\psi})$

$$\left|\frac{e^{-zt}}{L(t)}\right|<\exp\left\{-r\left[(x\cos\psi-y\cdot\sin\psi)+\pi C_1|\sin\psi|-\pi D_1\cos\psi-\varepsilon\right]\right\},$$

($z=x+iy$) и, следовательно, $I_\psi(z)$ сходится и определяет функцию голоморфную в полуплоскости

$$(x-\pi D_1)\cos\psi-(y-\pi C_1)\sin\psi>0.$$

Аналогично можно показать, что $I_\psi(z)$ является функцией голоморфной в полуплоскости

$$(x-\pi D_1)\cos\psi-(y+\pi C_1)\,.\,\sin\psi>0.$$

Далее, повторяя рассуждения, приведенные в [1], [5], получим, что функция $I_\psi(z)(\gamma<\psi<\pi-\gamma)$ голоморфна во внешности области P_1 изображенной на рис. 1, а функция $I_\psi(z)$ голоморфна во внешности области P_2 симметричной с областью P_1 относительно действительной оси.

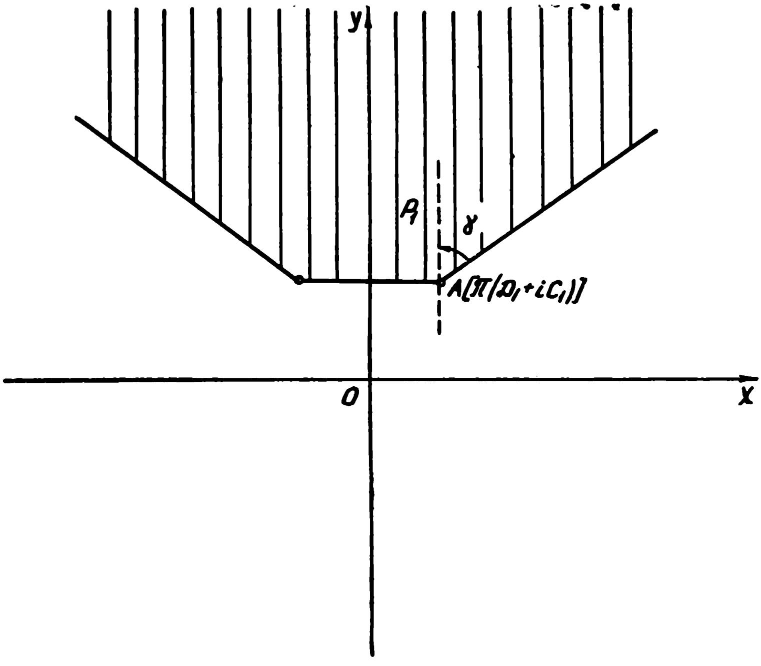

Рис. 1

Рассмотрим теперь функцию $g_R(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{e^{-zt}}{L(t)}\,dt,$

где замкнутый контур C_R состоит из участков лучей l_ψ и $l_{-\psi}$ и дуги окружности $|z|=R$, а R подбирается так, что на этой дуге имеет место для $|L(z)|$ соответствующая оценка снизу [1]. Применив к этому интегралу теорему о вычетах, переходим к пределу при $R\to\infty$ и получаем

$$I_{-\psi}(z)-I_\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)}\,, \tag{2.1}$$

причем сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)}$ голоморфна во внешности областей P_1 и P_2.

Область сходимости ряда (2.1) не пустая, если

$$\delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| < \infty \tag{2.2}$$

(δ – индекс конденсации последовательности $\{\lambda_n\}$), если же $\delta = \infty$, то вместо суммы ряда нужно рассматривать предел последовательности соответствующих частных сумм.

Рассмотрим функцию $\varphi(z)$ экспоненциального типа в угле $|\arg z| < \beta$, $\gamma < \beta < \frac{\pi}{2}$, имеющую в углах $\gamma < |\arg z| < \beta$ индикатрису, которая не превышает функции

$$h(\psi) = k\pi\, C_2 (|\sin\psi| + \cos\psi), \quad C_2 > 0,$$

(k – некоторое действительное число) и удовлетворяющую условиям $\varphi(\lambda_n) = a_n L'(\lambda_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть сначала $k > 0$. Тогда индикаторная (а следовательно, и сопряженная) диаграмма функции $\varphi(z)$ будет содержаться в области I (рис. 2), являющейся общей частью полуплоскостей $(z = x + iy)$:

$$x \cdot \cos\beta + y \cdot \sin\beta - k\pi\, C_2 (\sin\beta + \cos\beta) < 0, \quad x\cos\beta - y \cdot \sin\beta - $$
$$- k\pi\, C_2 (\sin\beta + \cos\beta) < 0,$$
$$x\cos\gamma + y \cdot \sin\gamma - k\pi\, C_2 (\sin\gamma + \cos\gamma) < 0, \quad x\cos\gamma - y \cdot \sin\gamma - $$
$$- k\pi\, C_2 (\sin\gamma + \cos\gamma) < 0.$$

Точка M пересечения границ первых двух из этих полуплоскостей (рис. 2) имеет координаты $x_M = \pi k\, C_2$, $y_M = \pi k\, C_2$, а точка M' – координаты $X_{M'} = k\pi\, C_2$, $y_{M'} = -k\pi\, C_2$.

Область S, точки которой имеют вид $z_1 + z_2$, где $z_1 \in I$, а $z_2 \in P_1 \cup P_2$ имеет, при $0 \leqslant k < \frac{C_1}{C_2}$ вид, указанный на рис. 3.

При этом, как легко подсчитать, точки A, A', B и D имеют координаты:

$$\begin{cases} x_A = \pi(kC_2 + D_1) \\ y_A = \pi(C_1 - kC_2), \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_{A'} = \pi(kC_2 + D_1) \\ y_{A'} = -\pi(C_1 - kC_2), \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_D = \pi(kC_2 + D_1) - \pi \operatorname{tg}\gamma\,(C_1 - kC_2) \\ y_D = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = \pi(kC_2 + D_1) - \pi \operatorname{tg}\beta\,(C_1 - kC_2) \\ y_B = 0. \end{cases}$$

Точка D лежит правее точки B, так как $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\gamma$, длины отрезков AD и $A'D$ равны $\frac{\pi(C_1 - kC_2)}{\cos\gamma}$.

Пользуясь теоремой Крамера—Полиа, можно утверждать, что $f(z)$ являющаяся суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_n)\, e^{-\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n z}$, голоморфна внутри области, дополнительной к S.

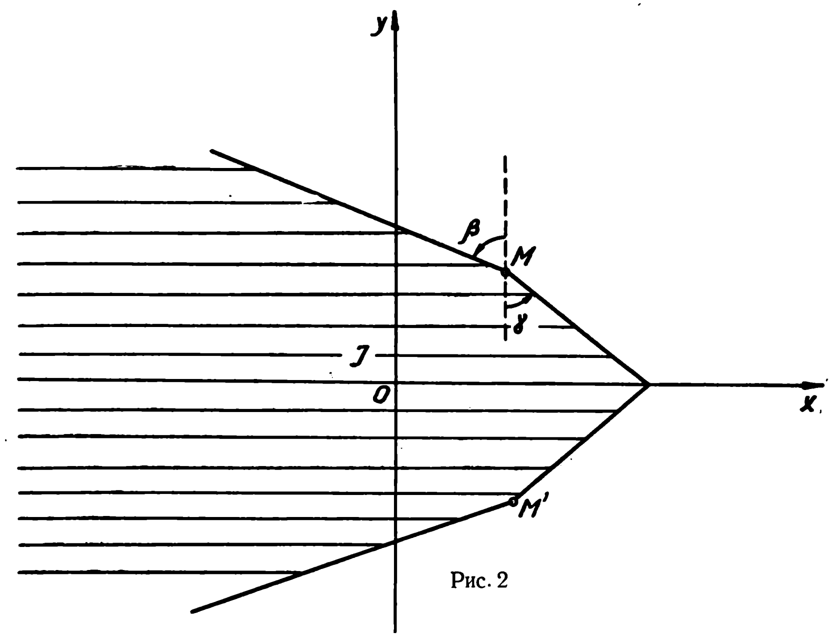

Рис. 2

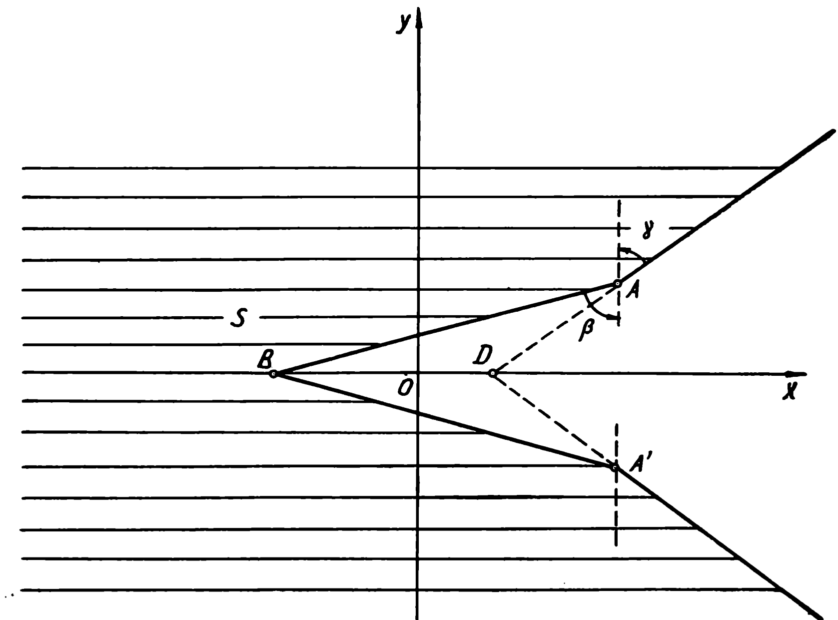

Рис. 3

Если $k<0$, то сопряженная диаграмма функции $\varphi(z)$ лежит в угле

$$\frac{\pi}{2}+\beta<\arg(z-z_0)<\frac{3}{2}\pi-\beta, \quad \text{где} \quad z_0=k\pi C_2(1+\operatorname{tg}\beta).$$

Применив опять теорему Крамера—Полиа, мы придем к выводу, что функция $f(z)$ голоморфна в области, дополнительной к S, изображенной на рис. 4. Точки A, A', B и D имеют координаты:

$$\begin{cases} x_A=\pi[D_1+kC_2(1+\operatorname{tg}\beta)] \\ y_A=\pi C_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{A'}=\pi[D_1+kC_2(1+\operatorname{tg}\beta)] \\ y_{A'}=-\pi C_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D=\pi[D_1+kC_2)1+\operatorname{tg}\beta)-C_1\operatorname{tg}\gamma] \\ y_D=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B=\pi[D_1+kC_2(1+\operatorname{tg}\beta)-C_1\operatorname{tg}\beta] \\ y_B=0. \end{cases}$$

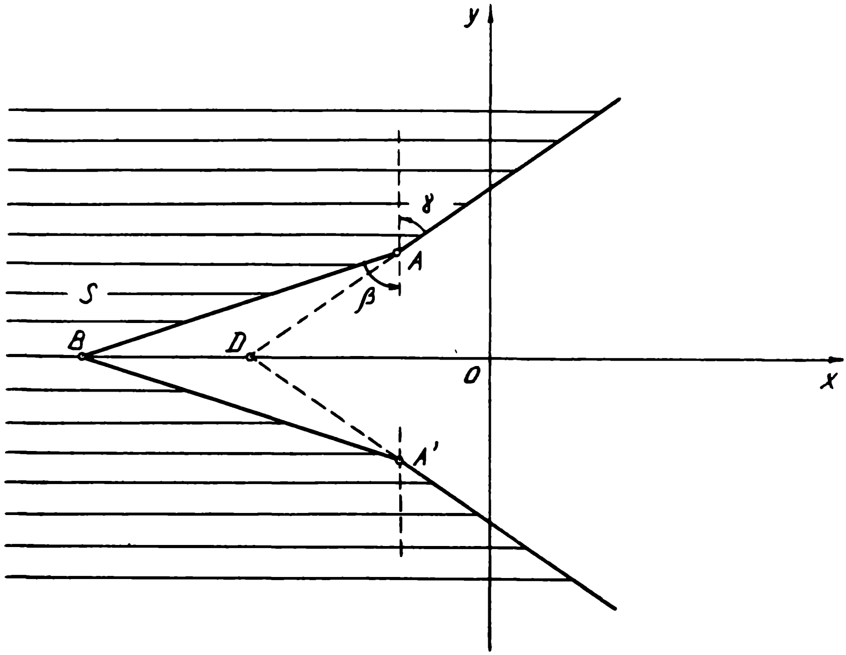

Рис. 4

Итак, нами доказана теорема.

Теорема 1. *Если существует функция $\varphi(z)$ экспоненциального типа в угле $|\arg z|<\beta$, где $\beta>\gamma$, причем $\varphi(\lambda_n)=a_n L'(\lambda_n)$, $(n=1, 2, \ldots)$, а индикатриса $h(\psi)$ функции $\varphi(z)$ удовлетворяет условию*

$$h(\psi)\leqslant k\pi C_2(|\sin\psi|+\cos\psi),$$

то

1) *при* $0 \leqslant k \frac{C_1}{C_2}$ *функция* $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ *голоморфна в угле* $|\arg(z-z_0)| <$ $< \frac{\pi}{2}-\gamma$,

где $z_0=\pi(D_1+kC_2)-\pi \operatorname{tg}\gamma(C_1-kC_2)$

и на примыкающих к вершине отрезках сторон этого угла длины $(C_1-kC_2)\times$ $\times \pi \sec\gamma$;

2) *при* $k<0$ *функция* $f(z)$ *голоморфна в угле*

$$|\arg(z-z^*)|<\frac{\pi}{2}-\gamma, \quad z^*=\pi(D_1+kC_2)-\pi C_1 \operatorname{tg}\gamma+k\pi C_2 \operatorname{tg}\beta<z_0.$$

Пусть теперь $k<\frac{C_1}{C_2}$, функция $f(z)$ голоморфна в угле $|\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\gamma$, где $z_0=\pi(D_1+kC_2)-\pi \operatorname{tg}\gamma(c_1-kC_2)$, на примыкающих к вершине отрезках сторон этого угла длины $\pi(C_1-kC_2)$. $\sec\gamma$ каждый и в области Y, ограниченной этими отрезками и проведенными через концы этих отрезков прямыми, наклоненными к действительной оси под углами $\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\beta-\frac{\pi}{2}$. Повторяя рассуждения, которыми пользовался Г. Л. Лунц в статье [1], приходим к заключению, что существует функция, для которой $\varphi(\lambda_n)=a_n L'(\lambda_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ и которая имеет вид $\varphi(z)=-\Phi(z)\cdot L(z)$, причем $\Phi(z)$ экспоненциального типа в угле $|\arg z|<\beta$ и

$$|\Phi(re^{i\psi})|<\exp\left\{[\pi(kC_2-C_1)\cdot\sin\psi+(\pi D_1+\pi C_2 k+\varepsilon)\cdot\cos\psi]\,r\right\}.$$

Из (1.7) следует, что

$$|\varphi(re^{i\psi})|<\exp\left\{[k\pi C_2(|\sin\psi|+\cos\psi)+\rho+\varepsilon]\,r,\right\}$$

где

$$\rho=\max\,[\pi(C_2-C_1)\ |\sin\psi|+\pi(D_2+D_1)\cos\psi],$$

($\varepsilon>0$, r — достаточно велико).

Таким образом доказана теорема.

Теорема 2. *Если* $k<\frac{C_1}{C_2}$, *функция* $f(z)$ *голоморфна в угле*

$$|\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\gamma, \quad \text{где} \quad z_0=\pi(D_1+kC_2)-\pi \operatorname{tg}\gamma(C_1-kC_2),$$

на примыкающих к вершине отрезках сторон этого угла длины $\pi(C_1-C_2k)\times$ $\times\sec\gamma$ *каждый, в области* Y, *ограниченной этими отрезками и прямыми, проходящими через концы этих отрезков и наклоненными к действительной оси под углами* $\frac{\pi}{2}-\beta$, $\beta-\frac{\pi}{2}$, *то существует функция* $\varphi(z)$, *экспоненциального типа в угле* $|\arg z|<\beta$, *для которой* $\varphi(\lambda_n)=a_n L'(\lambda_n)$, $(n=1, 2, \ldots)$ *и индикатриса которой* $h(\psi)$ *удовлетворяет неравенству*

$$h(\psi)\leqslant k\pi C_2(|\sin\psi|+\cos\psi)+\rho.$$

§ 3. Пусть $\frac{\pi}{4} \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}$. Всякий угол $|\arg(z-z_0)| < \frac{\pi}{2} - \gamma$, в котором функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ голоморфна и который не находится строго внутри другого угла $|\arg(z-\tilde{z}_0)| < \frac{\pi}{2} - \gamma$, в котором функция $f(z)$ также голоморфна, будем называть углом голоморфности ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}. \tag{3.1}$$

Пусть z^* – вершина угла голоморфности ряда (3.1) и пусть функция $f(z)$ голоморфна на примыкающих к вершине отрезках сторон этого угла длины $l = \pi(C_1 - k_1 C_2) \cdot \sec\gamma$ каждый, а также в области Y, ограниченной этими отрезками и прямыми, проходящими через концы этих отрезков и наклонными к действительной оси под углами, равными $\frac{\pi}{2} - \beta$, $\beta - \frac{\pi}{2}$, $\left(\gamma < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Сделаем замену переменной

$$\zeta = z - z^* + \pi(D_1 + k_1 C_2) - \pi \operatorname{tg}\gamma (C_1 - k_1 C_2),$$

получим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n \zeta} = F(\zeta).$$

Причем, угол

$$|\arg(\zeta - \zeta^*)| < \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad \text{где} \quad \zeta^* = \pi(D_1 + k_1 C_2) - \pi \operatorname{tg}\gamma (C_1 - k_1 C_2),$$

является углом голоморфности $F(\zeta)$ и функция $F(\zeta)$ голоморфна на примыкающих к вершине отрезках сторон угла голоморфности длины $(C_1 - k_1 C_2)\pi \sec\gamma$ каждый, а также в области Y', которая получается с помощью соответствующего сдвига области Y.

На основании теоремы 2 можно утверждать, что существует функция $\varphi(\zeta)$ экспоненциального типа в угле $|\arg\zeta| < \beta$, удовлетворяющая условиям $\varphi(\lambda_n) = A_n L'(\lambda_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и для индикатрисы которой в углах $\gamma < |\psi| < \beta < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство

$$h(\psi) \leqslant k_1 \pi C_2 (|\sin\psi| + \cos\psi) + \rho < \pi C_2 k (|\sin\psi| + \cos\psi),$$

где

$$k = k_1 + \frac{\rho}{\pi C_2} < 0, \quad \text{если} \quad k_1 < -\frac{\rho}{\pi C_2}. \tag{3.2}$$

На основании теоремы 1 мы можем утверждать, что функция $F(\zeta)$ голоморфна в угле $|\arg(\zeta - \zeta_0)| < \frac{\pi}{2} - \gamma$ с вершиной в точке $\zeta_0 = \pi(D_1 - C_1 \operatorname{tg}\gamma) + k\pi C_2(1 + \operatorname{tg}\beta)$.

Точка ζ^* окажется внутренней для этого угла, если $Re\,\zeta^* - Re\,\zeta_0 > 0$. Отсюда легко получим

$$\operatorname{tg}\beta > \frac{k_1 - k}{k} + \frac{k_1}{k}\operatorname{tg}\gamma = \frac{k_1}{k}(1 + \operatorname{tg}\gamma) - 1,$$

или

$$\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\gamma + \frac{\rho(1 + \operatorname{tg}\gamma)}{\pi C_2 |k|}. \tag{3.3}$$

Итак, если условия (3.2) и (3.3) выполнены, то точка ζ^* находится внутри угла, в котором функция $F(\zeta)$ голоморфна, а это противоречит тому, что ζ^* — вершина угла голоморфности. Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 3. *Функция $f(z)$ имеет по крайней мере одну особую точку в замкнутой области $\Theta_{\beta|k|}$, ограниченной примыкающими к вершине угла голоморфности отрезками его сторон длины $l=\pi\left(C_1+C_2|k|+\frac{\rho}{\pi}\right)\sec\gamma$ каждый и проведенными через концы этих отрезков прямыми, наклоненными к действительной оси под углами $\frac{\pi}{2}-\beta$, $\beta-\frac{\pi}{2}$, где β и $|k|$ связаны соотношением*

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma+\frac{\rho(1+\operatorname{tg}\gamma)}{\pi C_2|k|}. \tag{3.4}$$

Пусть $z_0=\pi(D_1+kC_2)+\pi(kC_2-C_1)\operatorname{tg}\gamma$ — вершина некоторого угла H', в котором функция $f(z)$ голоморфна $\left(k<\frac{C_1}{C_2}\right)$. Так как сдвиг влияет только на коэффициенты ряда, то можно считать $z_0=-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, тогда

$$k=\frac{C_1\cdot\operatorname{tg}\gamma}{C_2(1+\operatorname{tg}\gamma)}-\frac{\pi D_1+\varepsilon}{\pi C_2(1+\operatorname{tg}\gamma)}.$$

Предположим, что функция $f(z)$ голоморфна и на сторонах угла H' (угол H' можно получить с помощью сколь угодно малого сдвига угла голоморфности функции $f(z)$). Тогда можно построить область Y', которая образована сторонами угла H' и прямыми, проходящими через концы некоторых отрезков, расположенных на сторонах угла H', под углами $\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\beta-\frac{\pi}{2}$, где $\beta>\gamma$ так что выполнены условия теоремы 2.

Из теоремы 2 следует, что существует такая функция $\varphi(z)$ экспоненциального типа в угле $|\arg z|<\beta$, для которой $\varphi(\lambda_n)=a_n L'(\lambda_n)$ $(n=1,2,\ldots)$, а при $\gamma<|\psi|<\beta$

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|\varphi(re^{i\psi})|}{r}=k\pi C_2(|\sin\psi|+\cos\psi)+\pi(C_2-C_1)|\sin\psi|+$$

$$+\pi(D_1+D_2)\cos\psi=\pi(C_2|\sin\psi|+D_2\cos\psi)-\frac{\pi(D_1+C_1)}{1+\operatorname{tg}\gamma}(|\sin\psi|+$$

$$-\cos\psi\cdot\operatorname{tg}\gamma)-\frac{\varepsilon}{1+\operatorname{tg}\gamma}(|\sin\psi|+\cos\psi).$$

В силу непрерывности индикатрисы можно утверждать, что

$$h(\gamma)\leqslant\pi(C_2\,.\,\sin\gamma+D_2\,.\,\cos\gamma)-\varepsilon\,.\,\cos\gamma,$$

$$h(\gamma)\leqslant\pi(C_2\,.\,\sin\gamma+D_2\,.\,\cos\gamma)-\varepsilon\,.\,\cos\gamma.$$

Оценив индикатрису функции $\varphi(z)$ для $|\psi|\leqslant\gamma$ (используя свойство тригонометрической выпуклости индикатрисы), получим

$$h(\psi)\leqslant\left[\pi(C_2\cdot\operatorname{tg}\gamma+D_2)-\varepsilon\right]\cdot\cos\psi.$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty}a_n l^{-\lambda_n z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}l^{-\lambda_n z}$, то ряд (3.1) будет сходиться в области G, которая служит пересечением полуплоскостей:

$$x\cdot\cos\psi-y\cdot\sin\psi-K(\psi)>0,\quad -\gamma\leqslant\psi\leqslant\gamma,$$

$$K(\psi)=\lim_{\eta\to0}\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{\ln|a_{n_k}|}{|\lambda_{n_k}|},$$

а $\{\lambda_{nk}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{\lambda_n\}$, для которой $\psi-\eta\leqslant\leqslant\arg\lambda_{n_k}\leqslant\psi+\eta$.

Имеем

$$K(\psi)=\lim_{\eta\to0}\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{\ln\left|\dfrac{\varphi(\lambda_{n_k})}{L'(\lambda_{n_k})}\right|}{|\lambda_{n_k}|}\leqslant\lim_{\eta\to0}\left[\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{\ln|\varphi(\lambda_{n_k}|}{|\lambda_{n_k}|}+\right.$$

$$\left.+\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\ \ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_{n_k})}\right|\right]\leqslant\left[\pi(C_2\operatorname{tg}\gamma+D_2)-\varepsilon\right]\cos\psi+\delta^{(\psi)},$$

$$\delta^{(\psi)}=\lim_{\eta\to0}\overline{\lim_{k\to\infty}}\left[\frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\ \ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_{n_k})}\right|\right].$$

Доказана.

Теорема 4. *Ряд* (3.1) *сходится в области, которая является пересечением полуплоскостей*:

$$[x-\pi\,(C_2\operatorname{tg}\gamma+D_2)+\varepsilon]\cos\psi-y\,.\,\sin\psi-\delta^{(\psi)}>0,$$

где $-\gamma\leqslant\psi\leqslant\gamma$.

Заметим, что всегда $\delta^{(\psi)}\leqslant\delta$, где δ — индекс конденсации последовательности $\{\lambda_n\}$.

§ 4. Пусть теперь $\gamma<\frac{\pi}{4}$. Чтобы оценить $L(z)$ разобьем угол σ: $-\gamma\leqslant\arg\lambda_n\leqslant\leqslant\gamma$ на две области σ_1 и σ_2, определенные, соответственно, неравенствами

$$\max\left(-\gamma,\ \gamma-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\arg z\leqslant\gamma,\qquad -\gamma\leqslant\arg z\leqslant\max\left(-\gamma,\ \gamma-\frac{\pi}{4}\right)$$

(если $\gamma\leqslant\frac{\pi}{8}$, то область σ_2 пустая).

Пусть $\gamma+\frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$, тогда $\frac{\pi}{4}\leqslant\psi-\varphi\leqslant\frac{3}{4}\pi$ для всех $-\gamma\leqslant\varphi\leqslant\gamma$. Для $L(z)$ будет справедлива оценка сверху

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r}\leqslant\pi\int\limits_{\varphi\in\sigma,\ l^+}^{-}\beta(d\sigma)\cdot\sin(\psi-\varphi)\leqslant$$

$$\leqslant\pi\left[\ \int\limits_{\varphi\in\sigma,\ l^+}^{-}\beta(d\sigma)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\psi-\int\limits_{\varphi\in\sigma,\ l^+}^{-}\beta(d\sigma)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\psi\right]=$$

$$=\pi\,(C_2'\sin\psi+D_2'\cos\psi),$$

где

$$C_2'=\int\limits_{\varphi\in\sigma,\ l^+}^{-}\beta(d\sigma)\cos\varphi,\quad D_2'=-\int\limits_{\varphi\in\sigma,\ l^+}^{-}\beta(d\sigma)\cdot\sin\varphi\geqslant0,$$

очевидно, что $\int\limits_{\varphi\in\sigma,\, l^+}^{-} \beta(d\sigma)\cdot\sin\varphi \leqslant 0$, так как соответствующая интегральная сумма, составленная для разбиений симметричных относительно действительной оси неположительна.

Из свойства тригонометрической выпуклости индикатрисы, получим при $\gamma\leqslant\psi\leqslant\gamma+\frac{\pi}{4}$

$$\bar{h}(\psi)\leqslant\pi\,[C_2^*\sin\psi+D_2^*\cos\psi],$$

где

$$C_2^*=\int\limits_{\varphi\in\sigma,\, l^+}^{-}\beta(d\sigma)\cos\varphi-\int\limits_{\varphi\in\sigma_1,\, l^+}^{+}\frac{H_2}{\pi}\sqrt{2}\cdot\cos\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)[\cos(\gamma-\varphi)-\sin(\gamma-\varphi)].$$

$$D_2^*=-\int\limits_{\varphi\in\sigma,\, l^+}^{-}\beta(d\sigma)\cdot\sin\varphi+\int\limits_{\varphi\in\sigma_1,\, l^+}^{+}\frac{H_2}{\pi}\sqrt{2}\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)[\cos(\gamma-\varphi)-\sin(\gamma-\varphi)].$$

Аналогично получаем для $\frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r}$ оценку снизу. Если $\gamma+\frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$, то

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r}\geqslant\pi\int\limits_{\varphi\in\sigma,\, l^-}^{+}\alpha(d\sigma)\sin(\psi-\varphi)=\pi(C_1'\cdot\sin\psi-D_1'\cos\psi),$$

где

$$C_1'=\int\limits_{\varphi\in\sigma,\, l^-}^{+}\alpha(d\sigma)\cdot\cos\varphi,\quad D_1'=\int\limits_{\varphi\in\sigma,\, l^-}^{+}\alpha(d\sigma)\cdot\sin\varphi\geqslant 0.$$

Пользуясь свойством тригонометрической выпуклости для индикатрисы функции $\frac{1}{L(z)}$, получим при $\gamma<\psi\leqslant\gamma+\frac{\pi}{4}$

$$\underline{h}(\psi)\geqslant\pi\,(C_1^*\sin\psi-D_1^*\cos\psi),$$

где

$$C_1^*=\int\limits_{\varphi\in\sigma,\, l^-}^{+}\alpha(d\sigma)\cdot\cos\varphi+\int\limits_{\varphi\in\sigma_1,\, l^-}^{-}\frac{H_1}{\pi}\sqrt{2}\cos\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)[\cos(\gamma-\varphi)-\sin(\gamma-\varphi)]>0,$$

$$D_1^*=\int\limits_{\varphi\in\sigma,\, l^-}^{+}\alpha(d\sigma)\cdot\sin\varphi-\int\limits_{\varphi\in\sigma_1,\, l^-}^{-}\frac{H_1}{\pi}\sqrt{2}\cdot\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)[\sin(\gamma-\varphi)-\cos(\gamma-\varphi)]>0.$$

Или

$$\pi(C_1\sin\psi-D_1\cos\psi)-\varepsilon<\frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r}<\pi(C_2\cdot\sin\psi+D_2\cos\psi)+\varepsilon,$$

где

$$C_1=C_1',\quad D_1=D_1',\quad C_2=C_2',\quad D_2=D_2',$$

если $\gamma+\frac{\pi}{4}<\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $C_1=C_1^*$, $D_1=D_1^*$, $C_2=C_2^*$, $D_2=D_2^*$, если $\gamma<\psi\leqslant\gamma+\frac{\pi}{4}$.

Если $\gamma < |\psi| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то

$$\pi(C_1 |\sin\psi| - D_1 \cos\psi) - \varepsilon < \frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r} < \pi(C_2 |\sin\psi| + D_2 \cos\psi) + \varepsilon;$$

а если $\frac{\pi}{2} < |\psi| < \pi - \gamma$, то

$$\pi(C_1 |\sin\psi| + D_1 \cos\psi) - \varepsilon < \frac{\ln|L(re^{i\psi})|}{r} < \pi(C_2 |\sin\psi| - D_2 \cos\psi) + \varepsilon.$$

Пользуясь полученными оценками и повторяя рассуждения из § 2, мы докажем, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)}$ голоморфна:

1) в области Q_1, указанной на рис. 5;

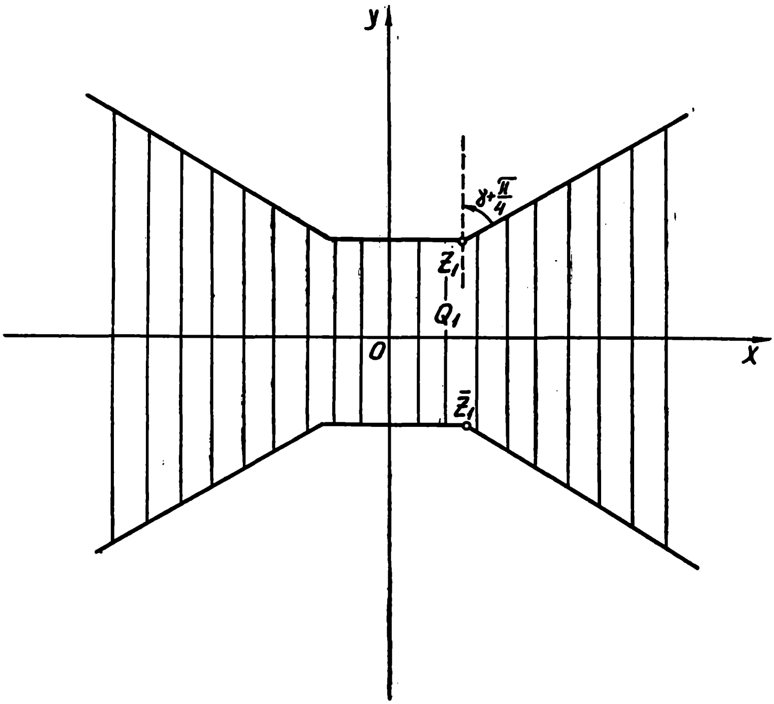

Рис.5

2) в области Q_2, указанной на рис. 6, а следовательно, и в объединении Q этих областей (рис. 7).

Повторяя, далее, рассуждения и выкладки, приведенные в §§ 2, 3, мы убедимся в том, что если выбирать β таким, что $\gamma < \beta \leqslant \frac{\pi}{4} + \gamma$, то теоремы 1, 2,

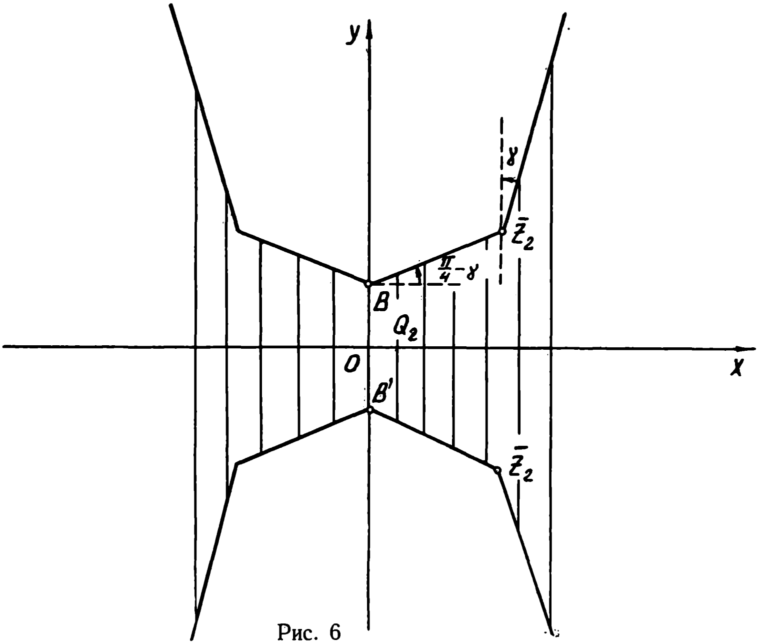
y
γ
$\bar{z}_2$
$\frac{\pi}{4}-\gamma$
B
Q_2
O
x
B'
$\bar{z}_2$

Рис. 6

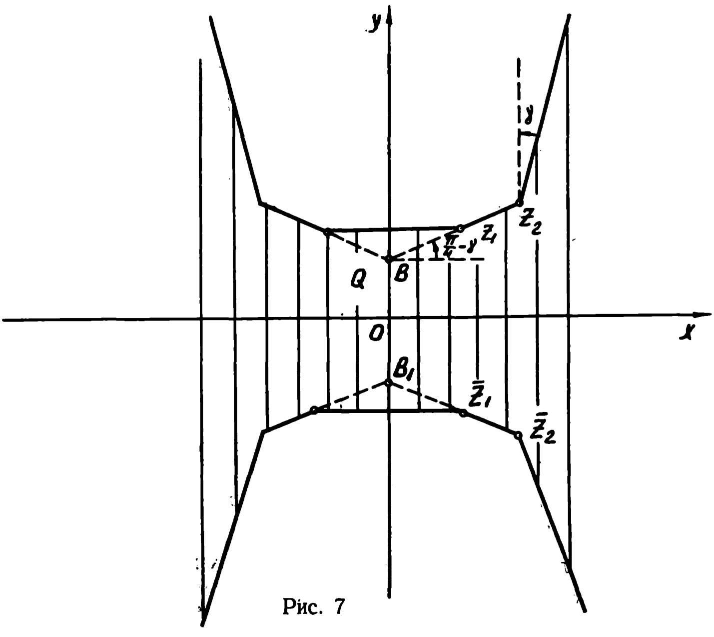
y
γ
$\bar{z}_2$
z_1
$\frac{\pi}{4}-\gamma$
Q
B
O
x
B_1
$\bar{z}_1$
$\bar{z}_2$

Рис. 7

3, 4 остаются справедливыми и в рассматриваемом случае, если только в их формулировках заменить C_1 на C_1^*, D_1 на D_1^*, C_2 на C_2^*, D_2 на D_2^*.

Москва — Поступило в редакцию 12. II. 1968

Литература

1. Л. Г. Лунц, О рядах Дирихле с комплексными показателями, Математический сборник 67 (109), № 1, (1965), 89–134.
2. Г. Л. Лунц, Оценка роста канонического произведения, Международный Конгресс математиков, Москва (1966), Тезисы кратких научных сообщений, секция 4, стр. 64.
3. А. А. Гольдберг, Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, Математический сборник, IV, 66 (108), 411–457.
4. Г. Л. Лунц, Об оценках роста канонического произведения, Известия АН Армянской ССР, (серия математическая), (1968).
5. V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, 33—50.

DIRICHLE EILUČIŲ SŪ KOMPLEKSINIAIS RODIKLIAIS PAVIENIAI TAŠKAI IR KONVERGAVIMAS

V. TURPANOVA

(Reziumė)

Sakykime, Dirichle eilutės

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, l^{-\lambda_n z}$$

rodikliai telpa kampe $|\arg z|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, ir sekos $\{\lambda_n\}$ viršutinis kampinis tankis yra baigtinis. Nurodomos sritys, kuriose funkcija $f(z)$ turi bent po vieną pavienį tašką. Nagrinėjami taip pat funkcijos $f(z)$ holomorfiškumo kampai ir aprašoma tų kampų viršūnių padėtis konvergavimo srities atžvilgiu.

SUR LES POINTS SINGULIERS ET LA CONVERGENCE DES SÉRIES DE DIRICHLET AVEC LES EXPOSANTS COMPLEXES

V. TOURPANOVA

(Résumé)

On suppose que les exposants de la série

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, l^{-\lambda_n z}$$

se trouvent dans un angle $|\arg z|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, et que la densité angulaire supérieure de la suite $\{\lambda_n\}$ est finie. On indique des domaines chaque de lesquelles contient certainement un point singulier de $f(z)$. Une liaison entre le domaine de convergence de la série et les sommets des angles où $f(z)$ est holomorphe est aussi établie.