XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1969

УДК – 517.5 : 513.88

О ЗНАЧЕНИЯХ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ

А. ГОМБЕРГ

Вопросами построения целых функций, принимающих в заданных точках $\{\lambda_k\}$ заданные значения $\{a_k\}$ и нахождения порядка их роста занимался ряд авторов [1], [2]. В настоящей работе мы получаем аналоги результатов [1], для случая функций голоморфных в единичном круге $|z|<1$. Отметим, что случай, когда порядок роста определяется возрастанием неванлинновской характеристики $T(r,f)$, а точки $\{\lambda_k\}$, лежат в конечном числе некасательных к единичной окружности углов был изучен А. Г. Нафталевичем [3].

§ 1. Вспомогательные предложения

1. Приведем сначала несколько часто используемых обозначений (см., например, [3]).

Порядком ρ функции $\omega(z)$, голоморфной в единичном круге, будем называть величину

$$\rho=\overline{\lim_{r\to 1-0}}\,\frac{\ln^+\ln^+ M(r,\ \omega)}{-\ln(1-r)},$$

где

$$M(r,\ \omega)=\max_{0\leqslant\Theta\leqslant 2\pi}|\omega(re^{i\Theta})|.$$

Множество всех функций, голоморфных в круге, порядок которых не пре восходит ρ, будем называть классом $[\rho,\ \infty]$, [2].

В работе мы получим необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять точки $\{\lambda_k\}$, $|\lambda_k|\to 1-0$, и числа $\{a_k\}$ для того, чтобы существовала функция $\omega(z)$, принимающая в точках $\{\lambda_k\}$ значения $\{a_k\}$, принадлежащая некоторому классу $[\rho,\ \infty]$ при условии $\rho>1$.

Для доказательства этого нам понадобятся некоторые характеристики распределения точек $\{\lambda_k\}$.

Обозначим через $n(r)$ число точек λ_k, лежащих в круге $|z|<r$, через $n(r,\ \Theta)$ – число точек λ_k лежащих в секторе:

$$\{z:|z|<r,\ |\arg z-\Theta|\leqslant\pi(1-r)\},$$

а

$$\hat{n}(r)=\sup_{\Theta} n(r,\ \Theta).$$

Через $n_1(r,\Theta)$ обозначим число точек λ_k, лежащих в „воротничке“

$$\{z:|z|<r,\ |z|\geqslant 2r-1,\ |\arg z-\Theta|\leqslant\pi(1-r)\}$$

и

$$\tilde{n}(r)=\sup_{\Theta} n_1(r,\ \Theta).$$

Порядком функции $n(r)$ $\left(\text{соответственно } \hat{n}(r) \text{ и } \bar{n}(r)\right)$ будем называть величину τ (соответственно $\hat{\tau}$, $\bar{\tau}$)

$$\tau = \overline{\lim_{r \to 1-0}} \frac{\ln n(r)}{-\ln(1-r)}. \tag{2}$$

Большими латинскими буквами, $A, B, C, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные; $A_p, B_p, C_p \ldots$ — положительные постоянные зависящие от параметра p.

2. **Предложение 1.** *Порядки функций* $\hat{n}(r)$ *и* $\bar{n}(r)$ *совпадают* (или короче $\hat{\tau} = \bar{\tau}$).

Действительно, непосредственно из определений функций $\bar{n}(r)$ и $\hat{n}(r)$ легко следует, что $\hat{\tau} \geqslant \bar{\tau}$. Докажем обратное, т. е. что $\hat{\tau} \leqslant \bar{\tau}$. Для этого заметим сначала, что из определения порядка непосредственно следует неравенство:

$$\bar{n}(r) \leqslant (1-r)^{-\bar{\tau}-\varepsilon} \tag{3}$$

начиная с некоторого $r \geqslant r_0$. Обозначим $R = \max\left\{r_0, \frac{1}{2}\right\}$. Разобьем теперь область

$$\{z : R < |z| < r, \ |\arg z - \Theta| < \pi(1-r)\}$$

на „воротнички" концентрическими окружностями радиусов $r_1 > r_2 > \ldots > r_n$ с центром в точке $z=0$, причем $r_1 = 2r-1, r_2 = 2r_1 - 1, \ldots r_n = 2r_{n-1} - 1$, $r \geqslant R$, но $2r_n - 1 < R$. Исходя из этого разбиения получаем

$$\hat{n}(r) \leqslant \bar{n}(r) + \bar{n}(r_1) + \ldots + \bar{n}(r_n) + n(R),$$

следовательно,

$$\hat{n}(r) \leqslant (1-r)^{-\bar{\tau}-\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k+1)(\bar{\tau}+\varepsilon)} + n(R).$$

Так как $n(R) = \text{const}$ и $\sum_{k=1}^{n} 2^{-(k+1)(\bar{\tau}+\varepsilon)} < 1$, то получаем что $\hat{\tau} \leqslant \bar{\tau}$. Таким образом, $\hat{\tau} = \bar{\tau}$.

Предложение 2. *Порядок функции* $\hat{n}(r)$ *лежит в интервале* $[\tau - 1, \tau]$ (или короче $\tau - 1 \leqslant \hat{\tau} \leqslant \tau$). Следует очевидным образом из определения функций $\hat{n}(r)$ и $n(r)$.

Определение. *Показателем сходимости последовательности* $\{\lambda_k\}$ *будем называть действительное число* ν *такое, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\lambda_k|)^{\nu+\varepsilon} < \infty, \text{ но } \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\lambda_k|)^{\nu-\varepsilon} = \infty$$

для произвольного $\varepsilon > 0$. Если такого ν не существует, то будем говорить, что последовательность $\{\lambda_k\}$ имеет бесконечный показатель сходимости.

Предложение 3. *Порядок функции* $n(r)$ *совпадает с показателем сходимости последовательности* $\{\lambda_k\}$.

Действительно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\lambda_k|)^{\gamma} \tag{3}$$

можно записать в виде интеграла Стилтьеса следующим образом:

$$\int_0^1 (1-t)^\gamma\, dn(t). \tag{3_1}$$

Если ряд (3) сходится, то сходится и интеграл (3_1). Интегрируя по частям и учитывая, что $n(0)=0$, получаем

$$\int_0^r (1-t)^\gamma\, dn(t) = n(r)(1-r)^\gamma + \gamma \int_0^r n(t)(1-t)^{\gamma-1}\, dt.$$

Из сходимости интеграла (3_1) следует, что при произвольном $\varepsilon>0$ и $r>r_0(\varepsilon)$

$$\varepsilon > \gamma \int_r^1 n(t)(1-t)^{\gamma-1}\, dt \geqslant \gamma n(r) \int_r^1 (1-t)^{\gamma-1}\, dt = n(r)(1-r)^\gamma.$$

Таким образом $\nu \geqslant \tau$.

Пусть теперь τ – порядок $n(r)$, тогда при $\varepsilon>0$ асимптотически $n(t) \leqslant \leqslant (1-t)^{-\tau-\varepsilon}$, поэтому при $\gamma=\tau+\varepsilon$ сходится интеграл (3_1), а следовательно и ряд (3).

Итак $\tau=\nu$.

3. Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ имеет конечный показатель сходимости и пусть для некоторого $h>1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|\lambda_k|)^{h-1} < \infty.$$

Опишем около каждой точки λ_k (начиная с некоторого k) как около центра круг C_k радиуса $r_k=(1-|\lambda_k|)^h$. Множество всех замкнутых кругов $\bar{C}_k$ состоит из связных компонент, которые назовем „облаками" H_i.

Предложение 4 [3]. *Каждое „облако" образовано конечным числом кругов $\bar{C}_k$ и содержит конечное число точек λ_k.*

Определение [3]. *Окружность $|z|=r$, $r<1$, не пересекающая ни одного круга $\bar{C}_k$, назовем „окружностью U".*

Предложение 5 [3]. *Для любого $R<1$ имеется „окружность U", радиус которой удовлетворяет неравенству $R<r<1$.*

Предложение 6 [3]. *Если r $(r>r_0)$ — радиус некоторой „окружности U", то имеется другая „окружность U", радиус которой больше r, но меньше $r+\frac{1-r}{2}$.*

Предложение 7. *Пусть r_1 и $r_2 \leqslant r_1+\frac{1-r_1}{2}$ радиусы двух „окружностей U", тогда существуют радиусы l_i, не пересекающие ни одного „облака" H_i и такие, что расстояния между ними не больше $1-r_1$.*

Это предложение немедленно следует из того, что сумма радиусов кругов $\bar{C}_k$, окружающих точки λ_k, лежащие в кольце

$$r_1 < |z| < r_1 + \frac{1}{2}(1-r_1),$$

не превосходит

$$(1-r_1)^{h-\tau}$$

и так, как $\tau=\nu$, а $h\geqslant\nu+1$, то

$$(1-r_1)^{h-\tau}\leqslant(1-r_1).$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые результаты о связи роста функции, голоморфной в единичном круге с распределением ее нулей.

§ 2. Некоторые сведения о росте функций, голоморфных в единичном круге*)

1. Пусть теперь $\{\lambda_k\}$ нули функции $f(z)$. Для целых функций известно что скорость возрастания их модуля полностью характеризуется распределением их нулей по модулям. Для функций, голоморфных в круге, это не так. А именно, имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ функция, голоморфная при $|z|<1$, имеющая порядок $\rho>1$. Тогда для $\hat{n}(r)$ выполняется асимптотическое неравенство*

$$\hat{n}(r)\leqslant(1-r)^{-\rho-\varepsilon}. \tag{4}$$

Доказательство. Не уменьшая общности можно доказывать неравенство (4) только для $n(r,\ 0)$.

Обозначим $D(\gamma)$ — круговой двуугольник с вершинами $z=0$, $z=1$, симметричный относительно вещественной оси, лежащий в единичном круге, стороны которого пересекаются под углом $\pi/1+\gamma$, число γ выбираем таким образом, чтобы $\rho/1+\gamma>1$. Через $C(r)$ обозначим круг $|z|<r<1$ и будем оценивать число нулей функции $f(z)$ в области $D(2\gamma,\ r)=D(2\gamma)\cap C(r)$. Для этого отобразим $D(\gamma)$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ с помощью функции

$$w=Re^{i\Theta}\left(\frac{1}{1-z}\right)^{1+\gamma}. \tag{5}$$

При отображении (5) $D(2\gamma)$ переходит в угол $\Lambda(\gamma)$, лежащий в верхней полу плоскости, с вершиной в начале координат, а область $D\left(\gamma,\ (A_\gamma+r-1)/A_\gamma\right)$ — в область, покрывающую полукруг

$$\{\,|w|\leqslant R\leqslant(r/1-r)^{1+\gamma}\},\quad \operatorname{Im} w>0\}.$$

Рассмотрим функцию $f\left(z(w)\right)=F(w)$, голоморфную в верхней полуплоскости и пусть $w=Re^{i\Theta}$; $w_k=R_k\,e^{i\Theta_k}$ — нули $F(w)$, а $N(R,\ F)$ — число точек w_k в области $C(R)\cap\Lambda(\gamma)$. Легко видеть, что

$$\varlimsup_{R\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+M(R,\ F)}{\ln R}=\frac{\rho}{1+\gamma}=\rho_1, \tag{6}$$

где

$$M(R,\ F)=\max_{w\in C(R)}|F(w)|.$$

Для оценки $N(R,\ F)$ воспользуемся формулой Карлемана (см. [4], стр. 292)

$$\sum_{B<R_k<R}\left(\frac{1}{R_k}-\frac{R_k}{R^2}\right)\sin\Theta_k=\frac{1}{\pi R}\int\limits_0^\pi\ln|F(Re^{i\Theta})|\sin\Theta\,d\Theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_B^R\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{R^2}\right)\ln|F(x)F(-x)|\,dx+O(1). \tag{7}$$

*) Результаты этого параграфа докладывались на конференции СНО ХГУ в 1963 году.

Оценим левую часть равенства (7)

$$\sum_{B<R_k<R}\left(\frac{1}{R_k}-\frac{R_k}{R^2}\right)\sin\Theta_k\geqslant\sin\beta\int_B^R\frac{R^2-t^2}{R^2t}\,dN(t,\ E)=$$

$$=\sin\beta\left[O(1)+\int_B^R\frac{t^2+R^2}{R^2t}\,N(t,\ F)\,dt\geqslant\frac{C}{R}\,N\left(\frac{R}{2},\ F\right)\right.. \tag{7_1}$$

Правую часть равенства (7) оценим сверху

$$\int_0^\pi\ln|F(Re^{i\Theta})|\sin\Theta\,d\Theta\leqslant\pi\ln M(R,\ F) \tag{7_2}$$

и учитывая (6), получаем

$$\int_B^R\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{R^2}\right)\ln|F(x)F(-x)|\,dx\leqslant2\int_B^R\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{R^2}\right)x^{\rho_1+\varepsilon}\,dx,$$

откуда

$$\int_B^R\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{R^2}\right)\ln|F(x)F(-x)|\,dx\leqslant KR^{\rho_1+\varepsilon-1}+O(1). \tag{7_3}$$

Подставляя оценки (7_1), (6_2), (6_3) в (6) получаем

$$N(R,\ F)\leqslant KR^{\rho_1+\varepsilon}.$$

Так как $D(r,\ \Theta)$ покрывается двумя областями $D(\gamma,\ r)$, а $n\left(\frac{3}{4},f\right)$ ограничено, получаем, переходя к переменным z и r,

$$n(r,\ \Theta)\leqslant(1-r)^{-\rho-\varepsilon},$$

или, что то же самое, $\hat{n}(r)\leqslant(1-r)^{-\rho-\varepsilon}$, то есть $\rho\geqslant\hat{\tau}$.

2. Покажем, что существуют функции, голоморфные в единичном круге, для которых $\hat{\tau}$ совпадает с порядком роста ρ. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{z-\lambda_k}{1-z\bar{\lambda}_k}\ \bar{\lambda}_k\right)\exp\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1-|\lambda_k|^2}{1-z\bar{\lambda}_k}\right)^n\frac{1}{n}\right], \tag{7}$$

где p – наименьшее целое число при котором сходится ряд $\sum_k(1-|\lambda_k|)^p$.

Величину

$$G(u,\ p)=\left(1-\frac{1-|\lambda_k|^2}{1-z\bar{\lambda}_k}\right)\exp\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1-|\lambda_k|^2}{1-z\bar{\lambda}_k}\right)^n\frac{1}{n},$$

как и в теории целых функций, будем называть первичным множителем, а произведение (7) – каноническим. По известному неравенству (см. [4], стр. 21)

$$\ln|G(u,\ p)|\leqslant A_p\,\frac{|u|^{p+1}}{1+|u|}<B_p|u|^{p+1}, \tag{8}$$

где

$$G(u,\ p)=(1-u)\exp\sum_{n=1}^{n}\frac{u^n}{n},\quad \text{а}\quad u=\frac{1-|\lambda_k|^2}{1-z\bar{\lambda}_k}.$$

Докажем, что порядок ρ канонического произведения $\Phi(z)$ совпадает с $\bar\tau$ порядком $\bar n(r)$. Для этого разобьем круг $|z|<1$ на „воротнички" $D(l, m)$

$$\{z: 1-2^{-m}\leqslant|z|\leqslant 1-2^{-m-1}, \quad \pi l 2^{-m}\leqslant \arg z\leqslant\pi(l+1)2^{-m}\},$$

где m и l целые числа, $m>0$ и $2^{m-1}<l<-2^{m-1}-1$. Т. к. порядок $\bar n(r)$ равен $\bar\tau$, то, начиная с некоторого $m>M$, для числа точек $\lambda_k - n(m, l)$ в „воротничке" $D(m, l)$ выполняется оценка

$$n(m, l)\leqslant 2^{m(\bar\tau+\varepsilon)}.$$

Обозначим

$$v_{ml}=\sum_{\lambda_k\in D_{(m,l)}}\left(\frac{1-|\lambda_k|^2}{|1-z\bar\lambda_k|}\right)^{p+1}, \quad z=re^{i\Theta}, \quad \lambda_k=r_k e^{i\Theta_k},$$

и оценим $|1-z\lambda_k|$:

$$|1-z\bar\lambda_k|^2=(1-rr_k)^2+4rr_k\sin^2\frac{\Theta-\Theta_k}{2}\geqslant(1-rr_k)^2+\pi^{-2}rr_k(\Theta-\Theta_k)^2\geqslant$$
$$\geqslant(1-r+r2^{-m-1})^2+l^2 2^{-2m},$$

откуда

$$v_{ml}\leqslant 2^{m(\bar\tau+\varepsilon-p-1)}\{(1-r+r2^{-m-1})^2+l^2 2^{-2m}\}^{-\frac{p+1}{2}}.$$

Из (8) получаем, что

$$\ln|\Phi(z)|\leqslant B_p\sum_m\sum_l v_{ml}. \tag{9}$$

Положим $a=(1-r+r2^{-1-m})$, $b=2^{-m}$, тогда

$$\sum_l v_{ml}\leqslant 2^{m(\bar\tau+\varepsilon-p-1)}\sum_l\{a^2+l^2b^2\}^{-\frac{p+1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant 2^{m(\bar\tau+\varepsilon-p-1)}\left[a^{-p-1}+2\int_0^\infty(a^2+x^2b^2)^{-\frac{p+1}{2}}dx\right]=$$
$$=2^{m(\bar\tau+\varepsilon-p-1)}a^{-p-1}\left\{1+2\frac{a}{2}\int_0^\infty(1+x^2)^{-\frac{p+1}{2}}dx\right\}.$$

Т.к. $p+1>2$, то последний интеграл сходится и для $\sum_l v_{ml}$ получаем оценку

$$\sum_l v_{ml}\leqslant B_p\frac{2^{m(\tau+\varepsilon-p)}}{(1-r+r2^{-m-1})^p}. \tag{10}$$

Разобьем $\sum_l\sum_m v_{ml}$ на два слагаемых

$$\sum_{m=1}^{m_0}\left(\sum_{l=0}^{2^m}v_{ml}\right)+\sum_{m=m_0+1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{2^m}v_{ml}\right),$$

де $1-2^{-m_0}\leqslant r<1-2^{-m_0-1}$,

$$\sum_{m=1+m_0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{2^m}v_{ml}\right)\leqslant\frac{(1-r)^{-\bar\tau-\varepsilon+p}}{2^{\tau+\varepsilon-p}-1}(1-r)^{-p}, \tag{10$_1$}$$

$$\sum_{m=1}^{m_0}\left(\sum_{l=0}^{2^m}v_{ml}\right)\leqslant\sum_{m=1}^{m_0}2^{m\bar\tau+p}\leqslant\frac{(1-r)^{-\bar\tau}2^p}{2^\tau-1}. \tag{10$_2$}$$

Подставляя (10_1), (10_2) в (9), получаем

$$\ln|\Phi(z)|\leqslant(1-r)^{-\bar{\tau}-\varepsilon}.$$

Таким образом, нами доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Порядок канонического произведения $\Phi(z)$ не превосходит порядка $\bar{\tau}$ функции $\bar{n}(r)$, или, что то же самое, порядка $\hat{\tau}$ функции $\hat{n}(r)$.*

Из лемм 1 и 2 непосредственно следует теорема.

Теорема 1. *Порядок канонического произведения $\Phi(z)$ совпадает с порядком функции $\hat{n}(r)$, или, что то же самое, с порядком функции $\bar{n}(r)$.*

Цудзи [6] принадлежит следующая лемма об оценке канонического произведения снизу.

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ имеет конечный показатель сходимости ν, тогда вне кружков $C_{i_k}^{\tau}$* (определение см. § 1) *при $\frac{1}{2}<|z|<1$, верна следующая оценка:*

$$\ln^+\left|\frac{1}{\Phi(z)}\right|\leqslant\text{const}\cdot\log\frac{1}{1-|z|}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-|\lambda_k|^2}{|1-z\bar{\lambda}_k|}\right)^{p+1}.$$

Оценка Σ произведена в лемме 2. Таким образом, из леммы 3 получаем:

$$\ln^+\left|\frac{1}{\Phi(z)}\right|\leqslant C_p(1-|z|)^{-\bar{\tau}-\varepsilon}. \tag{10}$$

§ 3. Интерполирование функций, голоморфных в единичном круге

1. Как известно, (см., например, [5], стр. 324), существует бесконечно много функций, голоморфных в круге $|z|<1$, которые в заданных точках $\{\lambda_k\}$, $\lim|\lambda_k|=1-0$ принимают заданные значения $\{a_k\}$. Такие функции мы будем называть интерполирующими. Из теоремы 1 следует, что если $\bar{n}(r)$ имеет порядок $\bar{\tau}$, то не для всякой последовательности $\{a_k\}$ существует интерполирующая функция из класса $[\rho,\infty]$ при $\rho<\bar{\tau}$. Поэтому в дальнейшем мы будем все время предполагать, что выполнено следующее условие:

$$\bar{\tau}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln\bar{n}(r)}{-\ln(1-|\lambda_k|)}\leqslant\rho \tag{A}$$

(здесь λ_k — произвольная точка из $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющая условию $2r-1<|\lambda_k|<r$).

Для того, чтобы сформулировать основные результаты этого параграфа введем некоторые обозначения. Обозначим через

$$\mu_1^{(n)}(\mu_1^{(n)}=\lambda_n),\ \mu_2^{(n)},\ \ldots\ \mu_{q_n}^{(n)}$$

те точки из $\{\lambda_k\}$, которые лежат в круге

$$|z-\lambda_n|<\delta(1-|\lambda_n|),$$

$\delta>0$ — фиксированное число; через

$$b_1^{(n)},\ b_2^{(n)},\ \ldots\ b_{q_n}^{(n)}$$

соответственно, $\exp[i\arg\mu_j^{(n)}]$, а через

$$\alpha_1^{(n)},\ \alpha_2^{(n)},\ \ldots\ \alpha_{q_n}^{(n)}$$

те числа из $\{a_k\}$, которые соответствуют указанным точкам $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_{q_n}^{(n)}$ в силу соответствия $\lambda_k \to a_k$. Введем величины

$$A_m^{(n)} = (\mu_1^{(n)} - b_1^{(n)}) \ldots (\mu_{m-1}^{(n)} - b_{m-1}^{(n)}) \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_p^{(n)}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{m} (\mu_j^{(n)} - \mu_p^{(n)})}$$

и обозначим через β_n наибольший из их модулей.

Теорема 2. *Для того, чтобы при выполнении условия* (A) *в классе* $[\rho, \infty]$ *имелась хотя бы одна интерполирующая функция* $\omega(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (B):

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln \ln \beta_n}{-\ln (1 - |\lambda_n|)} \leqslant \rho. \tag{B}$$

1. Докажем сперва необходимость условия (B). Для этого предположим, что числа $\{a_k\}$ являются значениями в точках $\{\lambda_k\}$ функции $\omega(z) \in [\rho, \infty]$. Мы имеем

$$(\lambda_m - b_m) A_m^{(n)} = \frac{(-1)^m}{2\pi i} \int\limits_{|t - \lambda_n| = \delta_1 (1 - |\lambda_n|)} \frac{\omega(t)\, dt}{\prod\limits_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j - t}{\lambda_j - b_j}},$$

где $\delta_1 > \delta$, а δ есть число, которое входит в определение β_n. Так как

$$|t - \lambda_n| = \delta_1 (1 - |\lambda_n|), \quad |\mu_j^{(n)} - \lambda_n| < \delta (1 - |\lambda_n|),$$

то

$$\left| \frac{\lambda_j - t}{\lambda_j - b_j} \right| \geqslant \frac{|t - \lambda_n| - |\mu_j^{(n)} - \lambda_n|}{(1 + \delta)(1 - |\lambda_n|)} = \frac{\delta_1 - \delta}{1 + \delta} = a$$

(интересен, очевидно, случай $a < 1$), в силу чего

$$|A_m^{(n)}| \leqslant \delta_1 \left(\frac{1 - |\lambda_n|}{1 - |\lambda_m|} \right) a^{-q_n} \max_{|t - \lambda_n| = \delta_1 (1 - |\lambda_n|)} |\omega(z)| =$$

$$= a^{-q_n} \exp [(1 - |\lambda_n|)^{-\rho - \varepsilon}].$$

Из условия (A) находим, что

$$q_n \leqslant (1 + \delta)^{\rho + \varepsilon} (1 - |\lambda_n|)^{-\rho - \varepsilon} = (1 - |\lambda_n|)^{-\rho - \varepsilon}.$$

Поэтому из предыдущего неравенства получаем

$$|A_m^{(n)}| \leqslant \exp [(1 - |\lambda_n|)^{-\rho - \varepsilon}].$$

2. Докажем теперь, что условие (B) является достаточным. С этой целью допустим, что оно выполняется и докажем, что в классе $[\rho, \infty]$ имеется функция $\omega(z)$, принимающая в точках $\{\lambda_k\}$ значения $\{a_k\}$.

Для этого возьмем интерполирующий многочлен

$$Q_n(z) = \alpha_1^{(n)} + \sum_{k=2}^{q_n} A_k \left(1 - \frac{z - b_1^{(n)}}{\mu_1^{(n)} - b_1^{(n)}}\right) \ldots \left(1 - \frac{z - b_{k-1}^{(n)}}{\mu_{k-1}^{(n)} - b_{k-1}^{(n)}}\right),$$

принимающий в точках $\mu_j^{(n)}$ значения $\alpha_j^{(n)}$, где $j = 1, 2, \ldots q_n$, и оценим его по модулю в круге $|z - \lambda_n| < \delta (1 - |\lambda_n|)$. Так как для z из этого круга

$$\left| \frac{\mu_j^{(n)} - z}{\mu_j^{(n)} - b_j^{(n)}} \right| \leqslant \frac{2\delta}{1 - \delta},$$

и так как по условию (A) $q_n \leqslant (1-|\lambda_n|)^{-\rho-\varepsilon}$, то в силу условия (B) будем иметь

$$Q_n(z) \leqslant (2\delta)^{q_n'} q_n \exp[(1-|\lambda_n|)^{-\rho-\varepsilon}] \leqslant \exp[(1-|\lambda_n|)^{-\rho-\varepsilon}]. \tag{11}$$

3. Рассмотрим какую-либо функцию из класса $[\rho, \infty]$, имеющую в точках $\{\lambda_k\}$ простые нули, например функцию

$$\Phi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{z-\lambda_k}{1-z\bar{\lambda}_k}\right) \bar{\lambda}_k \exp \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \left(\frac{1-|\lambda_k|^2}{1-z\bar{\lambda}_k}\right)^n\right].$$

По лемме 3 § 2 вне „облаков“ H_i

$$\ln^+ \left|\frac{1}{\Phi(z)}\right| \leqslant (1-|z|)^{-\rho-\varepsilon}, \tag{10}$$

или

$$|\Phi(z)| \geqslant \exp[-(1-|z|)^{-\rho-\varepsilon}].$$

Согласно предположениям 6,7 § 1 все облака можно покрыть „воротничками“ D_m, границы которых не пересекают ни одного облака H_i, и диаметр которых не превосходит $\delta_1(1-|\lambda_j^{(m)}|)$, где $\lambda_j^{(m)}$ — наименьший по модулю корень $\Phi(z)$, лежащий в „воротничке“ D_m.

4. Пусть $\lambda_{n_m} \in D_m$. Положим $\nu_m = \lambda_{n_m}$,

$$P_m(z) = \sum_p \frac{\alpha_p}{\Phi'(\lambda_p)} \left(\frac{\lambda_p - b_m}{z-b_m}\right)^{s_m} \frac{1}{z-\lambda_p}$$

$\left(\text{здесь } s_m = [\alpha(1-|\nu_m|)^{-\rho-\varepsilon}],\ \alpha > 0\right)$,

где сумма распространена по всем λ_p, лежащим в „воротничке“ D_m. Функцию $\omega(z)$ будем искать в виде

$$\omega(z) = \Phi(z) \sum_{m=1}^{\infty} P_m(z).$$

Пусть C_m — граница D_m. Тогда имеем

$$P_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{Q_{n_m}(t)}{\Phi(t)} \left(\frac{t-b_m}{z-b_m}\right)^{s_m} \frac{dt}{t-z},$$

откуда в силу неравенств (10), (11), на C_m получаем при $|z-\nu_m| > \delta(1-|\nu_m|)^h$ оценку

$$|P_m(z)| \leqslant \exp[(1-|\nu_m|)^{-\rho-\varepsilon}] \cdot \delta_1(1-|\nu_m|)^{-h} \left[\frac{\beta(1-|\nu_m|)}{|b_p-z|}\right]^{\rho_m} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\frac{\beta_1(1-|\nu_m|)}{|b_p-z|}\right]^{(1-|\nu_m|)^{-\rho-\varepsilon}}. \tag{12}$$

Пусть теперь $N = N(r)$ — наименьшее целое число такое, что

$$2\beta(1-|\nu_N|) < (1-r), \qquad r = |z|.$$

В силу неравенства (12), находим $\left(\text{учитывая на основании A, что } m \leqslant \leqslant \gamma(1-|\nu_m|)^{-\rho-\varepsilon}\right)$

$$\left|\sum_{m=N}^{\infty} P_m(z)\right| \leqslant \sum_{M=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m < 1.$$

В результате получаем

$$\left| F(z) \sum_{m=N}^{\infty} P_m(z) \right| < |F(z)|. \tag{13}$$

Оценим теперь

$$\sum_{m=1}^{N-1} F(z) P_m(z).$$

Если $|z-\nu_m| > \delta(1-|\nu_m|)$, то в силу (12) получаем

$$|F(z) P_m(z)| \leqslant \left[\frac{\beta(1-|\nu_m|)}{|b_m-z|}\right]^{(1-|\nu_m|)^{-\rho-\varepsilon}} e^{(1-|z|)^{-\rho-\varepsilon}}. \tag{14}$$

Так как $F(z)\,P_m(z)$ – аналитическая функция при $|z|<1$, то такая оценка имеет место и внутри круга $|z-\nu_m| \leqslant \delta(1-|\nu_m|)$, то есть можно считать, что неравенство (14) имеет место всюду. Теперь заметим, что

$$\left[\frac{\beta(1-|\nu_m|)}{|b_m-z|}\right]^{(1-|\nu_m|)^{-\rho-\varepsilon}} \leqslant e^{|b_m-z|^{-\rho-\varepsilon}}$$

(в этом убеждаемся непосредственно находя максимум функции $f(x)= \left(\frac{\beta x}{|b_m-z|}\right)^{x^{-\rho}}$).

На основании этого

$$|P_m(z)| \leqslant \exp\left[|b_m-z|^{-\rho-\varepsilon}\right].$$

Для оценки

$$\sum_{m=1}^{N-1} P_m(z)$$

разобьем круг $|\nu_m| < 1-\frac{1-r}{2\beta}$ „окружностями U“ на кольца и оценим число колец, которое обозначим M. Так как, в силу предложения 1 порядки $\hat{n}(r)$ и $\bar{n}(r)$ совпадают, то M не превосходит $(1-r)^{-\rho-\varepsilon}$. Будем теперь оценивать $\Sigma' P_m(z)$, где Σ' означает, что суммирование распространено по тем ν_m, которые лежат в одном кольце. Так как $|b_m-z| = (1-2r\cos(\Theta-\Theta_m)+r^2)^{\frac{1}{2}}$, где $\Theta_m = \arg \nu_m$, то

$$\left|\sum{}' P_m(z)\right| \leqslant \sum{}' \exp\left\{[1-2r\cos(\Theta-\Theta_m)+r^2]^{-\frac{\rho+\varepsilon}{2}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-r}\int_0^{2\pi} \exp\left\{[1-2r\cos\varphi+r^2]^{-\frac{\rho+\varepsilon}{2}}\right\} d\varphi \leqslant 2\pi \exp\left\{(1-r)^{-\rho-\varepsilon}\right\}$$

и

$$\left|\sum_{m=1}^{M} \sum{}' P_m(z)\right| \leqslant M \left|\sum{}' P_m(z)\right| \leqslant \exp\left\{(1-r)^{-\rho-\varepsilon}\right\}.$$

Таким образом

$$\left|\sum_{m=1}^{N-1} \Phi(z) P_m(z)\right| \leqslant \exp\left\{(1-r)^{-\rho-\varepsilon}\right\}. \tag{14}$$

Из оценок (13), (14) получаем, что

$$\left| \Phi(z) \sum_{m=1}^{\infty} P_m(z) \right| \leqslant \exp\{(1-r)^{-\rho-\varepsilon}\}. \tag{15}$$

Таким образом, доказана так же достаточность условий (A) и (B). (На самом деле мы не только доказали необходимость и достаточность условий (A) и (B), но и построили интерполирующую функцию $\omega(z) \in [\rho, \infty]$.)

Горький

Поступило в редакцию
5.IX.1968

Литература

1. А. Ф. Леонтьев, Изв. А. Н., сер. мат., **22**, № 3 (1958), 387—394.
2. Г. П. Лапин, Мат. сбор., **29** (71): 3 (1951), 565—580.
3. А. Г. Нафталевич, Лит. матем. сб., **I**, 1—2 (1961), 159—180.
4. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, ГИТТИ, 1956.
5. M. Tsuji, Jorn. Math. Soc. Jap., **8**, N 1 (1956), 7—28.

APIE HOLOMORFINĖS SKRITULYJE FUNKCIJOS REIKŠMES

A. GOMBERGAS

(Reziumė)

Sakykime, duota vienetinio skritulio taškų seka $\{\lambda_n\}$, $\lim|\lambda_n|=1$, ir bet kuri kompleksinių skaičių seka $\{a_n\}$. Kaip žinoma, egzistuoja holomorfinės vienetiniame skritulyje funkcijos, kurios taškuose λ_n įgyja reikšmes a_n.

Darbe nagrinėjamas tokių funkcijų augimas.

Panašų klausimą sveikų funkcijų atveju nagrinėjo A. Leontjevas.

ÜBER DIE WERTE EINER IM KREISE HOLOMORPHEN FUNKTION

A. GOMBERG

(Zusammenfassung)

Es sei $\{\lambda_n\}$, $\lim|\lambda_n|=1$ eine sich im Kreise befindende Punktmenge und $\{a_n\}$ eine beliebige koplexe Zahlenfolge. Wie bekannt, gibt es holomorphe im Einheitskreise Funktionen, welche in den Punkten λ_n die Werte a_n annehmen.

In der Arbeit wird das Wachsen solcher Funktionen untersucht.

Dieselbe Frage wurde im Falle der ganzen Funktionen von A. F. Leontjew behandelt.