IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1969

УДК–519.21

ОБ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАМЕНЕ МЕРЫ И МАРКОВСКОМ СВОЙСТВЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Б. ГРИГЕЛИОНИС

Введение

В работе [1], обозначениями и результатами которой далее мы будем пользоваться, исследовался эффективный критерий проверки марковского свойства m-мерного случайного процесса $x(t)$, $t\in[t_0, T]$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. В частности, там требовалось, чтобы функция $\Pi(t, x, \Gamma)$, определяемая скачкообразной частью процесса, не зависела от x. В этом случае указывались условия, когда рассматриваемый процесс является решением определенного уравнения К. Ито.

Основной целью настоящей статьи является распространение этого критерия для достаточно широкого класса случаев, когда $\Pi(t, x, \Gamma)$ зависит от x. Кратко поясним идею наших рассуждений. При помощи определенным образом построенного мультипликативного функционала от процесса $x(t)$ производя абсолютно непрерывную замену меры $\mathbf{P}$ на $\tilde{\mathbf{P}}$, доказываем, что для процесса $x(t)$ относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$ соответствующая функция $\tilde{\Pi}(t, x, \Gamma)$ не зависит от x и тем самым, применяя результаты работы [1], мы можем проверить в этом случае марковское свойство. Далее доказывается, что обратное преобразование $\tilde{\mathbf{P}}$ на $\mathbf{P}$ сохраняет это свойство процесса $x(t)$.

В первом параграфе строится мультипликативный функционал и исследуются его свойства как плотности вероятностной меры. В случае, когда $x(t)$ – непрерывное решение стохастического уравнения К. Ито, аналогичные исследования проводились в работах [2–4] (см. также [5]). Далее рассматривается абсолютно непрерывная замена меры при помощи таких плотностей и некоторые свойства процесса $x(t)$ относительно таким образом полученной меры. Изменение характеристик марковских процессов при абсолютно непрерывной замене меры изучалось в ряде работ (см., напр., [2–7]; в [6] содержатся ссылки на более ранние результаты других авторов).

В третьем параграфе исследуется упомянутое обобщение критерия марковости, полученного в [1]. Наконец, в последнем параграфе результаты об абсолютно непрерывной замене меры применяются для установления одного критерия абсолютной непрерывности мер, соответствующих общим марковским процессам. Наиболее общие результаты абсолютной непрерывности мер, сооответствующие марковским процессам, являющихся решениями стохастических уравнений К. Ито, найдены в [8] (см. также [9]). Эффективные критерии абсолютной непрерывности мер, соответствующих диффузионным или скачкообразным марковским процессам, заданным инфинитезимальными характеристиками функций переходных вероятностей, получены в работах [6–7].

§ 1. О некоторых плотностях вероятностных мер

Пусть $x(t)$, $t\in[t_0, T]$ – случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, почти все траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева, принимающий значения в m-мерном эвклидовом пространстве $(R_m, \mathscr{B}_m)$, а $\mathscr{F}_t=\tilde{\mathscr{F}}_{t+0}$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, где $\tilde{\mathscr{F}}_t$ – σ-алгебры, порожденные случайными величинами $x(u)$, $t_0\leqslant u\leqslant t$ и пополненные по мере $\mathbf{P}$. Далее мы всюду будем считать выполненными следующие предположения.

A_1. *Существует функция $\Pi(t, x, \Gamma)$, $\mathscr{B}[t_0, T]\times\mathscr{B}_m$ – измеримая при фиксированном $\Gamma\in\mathscr{B}_m$, являющаяся мерой на $\mathscr{B}_m$ при любых t и x, такая, что для всех $\varepsilon>0$ и $\Gamma\in\mathscr{B}_m$ при любых t и x, такая что для всех* $\varepsilon>0$ и $\Gamma\in\mathscr{B}_m\cap U_\varepsilon$*)

$$\mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{T}\Pi\left(u, x(u), U_\varepsilon\right)du\right)<\infty,$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbf{M}\left[\int_{t_0}^{T}\int_{|y|\leqslant\varepsilon}|y|^2\,\Pi\left(u, x(u), dy\right)du\right]=0,$$

а

$$q(t, \Gamma)=p(t, \Gamma)-\int_{t_0}^{t}\Pi\left(u, x(u), \Gamma\right)du\in\mathfrak{M}^{(1)},$$

причем с вероятностью 1 (*п. в.*)

$$\langle q(t, \Gamma)\rangle=\int_{t_0}^{t}\Pi\left(u, x(u), \Gamma\right)du$$

$$p\left(t,\Gamma\right)=\sum_{t_0\leqslant u\leqslant t}\chi_\Gamma\left(x(u)-x(u-0)\right);$$

(другие обозначения см. в [1]).

Известно [1], что тогда случайный процесс $x_0(t)=x(t)-P_g(t)-Q_f(t)$, где P_g – интеграл по мере p от функции $g(y)=\left(g_1(y), \ldots, g_m(y)\right)$, $g_i(y)=y_i$ при $|y|>1$ $u=0$ при $|y|\leqslant 1$, а Q_f – интеграл по мере q от функции $f(y)=y-g(y)$ (подробнее см. в [1]), с вероятностью 1 непрерывен.

A_2. *Существует функция $a(t, x)=\left(a_1(t, x), \ldots, a_m(t, x)\right)$ и симметрическая неотрицательно определенная матрица $A(t, x)=\|a_{ij}(t, x)\|_1^m$, такие, что функции $a_i(t, x)$, $a_{ij}(t, x)$, $i, j=1, \ldots, m$, $\mathscr{B}[t_0, T]\times\mathscr{B}_m$ – измеримы и*

$$\tilde{x}(t)=x_0(t)-\int_{t_0}^{t}a\left(u, x(u)\right)du\in\mathfrak{M}^{(m)},$$

*) $U_\varepsilon=\{x:|x|\geqslant\varepsilon\}$.

причем

$$\langle \tilde{x}_i, \tilde{x}_j \rangle_t = \int_{t_0}^{t} a_{ij}\Big(u, x(u)\Big) du \text{ п. в.}$$

Пусть $\varphi(t, x, y) - \mathscr{B}[t_0, T] \times \mathscr{B}_m \times \mathscr{B}_m$ — измеримая функция. Интегралы $P_\varphi(t)$ и $Q_\varphi(t)$ далее всюду будут пониматься как соответствующие интегралы от функции $\varphi(t, y) = \varphi(t, x(t-0), y)$, определение которых дано в [1] (ср. также с [5], [10]).

Рассмотрим функционал

$$\alpha_t = \exp\Bigg\{ x_c(t) - \frac{1}{2}\langle x_c \rangle_t + Q_\varphi(t) - \int_{t_0}^{t} \int_{R_m} \Big(e^{\varphi(u, y)} -$$

$$- 1 - \varphi(u, y)\Big) \Pi\Big(u, x(u), dy\Big) du \Bigg\}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

где

$$c(t, x) = \Big(c_1(t, x), \ \ldots, \ c_m(t, x)\Big), \quad c_i(t, x) - \mathscr{B}(t_0, T) \times \mathscr{B}_m -$$

измеримые функции,

$$x_c(t) = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} c_i\Big(u, x(u)\Big) d\tilde{x}_i(u)$$

и

$$\langle x_c \rangle_t = \int_{t_0}^{t} \Big(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\Big(u, x(u)\Big) c_i\Big(u, x(u)\Big) c_j\Big(u, x(u)\Big) du =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Bigg(c\Big(u, x(u)\Big) A\Big(u, x(u)\Big), \ c\Big(u, x(u)\Big)\Bigg) du.$$

Предположим, что функции $c(t, x)$ и $\varphi(t, x, y)$ удовлетворяют следующим условиям:

B_1. $\Big(c(t, x) A(t, x), \ c(t, x)\Big) \leqslant K_1$;

B_2. $|\varphi(t, x, y)| \leqslant K_2$ и $\int_{R_m} \varphi^2(t, x, y) \Pi(t, x, dy) \leqslant K_3$,

где K_i, $i = 1, 2, 3$ — некоторые константы.

Очевидно, что при этих условиях все интегралы в (1) имеют смысл. Обозначим $\alpha_t^s = \alpha_t \alpha_s^{-1}$, $t_0 \leqslant s < t \leqslant T$.

Теорема 1. *При условиях* B_1 и B_2 *случайный процесс* $(\alpha_t, \mathscr{F}_t, P)$ *является мартингалом. Кроме того,* $\mathbf{M}\alpha_t^s = 1$ и $\mathbf{M}(\alpha_t^s)^\gamma \leqslant \exp\{(t-s)K(\gamma)\}$ *для всех* $t_0 \leqslant s < t \leqslant T$; γ — *любое действительное число,*

$$K(\gamma) = \frac{1}{2}|\gamma^2 - \gamma| K_1 + \frac{K_3}{2}(|\gamma| e^{K_2} + \gamma^2) e^{|\gamma| K_2}.$$

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Если выполнены условия* B_1 и B_2, *то* $\mathbf{M}\alpha_t^s \leqslant 1$ *и* $\mathbf{M}(\alpha_t^s | \mathscr{F}_s) \leqslant 1$ *п. в. для всех* $t_0 \leqslant s < t \leqslant T$.

Доказательство. Применим прием, использованный в [4] гл. 7 § 2. Пусть

$$g_n(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad x\leqslant n, \\ x+\frac{1}{2}\,(x-n)^3(x-n-2) & \text{при} \quad n<x<n+1, \\ n+\frac{1}{2} & \text{при} \quad x\geqslant n+1. \end{cases}$$

Очевидно, что функции $g_n(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы,

$$0\leqslant g_n'(x)\leqslant \chi_{(-\infty,\,n+1]}(x),\quad -\frac{3}{2}\,\chi_{[n,\,n+1)}(x)\leqslant g_n''(x)\leqslant 0$$

и при каждом $x\geqslant 0$ $0\leqslant g_n(x)\uparrow x$ при $n\to\infty$.

По обобщенной формуле К. Ито (см. [1]) имеем:

$$g_n(\alpha_t^s)-1=\int_s^t g_n'(\alpha_u^s)\,\alpha_u^s\,dx_c(u)+\int_s^t\int_{R_m}\Big(g_n(\alpha_u^s\,e^{\varphi(u,\,y)})-$$

$$-g_n(\alpha_u^s)\Big)\,q(du,\,dy)+\int_s^t\int_{R_m}\Big[g_n(\alpha_u^s\,e^{\varphi(u,\,y)})-g_n(\alpha_u^s)-$$

$$-g_n'(\alpha_u^s)\,\alpha_u^s\,(e^{\varphi(u,\,y)}-1)\Big]\,\Pi\Big(u,\,x(u),\,dy\Big)\,du+$$

$$+\frac{1}{2}\int_s^t g_n''(\alpha_u^s)\,(\alpha_u^s)^2\,d\langle x_c\rangle_u. \tag{2}$$

Поскольку

$$g_n''(\alpha_u^s)\leqslant 0 \quad \text{и} \quad g_n(\alpha_u^s\,e^{\varphi(u,\,y)})-g_n(\alpha_u^s)-g_n'(\alpha_u^s)\,(e^{\varphi(u,\,y)}-1)=$$

$$=\int_{\alpha_u^s}^{\alpha_u^s e^{\varphi(u,\,y)}}(\alpha_u^s\,e^{\varphi(u,\,y)}-z)\,g_n''(z)\,dz\leqslant 0, \tag{3}$$

то из (2) следует, что

$$g_n(\alpha_t^s)-1\leqslant\int_s^t g_n'(\alpha_u^s)\,\alpha_u^s\,dx_c(u)+$$

$$+\int_s^t\int_{R_m}\Big(g_n(\alpha_u^s\,e^{\varphi(u,\,y)})-g_n(\alpha_u^s)\Big)\,q(du,\,dy). \tag{4}$$

Отсюда

$$\mathbf{M}\,g_n(\alpha_t^s)\leqslant 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{M}\Big(g_n(\alpha_t^s)\,|\,\mathscr{F}_s\Big)\leqslant 1,$$

поскольку в силу B_1 и B_2

$$\int_s^T\Big(g_n'(\alpha_u^s)\alpha_u^s\Big)^2\,d\langle x_c\rangle_u\leqslant(n+1)^2\,K_1(T-s),$$

$$\int_s^T\int_{R_m}\Big(g_n(\alpha_u^s\,e^{\varphi(u,\,y)})-g_n(\alpha_u^s)\Big)^2\,\Pi\Big(u,x(u),dy\Big)\,du\leqslant(n+1)^2\,e^{2K_1}\,K_3(T-s)$$

и условные математические ожидания относительно $\mathcal{F}_s$ стохастических интегралов, стоящих в правой части неравенства (4), равны нулю. Остается перейти к пределу при $n\to\infty$.

Лемма 2. *При условиях теоремы* 1

$$\mathbf{M}(\alpha_t^s)^\gamma \leqslant \exp\{t-s)\,K(\gamma)\}.$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{c}(t, x)=\gamma c(t, x)$ и $\tilde{\varphi}(t, x, y)=\gamma\varphi(t, x, y)$. Тогда

$$(\alpha_t^s)^\gamma=\alpha_t^s(\gamma)\exp\left\{\int_s^t\left[\frac{1}{2}(\gamma^2-\gamma)\Big(c\big(u, x(u)\big)A\big(u, x(u)\big), c\big(u, x(u)\big)\Big)-\right.\right.$$

$$-\gamma\int_{R_m}\Big(e^{\varphi(u, y)}-1-\varphi(u, y)\Big)\Pi\big(u, x(u), dy\big)+\int_{R_m}\Big(e^{\gamma\varphi(u, y)}-1-$$

$$\left.\left.-\gamma\varphi(u, y)\Big)\Pi\big(u, x(u), dy\big)\right]du\right\},$$

где

$$\alpha_t(\gamma)=\exp\left\{x_{\tilde{c}}(t)-\frac{1}{2}\langle x_{\tilde{c}}\rangle_t+Q_{\tilde{\varphi}}(t)-\int_{t_0}^t\int_{R_m}\Big(e^{\tilde{\varphi}(u, y)}-1-\right.$$

$$\left.-\tilde{\varphi}(u, y)\Big)\Pi\big(u, x(u), dy\big)du\right\}$$

и

$$\alpha_t^s(\gamma)=\alpha_t(\gamma)\big(\alpha_s(\gamma)\big)^{-1}.$$

Отсюда в силу B_1 и B_2

$$(\alpha_t^s)^\gamma\leqslant\alpha_t^s(\gamma)\exp\Big\{(t-s)\,K(\gamma)\Big\}. \tag{5}$$

Поскольку функции $\tilde{c}$ и $\tilde{\varphi}$ удовлетворяют условиям леммы 1, то из (5) следует, что

$$\mathbf{M}(\alpha_t^s)^\gamma\leqslant\exp\Big\{(t-s)\,K(\gamma)\Big\}.$$

Лемма 3. *При условиях B_1 и B_2* $\mathbf{M}\alpha_t^s=1$ *для всех* $t_0\leqslant s<t\leqslant T$.

Доказательство. Так как

$$g_n''(x)\geqslant-\frac{3}{2}\chi_{[n, n+1)}(x),$$

то из (2) и (3) находим, что

$$\mathbf{M}g_n(\alpha_t^s)-1\geqslant\int_s^t\mathbf{M}\left\{-\frac{3}{4}(\alpha_u^s)^2\chi_{[n, n+1)}(\alpha_u^s)\Big(c\big(u, x(u)\big)A\big(u, x(u)\big), c\big(u, x(u)\big)\Big)+\right.$$

$$\left.+\int_{R_m}\left[-\frac{3}{4}(\alpha_u^s)^2\big(e^{\varphi(u, y)}-1\big)^2\chi_{[n, \infty)}\Big(\max\big(1, e^{\varphi(u, y)}\big)\alpha_u^s\Big)\Pi\big(u, x(u), dy\big)\right]\right\}du. \tag{6}$$

Мы пользовались тем, что для любых действительных чисел a и b

$$0\leqslant\int_a^b(b-x)\,\chi_{[n, n+1)}(x)\,dx\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2\chi_{[n, \infty)}\big(\max(a, b)\big).$$

Из (6) далее имеем, что

$$\mathbf{M}g_n(\alpha_t^s)-1 \geqslant -\frac{3}{4}\int_s^t \mathbf{M}\left\{(\alpha_u^s)^2\chi_{[n,\infty)}(e^{K_1}\alpha_u^s)\left[\left(c\left(u, x(u)\right)A\left(u, x(u)\right), c\left(u, x(u)\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{R_m}(e^{\varphi(u,y)}-1)^2\Pi\left(u, x(u), dy\right)\right\}du \geqslant -\frac{3}{4}(K_1+\right.$$

$$+e^{K_1}K_3)\int_s^t\left[\mathbf{M}(\alpha_u^s)^4\mathbf{P}\left\{\alpha_u^s\geqslant ne^{-K_1}\right\}\right]^{\frac{1}{2}}du\geqslant$$

$$\geqslant -\frac{3}{4n^2}(K_1+e^{K_1}K_3)e^{2K_1}\int_s^t e^{(u-s)K(4)}du.$$

Отсюда после перехода к пределу при $n\to\infty$ и следует утверждение леммы 3.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что $(\alpha_t, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ является мартингалом, т. е. для всех $t_0\leqslant s<t\leqslant T$ $\mathbf{M}(\alpha_t|\mathcal{F}_s)=\alpha_s$ п. в. или $\mathbf{M}(\alpha_t^s|\mathcal{F}_s)=1$ п.в.

Это очевидным образом следует из того, что $0\leqslant \mathbf{M}(\alpha_t^s|\mathcal{F}_s)\leqslant 1$ п. в. и $\mathbf{M}\alpha_t^s=1$.

§ 2. Абсолютно непрерывная замена меры

Предполагая выполненными условия B_1 и B_2, мы имеем, что $\mathbf{M}\alpha_T=1$. Поэтому мера $\tilde{\mathbf{P}}(A)=\int_A \alpha_T d\mathbf{P}$, $A\in\mathcal{F}$, будет вероятностной. Математическое ожидание по мере $\tilde{P}$, будем обозначать символом $\tilde{\mathbf{M}}$.

Далее мы неоднократно будем пользоваться следующими утверждениями.

Лемма 4. *Пусть случайная величина ξ $\mathcal{F}_t$-измерима, а η — $\mathcal{F}_s$-измерима и $\tilde{\mathbf{M}}\,|\xi\eta|<\infty$. Тогда при $s<t$*

$$\tilde{\mathbf{M}}(\xi\eta)=\tilde{\mathbf{M}}\left[\eta\mathbf{M}(\alpha_t^s\xi|\mathcal{F}_s)\right].$$

Доказательство. Имеем

$$\tilde{\mathbf{M}}(\xi\eta)=\mathbf{M}(\xi\eta\alpha_T)=\mathbf{M}(\xi\alpha_t\eta)+\mathbf{M}\left[\xi\eta(\alpha_T-\alpha_t)\right]=$$

$$=\mathbf{M}\left[\eta\alpha_s\mathbf{M}(\alpha_t^s\xi|\mathcal{F}_s)\right]=\tilde{\mathbf{M}}\left[\eta\mathbf{M}(\alpha_t^s\xi|\mathcal{F}_s)\right]-$$

$$-\mathbf{M}\left[\eta\mathbf{M}(\xi\alpha_t^s|\mathcal{F}_s)\,\mathbf{M}(\alpha_T-\alpha_s|\mathcal{F}_s)\right]=\tilde{\mathbf{M}}\left[\eta\mathbf{M}(\alpha_t^s\xi|\mathcal{F}_s)\right].$$

Следствие 1. *Если ξ — $\mathcal{F}_t$-измерима и $\tilde{\mathbf{M}}\,|\xi|<\infty$, то $\tilde{\mathbf{M}}(\xi|\mathcal{F}_s)=$* $=\mathbf{M}(\xi\alpha_t^s|\mathcal{F}_s)$ п.в. $(s<t)$. Действительно, достаточно выбрать в лемме 4 $\eta=\chi_A$, где A — любое подмножество из $\mathcal{F}_s$.

Лемма 5. *Пусть* $\mathscr{B}[t_0, T]\times\mathscr{F}_T$ *— измеримая функция* $\psi(t)=\psi(t, \omega)$ *при каждом* $t\mathscr{F}_t$ *— измеримая и*

$$\tilde{\mathbf{M}}\left(\int_{t_0}^{T}|\psi(u)|\,du\right)<\infty.$$

Тогда

$$\tilde{\mathbf{M}}\left(\int_{s}^{t}\psi(u)\,du\,|\,\mathscr{F}_s\right)=\mathbf{M}\left(\int_{s}^{t}\alpha_n^s\,\psi(u)\,du\,|\,\mathscr{F}_s\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\tilde{\mathbf{M}}\left(\int_{s}^{t}\psi(u)\,du\,|\,\mathscr{F}_s\right)=\int_{s}^{t}\tilde{\mathbf{M}}\left(\psi(u)\,|\,\mathscr{F}_s\right)du=$$

$$=\int_{s}^{t}\mathbf{M}\left(\alpha_u^s\,\psi(u)\,|\,\mathscr{F}_s\right)du=\mathbf{M}\left(\int_{s}^{t}\alpha_u^s\,\psi(u)\,du\,|\,\mathscr{F}_s\right).$$

Рассмотрим процесс $x(t)$, $t\in[t_0, T]$, на вероятностном пространстве (Ω $\mathscr{F}$, $\tilde{\mathbf{P}}$). Мы будем пользоваться далее следующими предположениями:

$$\mathrm{B}_3.\ \mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{T}a_{ii}^2\left(u,\ x(u)\,du\right)<\infty\right.$$

и

$$\mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}\left(u,\ x(u)\right)c_k\left(u,\ x(u)\right)\right)^4du\right)<\infty,\ i=1,\ \ldots,\ m,$$

$$\mathrm{B}_4.\ \mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{T}\left[\Pi\left(u,\ x(u),\ U_\varepsilon\right)\right]^2du\right)<\infty$$

для всех $\varepsilon>0$.

Теорема 2. *При условиях* $\mathrm{B}_1-\mathrm{B}_4$ *процесс* $x(t)$ *относительно меры* $\tilde{\mathbf{P}}$ *удовлетворяет предлсжению* A_1 *с заменой* $\Pi(t,\ x,\ \Gamma)$ *на*

$$\tilde{\Pi}(t,\ x,\ \Gamma)=\int_{\Gamma}e^{\varphi(t,\ x,\ y)}\,\Pi(t,\ x,\ dy)$$

и предложению A_2 *с заменой функции* $a(t,\ x)$ *на*

$$\tilde{a}(t,\ x)=a(t,\ x)+c(t,\ x)(A\,t,x)+\int_{|y|\leqslant 1}y\left(e^{\varphi(t,\ x,\ y)}-1\right)\Pi(t,\ x,\ dy)$$

и той же матрицей $A(t,\ x)$.

Доказательство теоремы будет следовать из следующих лемм. Обозначим

$$\tilde{q}(t,\ \Gamma)=p(t,\ \Gamma)-\int_{t_0}^{t}\int_{\Gamma}e^{\varphi(u,\ y)}\,\Pi\left(u,\ x(u),\ dy\right)du.$$

Лемма 6. *Если выполнены условия* B_1, B_2 и B_4, *то* $\left(\tilde{q}\, t,\ \Gamma),\mathscr{F}_t,\ \tilde{\mathbf{P}}\right)$, $t\in[t_0,\ T]$ *для всех* $\Gamma\in\mathscr{B}_m\cap U_\varepsilon$ и $\varepsilon>0$ *является интегрируемым с квадратом мартингалом таким, что п. в.*

$$\langle q(t,\ \Gamma)\rangle=\int_{t_0}^{t}\int_{\Gamma} e^{\varphi(u,\ y)}\,\Pi\left(u,\ x(u),\ dy\right)du.$$

Доказательство. Так как по обобщенной формуле К. Ито

$$\alpha_t^s=1+\int_s^t\int_{R_m}\alpha_u^s\left(e^{\varphi(u,\ y)}-1\right)q(du,\ dy)+\int_s^t\alpha_u^s\,dx_c(u), \tag{7}$$

а

$$\tilde{q}(t,\ \Gamma)-\tilde{q}(s,\Gamma)=q(t,\ \Gamma)-q(s,\Gamma)-\int_s^t\int_{\Gamma}\left(e^{\varphi(u,\ y)}-1\right)\Pi\left(u,x(u),\ dy\right)du,$$

то

$$\left(\tilde{q}(t,\ \Gamma)-\tilde{q}(s,\ \Gamma)\right)\alpha_t^s=q(t,\ \Gamma)-q(s,\ \Gamma)+\left(q(t,\ \Gamma)-\right.$$

$$\left.-q(s,\ \Gamma)\right)\left(\int_s^t\int_{R_m}\alpha_u^s\left(e^{\varphi(u,\ y)}-1\right)q(du,\ dy)+\int_s^t\alpha_u^s\,dx_c(u)\right)-$$

$$-\alpha_s^t\int_s^t\int_{\Gamma}\left(e^{\varphi(u,\ y)}-1\right)\Pi\left(u,\ x(u),\ dy\right)du. \tag{8}$$

Воспользовавшись тем, что

$$\langle Q_{f_1},\ Q_{f_2}\rangle_t=\int_{t_0}^{t}\int_{R_m}f_1(u,\ y)f_2(u,\ y)\,\Pi\left(u,\ x(u),\ dy\right)du$$

и $\langle X,\ Q_{f_3}\rangle_t=0$ п. в. для $f_1,\ f_2,\ f_3\in F_Q^{(1)}$ и $X\in\mathfrak{M}_c^{(1)}$

(см. [1], [5]), из (8), A_1 и леммы 4 находим, что п. в.

$$\tilde{\mathbf{M}}\left(\tilde{q}(t,\ \Gamma)-\tilde{q}(s,\ \Gamma)\,|\,\mathscr{F}_s\right)=$$

$$=\mathbf{M}\left[\int_s^t\alpha_u^s\int_{\Gamma}\left(e^{\varphi(u,\ y)}-1\right)\Pi\left(u,\ x(u),\ dy\right)du\,|\,\mathscr{F}_s\right]-$$

$$-\tilde{\mathbf{M}}\left[\int_s^t\int_{\Gamma}\left(e^{\varphi(u,\ y)}-1\right)\Pi\left(u,\ x(u),\ dy\right)du\,|\,\mathscr{F}_s\right].$$

Отсюда и из леммы 5 следует, что п.в.

$$\tilde{\mathbf{M}}\left(\tilde{q}\ (t,\ \Gamma\,|\,\mathscr{F}_s\right)=\tilde{q}\ (s,\ \Gamma),$$

т.е. $\left(\tilde{q}(t, \Gamma), \mathcal{F}_s, \tilde{\mathbf{P}}\right)$ является мартингалом. Далее снова по обобщенной формуле К. Ито

$$\left(\tilde{q}(t,\Gamma)-\tilde{q}(s,\Gamma)\right)^2=\left(q(t,\Gamma)-q(s,\Gamma)-\int\limits_s^t\int\limits_\Gamma (e^{\varphi(u,y)}-1)\,\Pi\left(u, x(u), dy\right)du\right)^2=$$

$$=\int\limits_s^t\left(1+2\left(\tilde{q}(u,\Gamma)-\tilde{q}(s,\Gamma)\right)\right)q(du,\Gamma)-2\int\limits_s^t\left(\tilde{q}(u,\Gamma)-\tilde{q}(s,\Gamma)\right)\left[\int\limits_\Gamma (e^{\varphi(u,y)}-\right.$$

$$\left.-1)\,\Pi\left(u, x(u), dy\right)\right]du+\int\limits_s^t\Pi\left(u, x(u), \Gamma\right)du.$$

Отсюда и из (7) имеем

$$\left(\tilde{q}(t,\Gamma)-\tilde{q}(s,\Gamma)\right)^2\alpha_t^s=\int\limits_s^t\left(1+2\left(\tilde{q}(u,\Gamma)-\tilde{q}(s,\Gamma)\right)\right)q(du,\Gamma)\left[1+\right.$$

$$\left.+\int\limits_s^t\alpha_u^s\int\limits_{R_m}(e^{\varphi(u,y)}-1)\,q(du, dy)+\int\limits_s^t\alpha_u^s\,dx_c(u)\right]+$$

$$+\alpha_t^s\left[\int\limits_s^t\Pi\left(u,x(u),\Gamma\right)du-2\int\limits_s^t\left(\tilde{q}(u,\Gamma)-\tilde{q}(s,\Gamma)\right)\left(\int\limits_\Gamma(e^{\varphi(u,y)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-1)\,\Pi\left(u, x(u), dy\right)du\right]. \qquad (9)$$

В силу условий B_1, B_2, B_4 лемм 2 и 4 из (9) легко следует, что

$$\tilde{\mathbf{M}}\left(\tilde{q}(t, \Gamma)-\tilde{q}(s, \Gamma)\right)^2=\mathbf{M}\left(\tilde{q}(t, \Gamma)-\tilde{q}(s, \Gamma)\right)^2\alpha_t^s<\infty,$$

а также

$$\tilde{\mathbf{M}}\left[\left(\tilde{q}(t, \Gamma)-\tilde{q}(s, \Gamma)\right)^2|\mathcal{F}_s\right]=\mathbf{M}\left[\left(\tilde{q}(t, \Gamma)-\tilde{q}(s, \Gamma)\right)^2\alpha_t^s\,|\,\mathcal{F}_s\right]=$$

$$=\mathbf{M}\left\{\int\limits_s^t\left[\alpha_u^s\left(1+2\left(\tilde{q}(u, \Gamma)-\tilde{q}(s, \Gamma)\right)\right)\int\limits_\Gamma(e^{\varphi(u,y)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-1)\,\Pi\left(u, x(u), dy\right)\right]du\,|\,\mathcal{F}_s\right\}-2\tilde{\mathbf{M}}\left[\int\limits_s^t\left(\tilde{q}(u,\Gamma)-\tilde{q}(s,\Gamma)\right)\left(\int\limits_\Gamma e^{\varphi(u,y)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-1)\,\Pi\left(u, x(u), dy\right)\right)du\,|\,\mathcal{F}_s\right]+\tilde{\mathbf{M}}\left(\int\limits_s^t\Pi\left(u, x(u), \Gamma\right)du\,|\,\mathcal{F}_s\right). \qquad (10)$$

Из (10) и леммы 5 получаем, что

$$\tilde{\mathbf{M}}\left[\left(\tilde{q}(t, \Gamma)-\tilde{q}(s, \Gamma)\right)^2|\mathcal{F}_s\right]=\tilde{\mathbf{M}}\left(\int\limits_s^t\int\limits_\Gamma e^{\varphi(u,y)}\,\Pi\left(u, x(u), dy\right)du\,|\,\mathcal{F}_s\right),$$

т.е.

$$\langle \tilde{q}(t, \Gamma)\rangle = \int_{t_0}^{t} \int_{\Gamma} e^{\varphi(u, y)} \Pi\left(u, x(u), dy\right) du.$$

Лемма 6 доказана.

Обозначим

$$\hat{x}(t) = x(t) - \tilde{Q}_f(t) - P_g(t) - \int_{t_0}^{t} \tilde{a}\left(u, x(u)\right) du,$$

где $\tilde{Q}_h(t)$ обозначает интеграл $\int_{t_0}^{t} \int_{R_m} h(u, y)\, \tilde{q}(du, dy)$.

Лемма 7. *При условиях $B_1 - B_2$ случайный процесс $\left(\hat{x}(t), \mathscr{F}_t, \tilde{\mathbf{P}}\right)$, $t \in [t_0, T]$, является интегрируемым с квадратом мартингалом, таким, что*

$$\langle \hat{x}_i, \hat{x}_j \rangle_t = \int_{t_0}^{t} a_{ij}\left(u, x(u)\right) du \qquad \text{п.в.}$$

Доказательство. Поскольку

$$\tilde{Q}_f(t) = Q_f(t) + \int_{t_0}^{t} \int_{|y| \leq 1} y\left(e^{\varphi(u, y)} - 1\right) \Pi\left(u, x(u), dy\right) du,$$

то

$$\hat{x}(t) = \tilde{x}(t) - \int_{t_0}^{t} c\left(u, x(u)\right) A\left(u, x(u)\right) du. \tag{11}$$

Из (7) и (11)

$$\left(\hat{x}(t) - \hat{x}(s)\right) \alpha_t^s = \left(\tilde{x}(t) - \tilde{x}(s)\right) \left[1 + \int_s^t \alpha_u^s \left(e^{\varphi(u, y)} - 1\right) q(du, dy) + \right.$$

$$\left. + \int_s^t \alpha_u^s\, dx_c(u)\right] - \alpha_t^s \int_s^t c\left(u, x(u)\right) A\left(u, x(u)\right) du.$$

Отсюда

$$\tilde{\mathbf{M}}\left[\left(\hat{x}(t) - \hat{x}(s)\right) \middle| \mathscr{F}_s\right] = \mathbf{M}\left[\left(\hat{x}(t) - \hat{x}(s)\right) \alpha_t^s \middle| \mathscr{F}_s\right] =$$

$$= \mathbf{M}\left(\int_s^t \alpha_u^s c\left(u, x(u)\right) A\left(u, x(u)\right) du \middle| \mathscr{F}_s\right) -$$

$$- \tilde{\mathbf{M}}\left(\int_s^t c\left(u, x(u)\right) A\left(u, x(u)\right) du \middle| \mathscr{F}_s\right) = 0 \text{ п.в.}$$

Значит, $\left(\hat{x}(t), \mathscr{F}_t, \tilde{\mathbf{P}}\right)$ – мартингал.

По обобщенной формуле К. Ито

$$\left(\hat{x}_i(t)-\hat{x}_i(s)\right)\left(x_j(t)-\hat{x}_j(s)\right)=\Bigg(\hat{x}_i(t)-\hat{x}_i(s)-$$

$$-\int_s^t\sum_{k=1}^m c_k\left(u,\ x(u)\right)a_{ik}\left(u,\ x(u)\right)du\Bigg)\Bigg(\hat{x}_j(t)-\hat{x}_j(s)-$$

$$-\int_s^t\sum_{k=1}^m c_k\left(u,\ x(u)\right)a_{jk}\left(u,\ x(u)\right)du\Bigg)=\int_s^t\left(\hat{x}_i(u)-\hat{x}_i(s)\right)d\tilde{x}_j(u)+$$

$$+\int_s^t\left(\hat{x}_j(u)-\hat{x}_j(s)\right)d\tilde{x}_i(u)-\int_s^t\left(\hat{x}_i(u)-\hat{x}_i(s)\right)\sum_{k=1}^m c_k\left(u,x(u)\right)a_{jk}\left(u,x(u)\right)du-$$

$$-\int_s^t\left(\hat{x}_j(u)-\hat{x}_j(s)\right)\sum_{k=1}^m c_k\left(u,\ x(u)\right)a_{ik}\left(u,\ x(u)\right)du+$$

$$+\int_s^t a_j\left(u,\ x(u)\right)du. \qquad (12)$$

В силу предположений B_1-B_3 из (6) и (12) после несложных оценок получаем, что

$$\tilde{\mathbf{M}}\left(\hat{x}_i(t)-\hat{x}_i(s)\right)^2=\mathbf{M}\left[\left(\hat{x}_i(t)-\hat{x}_i(s)\right)^2\alpha_t^s\right]<\infty,$$

а также

$$\tilde{\mathbf{M}}\left[\left(\hat{x}_i(t)-\hat{x}_i(s)\right)\left(\hat{x}_j(t)-\hat{x}_j(s)\right)|\mathcal{F}_s\right]=\tilde{\mathbf{M}}\left[\int_s^t a_{ij}\left(u,\ x(u)\right)du\,|\mathcal{F}_s\right]-$$

$$-\tilde{\mathbf{M}}\left[\int_s^t\left(\hat{x}_i(u)-\hat{x}_i(s)\right)\sum_{k=1}^m c_k\left(u,\ x(u)\right)a_{jk}\left(u,\ x(u)\right)du\,|\mathcal{F}_s\right]-$$

$$-\mathbf{M}\left[\int_s^t\left(\hat{x}_j(u)-\hat{x}_j(s)\right)\sum_{k=1}^m c_k\left(u,\ x(u)\right)a_{ik}\left(u,\ x(u)\right)du\,|\mathcal{F}_s\right]+$$

$$+\mathbf{M}\left[\int_s^t\alpha_u^s\left(\hat{x}_i(u)-\hat{x}_i(s)\right)\sum_{k=1}^m c_k\left(u,\ x(u)\right)a_{jk}\left(u,\ x(u)\right)du\,|\mathcal{F}_s\right]+$$

$$+\mathbf{M}\left[\int_s^t\alpha_u^s\left(\hat{x}_j(u)-\hat{x}_j(s)\right)\sum_{k=1}^m c_k\left(u,\ x(u)\right)a_{ik}\left(u,\ x(u)\right)du\,|\mathcal{F}_s\right]+$$

$$+\mathbf{M}\Bigg[\Bigg(1+\int_s^t\int_{R_m}\alpha_u^s\left(e^{\varphi(u,y)}-1\right)q\,(du,\ dy)\Bigg)\Bigg(\int_s^t\left(\hat{x}_i(u)-\hat{x}_i(s)\right)d\tilde{x}_j(u)+$$

$$+\int_s^t\left(\hat{x}_j(u)-\hat{x}_j(s)\right)d\tilde{x}_i(u)\,|\mathcal{F}_s\Bigg]=\tilde{\mathbf{M}}\left(\int_s^t a_{ij}\left(u,\ x(u)\right)du\,|\mathcal{F}_s\right),$$

т. е. $\langle\hat{x}_i,\ \hat{x}_j\rangle_t=\int_{t_0}^t a_{ij}\left(u,\ x(u)\right)du$ п. в.

Лемма 7 доказана.

§ 3. О критерии марковости

Пусть выполнены предположения A_1 и A_2 и существуют мера $\Pi(t, \Gamma)$ и положительная $\mathscr{B}(t_0, T)\times\mathscr{B}_m\times\mathscr{B}_m$—измеримая функция $\rho(t, x, y)$, такие, что $\Pi(t, x, \Gamma)=\int\limits_{\Gamma}\rho(t, x, y)\,\Pi(t, dy)$ для всех $\Gamma\in\mathscr{B}_m$. Выберем $c(t, x)\equiv 0$, $\varphi(t, x, y)=-\ln\rho(t, x, y)$ и предположим, что выполнены условия B_2-B_4. Тогда непосредственно из теоремы 2 и теоремы 3 в [1] вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Если матрица $A(t, x)$ имеет постоянный ранг r, то существует r-мерный винеровский процесс $(w(t), \mathscr{F}_t, \tilde{P})$, не зависящий от меры p, которая относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$ является пуассоновской, такой, что процесс $(x, (t), \mathscr{F}_t, \tilde{\mathbf{P}})$ является решением стохастического уравнения К. Ито*

$$x(t)=x(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\tilde{a}\big(u, x(u)\big)\,du+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\int\limits_{t_0}^{t}b_k\big(u, x(u)\big)\,du_k(u)+\tilde{Q}_f(t)+P_g(t), \tag{13}$$

где

$$\tilde{a}(t, x)=a(t, x)+\int\limits_{|y|\leqslant 1}y\big(1-\rho(t, x, y)\big)\,\Pi(t, dy),$$

а

$$\tilde{q}(t, \Gamma)=p(t, \Gamma)-\int\limits_{t_0}^{t}\Pi(u, \Gamma)\,du.$$

(Определение функций $b_k(t, x)$ см. в [1].)

Замечание 1. В случае зависимости ранга $A(t, x)$ от t и x утверждение теоремы 3 остается в силе после присоединения к основному ω-пространству винеровского процесса соответствующей размерности (см. [1]).

Теорема 4. *Если выполнены условия теоремы* 3 *и уравнение* (13) *имеет единственное непрерывное справа решение, то случайный процесс* $(x(t), \mathscr{F}_t, \mathbf{P})$ *обладает марковским свойством.*

Доказательство теоремы 4 вытекает из теоремы 3, следствия 2 [1] и следующих лемм.

Обозначим $\tilde{\alpha}_t=(\alpha_t)^{-1}$.

Лемма 8. *Случайный процесс* $(\tilde{\alpha}_t, \mathscr{F}_t, \tilde{\mathbf{P}})$, $t\in[t_0, T]$ *является мартингалом.*

Доказательство. Поскольку $\mathbf{M}(\alpha_t^s\,|\,\mathscr{F}_s)=1$ п.в. для всех $t_0\leqslant s<t\leqslant T$, то

$$\int\limits_A\alpha_t^s\,d\mathbf{P}=\mathbf{P}(A)\quad\text{для всех}\quad A\in\mathscr{F}_s.$$

Отсюда

$$\int\limits_A\tilde{\alpha}_t\,d\tilde{\mathbf{P}}=\int\limits_A\tilde{\alpha}_t\,\alpha_T\,d\mathbf{P}=\int\limits_A\alpha_T^t\,d\mathbf{P}=\mathbf{P}(A)\ \text{ для всех }\ A\in\mathscr{F}_t\supset\mathscr{F}_s \tag{14}$$

и

$$\int\limits_A\tilde{\alpha}_s\,d\tilde{\mathbf{P}}=\int\limits_A\tilde{\alpha}_s\,\alpha_T\,d\mathbf{P}=\int\limits_A\alpha_T^s\,d\mathbf{P}=\mathbf{P}(A)\ \text{ для всех }\ A\in\mathscr{F}_s. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что

$$\int_A \tilde{\alpha}_t \, d\tilde{\mathbf{P}} = \int_A \tilde{\alpha}_s \, d\tilde{\mathbf{P}} \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{F}_s,$$

т.е. $\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\alpha}_t \mid \mathcal{F}_s) = \tilde{\alpha}_s$ п.в.

Лемма 9. *Если случайный процесс* $\left(x(t), \mathcal{F}_t, \mathbf{P}\right)$, $t \in [t_0, T]$, *обладает марковским свойством, то им же обладает и процесс* $\left(x(t), \mathcal{F}_t, \tilde{\mathbf{P}}\right)$.

Доказательство. В силу следствия 1 при $\xi = \chi_\Gamma\left(x(t)\right)$ и марковского свойства процесса $\left(x(t), \mathcal{F}_t, \mathbf{P}\right)$

$$\tilde{\mathbf{M}}\left(\chi_\Gamma\left(x(t)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{M}\left(\chi_\Gamma\left(x(t)\right) \alpha_t^s \mid \mathcal{F}_s\right) =$$

$$= \mathbf{M}\left(\chi_\Gamma\left(x(t)\right) \alpha_t^s \mid x(s)\right).$$

Отсюда

$$\tilde{\mathbf{M}}\left(\chi_\Gamma\left(x(t)\right) \mid x(s)\right) = \tilde{\mathbf{M}}\left[\tilde{\mathbf{M}}\left(\chi_\Gamma\left(x(t)\right) \mathcal{F}_s\right) \mid x(s)\right] =$$

$$= \mathbf{M}\left(\chi_\Gamma\left(x(t)\right) \alpha_t^s \mid x(s)\right),$$

т.е.

$$\tilde{\mathbf{P}}\left\{x(t) \in \Gamma \mid \mathcal{F}_s\right\} = \tilde{\mathbf{P}}\left\{x(t) \in \Gamma \mid x(s)\right\} \text{ п.в.}$$

для всех $t_0 \leqslant s < t \leqslant T$ и $\Gamma \in \mathcal{B}_m$, что и требовалось доказать.

§ 4. Критерий абсолютной непрерывности мер, соответствующих марковским процессам

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$, $t \in [t_0, T]$ – два марковских процесса, удовлетворяющие предположениям A_1 и A_2 с функциями $a_1(t, x)$, $A_1(t, x)$, $\Pi_1(t, x, \Gamma)$ и $a_2(t, x)$, $A_2(t, x)$ $\Pi_2(t, x, \Gamma)$, соответственно. Обозначим μ_1 и μ_2 соответствующие процессам $x_1(t)$ и $x_2(t)$ меры на σ -алгебре $\mathcal{F}_{[t_0, T]}^{(m)}$, порожденной цилиндрическими множествами в пространстве всех функций, определенных на интервале $[t_0, T]$ и принимающих значения в R_m (см. [6]).

Предположим, что распределение $x_2(t_0)$ абсолютно непрерывно относительно распределения $x_1(t_0)$ с плотностью $\rho(t_0, x)$ и $\Pi_2(t, x, \Gamma]$ абсолютно непрерывно относительно $\Pi_1(t, x, \Gamma)$ с плотностью $\rho(t, x, y) > 0$. Предположим также, что функции $a_2(t, x)$ $A_2(t, x)$ и $\Pi_2(t, x, \Gamma)$ однозначно определяют функцию переходных вероятностей процесса $x_2(t)$. При этих условиях имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Для абсолютной непрерывности меры* μ_2 *относительно* μ_1 *достаточно, чтобы* $A_1(t, x) = A_2(t, x)$ *и существовала такая функция* $c(t, x)$, *вместе с* $\varphi(t, x, y) = \ln \rho(t, x, y)$ *удовлетворяющая условиям* $B_1 - B_4$ *с заменой* a, A *и* Π *на* a_1, A_1 *и* Π_1 *и такая, что*

$$a_2(t, x) = a_1(t, x) + c(t, x) A_1(t, x) + \int_{|y| \leq 1} y\left(\rho(t, x, y) - 1\right) \Pi_1(t, x, dy).$$

При этом плотность $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$ *задается формулой*

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}\left(x_1(\cdot)\right) = \rho\left(t_0, x_1(t_0)\right) \alpha_T,$$

где α_T *определяется выражением* (1) *с заменой* $x(t)$ *на* $x_1(t)$.

Доказательство. Из сделанных предложений и теоремы 2 следует, что функция переходных вероятностей процесса $\left(x_1(t), \mathscr{F}_t, \tilde{\mathbf{P}}\right)$, где $\tilde{\mathbf{P}}(A) = \int_A \alpha_T \, d\mathbf{P}$, $A \in \mathscr{F}$, совпадает с переходной функцией процесса $x_2(t), \mathscr{F}_t, \mathbf{P})$. Отсюда и следует утверждение теоремы (см. [6]).

Замечание 2. Пусть случайный процесс $x(t)$, $t \in [t_0, T]$, является непрерывным справа решением стохастического уравнения К. Ито

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t^0}^{t} \tilde{a}\left(u, x(u)\right) du + \sum_{k=1}^{l} \int_{t_0}^{t} b_k\left(u, x(u)\right) dw_k(u) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \int_{|y| \leq 1} f\left(u, x(u), y\right) q(du, dy) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \int_{|y| > 1} f\left(u, x(u), y\right) p(du, dy),$$

где $p(du, dy)$ — пуассоновская мера с $\mathbf{M}\, p(du, dy) = \frac{du\, dy}{|y|^{m+1}}$ (см. [9]). Для проверки предположений A_1 и A_2 следует выбрать

$$\Pi(t, x, \Gamma) = \int_{f(t, x, y) \in \Gamma} \frac{dy}{|y|^{m+1}}, \quad a_{ij}(t, x) = \sum_{k=1}^{l} b_{ki}(t, x) b_{kj}(t, x)$$

и

$$a(t, x) = \tilde{a}(t, x) + \int_{\substack{|y| > 1 \\ |f(t, x, y)| \leq 1}} f(t, x, y) \frac{dy}{|y|^{m+1}} - \int_{\substack{|y| \leq 1 \\ |f(t, x, y)| > 1}} f(t, x, y) \frac{dy}{|y|^{m+1}}.$$

Замечание 3. В случае, когда $x(t)$ — марковский процесс, для проверки предположений A_1 и A_2 можно указать условия на инфинитезимальные характеристики функции переходных вероятностей.

Замечание 4. Усложнением выкладок можно существенно ослабить предположения $B_1 - B_4$.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
4.IX.1968

Литература

1. Б. Григелионис, О марковском свойстве случайных процессов, Лит. матем. сб., VII, 3(1968).
2. И. В. Гирсанов, О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры, Теория вероятн. и ее прим., V, 3(1960), 314—330.
3. Е. Б. Дынкин, Аддитивные функционалы от винеровского процесса, определяемые стохастическими интегралами, Теория вероятн. и ее прим., V, 4(1960), 441—452.
4. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы. Физматгиз, М., 1963.
5. H. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math., J., 30(1967 209–245.
6. И. И. Гихман, А. В. Скороход, О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах, УМН, XXI, 6(1966), 83—152.
7. A. V. Skorochod, On the densities of probability measures in functional spaces, Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), vol. II: Contributions to Probability Theory, Part 1, pp. 163–182, Univ. Calif. Press, Berkeley, Calif., 1967.
8. А. В. Скороход, О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам, II. Процессы Маркова, Теория вероятн. и ее прим., V, (1(1960), 45—53.
9. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Изд. КГУ, Киев, 1961.
10. S. Watanabe, On discontinuous additive functionales and Lévy measures of Markov pro cesses, Japanese J. Math., 36(1964), 57–70.

APIE ABSOLIUČIAI TOLYDINĮ MATO PAKEITIMĄ IR ATSITIKTINIŲ PROCESŲ MARKOVO SAVYBĘ

B. GRIGELIONIS

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje apibendrinamas atsitiktinių procesų markoviškumo kriterijus, nagrinėtas [1] darbe. Taip pat gautos pakankamos sąlygos, kai matai, atitinkantieji Markovo procesus, yra absoliučiai tolydiniai.

ON ABSOLUTELY CONTINUOUS CHANGE OF MEASURE AND MARKOV PROPERTY OF STOCHASTIC PROCESSES

B. GRIGELIONIS

(*Summary*)

In the paper criterion of markovity of stochastic processes, in investigated in [1], is generalized. Sufficient conditions for absolute continuity of measures, corresponding to Markov processes, are given also.