

УДК—519.21

К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ ЭПИДЕМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Л. Н. Большев, Ю. И. Крупис

Введение

В некоторых медицинских и биологических задачах приходится оценивать параметры и функции, которые не поддаются прямому экспериментальному измерению. Обычно это удается при помощи математической модели, отражающей основные черты исследуемого процесса. В этой модели такие параметры и функции выражаются через другие характеристики, которые уже могут быть получены экспериментальным путем. Довольно часто задачи этого типа по форме схожи с задачами теории массового обслуживания, и при построении соответствующей модели удается использовать имеющийся в этой области опыт. Естественно, соответствующие математические модели из-за своей специфики могут весьма существенно отличаться от аналогичных моделей теории массового обслуживания.

В настоящей работе предпринимается попытка построения математической модели процессов, которые в медицинской литературе называют процессами заражения и заболеваемости. Вводимые в дальнейшем ограничения в значительной степени вызваны известными свойствами вирусных инфекций.

Дальнейшее изложение ведется применительно к процессу заражения и заболеваемости клещевым энцефалитом. Однако при соответствующих изменениях излагаемая математическая модель оказывается пригодной и в случае других эпидемических процессов.

Приведем основные факты, установленные эпидемиологией клещевого энцефалита. Основными переносчиками вируса клещевого энцефалита являются клещи. В результате присасывания вирусофорного клеща к данному индивидууму в крови последнего появляются специфические антитела, наличие которых может быть обнаружено экспериментально. После первого заражения циркуляция антител длится более короткое время, чем после повторных. При заражении вирусом индивидуум может в некоторых случаях заболеть, причем при повторных заражениях значительно реже, чем после первичного. После заболевания индивидуума клещевым энцефалитом, антитела обнаруживаются практически в течение всей дальнейшей жизни, и повторные заболевания невозможны. Среди незаболевших также имеется некоторая доля индивидуумов, у которых наблюдается пожизненная циркуляция антител. Эта доля резко возрастает при искусственной вакцинации. В результате вакцинации, как и в результате присасывания вирусофорного клеща, образуются антитела. Различие состоит в том, что вакцинация не может вызвать болезнь.

§1. Построение модели

Основные черты описываемого процесса могут быть сформулированы используя терминологию теории массового обслуживания следующим образом.

Пусть имеется линия (индивидуум), на которую поступает пуассоновский поток вызовов (заражений) с интенсивностью $\lambda(t)$ в момент t ($0 \leq t \leq T$). Пусть, далее, история обслуживания вызовов (история иммунитета с учетом возможности повторных заражений) описывается следующим образом.

1. Продолжительность обслуживания первого вызова (продолжительность иммунитета после первого заражения) равна T_1 ; все последующие вызовы обслуживаются время T_2 (продолжительность иммунитета после любого повторного заражения равна T_2).

2. Если в момент обслуживания поступает новый вызов (т.е. вирус воздействует на иммунного индивидуума), то обслуживание предшествующего вызова прекращается и одновременно начинается обслуживание нового вызова, которое длится время T_2 , если за это время не возникнут новые вызовы (заражение иммунного индивидуума приводит к увеличению реально наблюдаемой длительности иммунитета).

3. Наряду с упомянутым потоком, на линию поступает специальный пуассоновский поток вызовов с интенсивностью $\lambda_1(t)$ в момент t ($0 \leq t \leq T$) (приводит к искусственной вакцинации).

4. В момент поступления любого вызова линия может выйти из строя двумя различными способами (индивидуум может приобрести абсолютный иммунитет с заболеванием и без заболевания; абсолютный иммунитет распространяется на всю дальнейшую жизнь индивидуума). При этом:

а) при поступлении первого вызова вероятность линии выйти из строя 1-ым и 2-ым способом равна a и 0 соответственно;

б) при поступлении любого повторного вызова вероятность выйти из строя 1-ым и 2-ым способом равна b_1 и b_2 соответственно;

в) в моменты поступления специальных вызовов (см. пункт 3) линия может выйти из строя только 2-ым способом (с вероятностью a , если ранее вызовов не было, и вероятностью $b_1 + b_2$, если ранее вызовы были).

5. Вышедшая из строя линия не восстанавливается.

Пусть

$P_1(t)$ — вероятность того, что в момент t линия не занята и вызовы еще не поступали (иммунитета нет; заражений не было);

$P_2(t)$ — вероятность того, что в момент t линия не занята, но вызовы уже были (иммунитета нет, но заражения ранее были);

$p_1(x; t) dx$ — вероятность того, что в момент t обслуживается первый вызов, который поступил в момент y ($x < y < x + dx$; $0 \leq t - y < T_1$) (иммунитет появился после первичного заражения и сохраняется время $t - y$);

$p_2(x, t) dx$ — вероятность того, что в момент t обслуживается вызов, поступивший в момент y ($x < y < x + dx$; $0 \leq t - y < T_2$), причем вызов поступил не впервые (иммунитет появился после повторного заражения и сохраняется время $t - y$);

- $Q_1(t)$ — вероятность того, что линия вышла из строя 1-ым способом до момента t (к моменту t индивидуум имеет абсолютный иммунитет вследствие заболевания);
- $Q_2(t)$ — вероятность того, что линия вышла из строя 2-ым способом до момента t (к моменту t индивидуум приобрел абсолютный иммунитет без заболевания).

Тогда для определения перечисленных вероятностей можно составить систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} P_1'(t) &= -\lambda_2(t) P_1(t), \\ P_2'(t) &= -\lambda_2(t) P_2(t) + p_1(t - T_1, t) + p_2(t - T_2, t), \\ Q_1'(t) &= a \lambda(t) P_1(t) + b_1 \lambda(t) [1 - P_1(t) - Q(t)], \\ Q_2'(t) &= a \lambda_1(t) P_1(t) + [b_1 \lambda_1(t) + b_2 \lambda_2(t)] [1 - P_1(t) - Q(t)], \\ \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} &= -\lambda_2(t) p_1(x, t), \\ \frac{\partial p_2(x, t)}{\partial t} &= -\lambda_2(t) p_2(x, t) \end{aligned} \right\} (1)$$

с начальными и краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} P_1(0) &= 1, \quad P_2'(0) = Q_1(0) = Q_2(0) = 0; \\ p_1(x, t) &= 0 \quad \text{при} \quad x \in (t - T_i, t), \quad i = 1, 2; \\ p_1(t, t) &= (1 - a) P_1(t) \lambda_2(t), \\ p_2(t, t) &= (1 - b) \lambda_2(t) [1 - P_1(t) - Q(t)], \end{aligned} \right\} (2)$$

где

$$Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t), \quad b = b_1 + b_2, \quad \lambda_2(t) = \lambda(t) + \lambda_1(t).$$

Решая систему (1) и учитывая (2), при всех $0 \leq t \leq T$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} P_1(t) &= e^{-g(t)}, \\ P_2(t) &= (1 - a) \left\{ g(t - T_1) - g(t - T_2) + \frac{e^{-(1-b)g(t-T_2)} - 1}{1-b} \right\} e^{-g(t)}, \\ Q(t) &= 1 - \frac{1-a}{1-b} e^{-bg(t)} - \frac{a-b}{1-b} e^{-g(t)}, \\ Q_1(t) &= \left[a - \frac{b_1(1-a)}{1-b} \right] I_1(t) + \frac{b_1(1-a)}{b(1-b)} I_2(t), \end{aligned} \right\} (3)$$

где

$$g(t) = \int_0^t \lambda_2(y) dy, \quad I_1(t) = \int_0^t \lambda(x) e^{-g(x)} dx,$$

$$I_2(t) = \int_0^t \lambda(x) e^{-bg(x)} dx.$$

§2. Оценка параметров

Условимся рассматривать лишь те случаи, когда клещи являются единственными источниками заражения ($\lambda_1(t) \equiv 0$).

Пусть $R(t)$ – вероятность наличия антител у индивидуума в возрасте t лет (в медицинской литературе $R(t)$ называют иммунной прослойкой), тогда, учитывая (3), при всех $0 \leq t \leq T$ имеем

$$R(t) = 1 - P_1(t) - P_2(t) = 1 - (1-a)e^{-g(t)} \left\{ g(t-T_1) - g(t-T_2) + \frac{e^{(1-b)g(t-T_1)}}{1-b} + \frac{a-b}{(1-a)(1-b)} \right\}. \quad (4)$$

Вероятность $U(\tau_1, \tau_2)$ ($\tau_2 > \tau_1$) заболевания индивидуума в возрасте от τ_1 до τ_2 лет выражается формулой

$$U(\tau_1, \tau_2) = Q_1(\tau_2) - Q_1(\tau_1). \quad (5)$$

Подставляя в (3) $\lambda_1(t) \equiv 0$ ($0 \leq t \leq T$), получаем

$$Q_1(t) = \left[a - \frac{b_1(1-a)}{1-b} \right] [1 - e^{-g(t)}] + \frac{b_1(1-a)}{b(1-b)} [1 - e^{-bg(t)}].$$

Экспериментальные данные. По нескольким зонам Западной Сибири, различным по ландшафту и географическим условиям, сотрудниками Института полиомиелита и вирусных энцефалитов АМН СССР были собраны следующие статистические данные по группам населения в возрасте $t=1, 2, \dots, 60$ лет (будем считать, что индивидуум имеет t лет, если его возраст τ содержится в полуинтервале $t \leq \tau < t+1$, t – целое число):

а) $\mu_1(t)$ – количество индивидуумов в возрасте t лет, подвергшихся присасыванию клещей в течение года (из $m_1(t)$ опрошенных);

б) $\mu(t)$ – количество индивидуумов в возрасте t лет, у которых была обнаружена циркуляция антител (из $m(t)$ обследованных). Для выявления наличия антител применялась реакция подавления гемагглютинации (РПГА);

в) $\nu(t)$ – количество заболевших индивидуумов в возрасте t лет (из $n(t)$ наблюдавшихся).

Задача заключается в оценке параметров T_1, T_2, a, b_1, b_2 и неизвестной интенсивности заражения $\lambda(t)$ по данным наблюдения.

1°. Предположим, что интенсивность заражения $\lambda(t)$ пропорциональна интенсивности присасывания клещей $\Lambda(t)$:

$$\lambda(t) = k\Lambda(t),$$

где коэффициент пропорциональности k (вирусофорность клещей) не зависит от t и представляет собой отношение числа клещей – носителей вируса к общему количеству клещей. Функцию $\Lambda(t)$ можно оценить по данным пункта а) с достаточной точностью, так как экспериментальных данных такого типа имеется много (их получение намного проще, чем получение остальных данных). Поэтому в дальнейшем будем считать $\Lambda(t)$ заданной (во всяком случае дисперсия статистической оценки $\Lambda(t)$ намного меньше дисперсий всех остальных оценок).

2°. $\mu(t)$ имеет биномиальное распределение с вероятностью положительного исхода $R(t)$. Поэтому $\bar{R}(t) = \mu(t)/m(t)$ — эффективная оценка для $R(t)$. Оценки неизвестных параметров k , T_1 , T_2 , a , b можно получить по методу „минимума χ^2 “:

$$\chi_1^2 = \sum_t \frac{[\mu(t) - R(t)m(t)]^2}{m(t)R(t)[1 - R(t)]} = \min,$$

где

$$R(t) = R(t; k, T_1, T_2, a, b).$$

По данным заболеваемости априори известно, что значения параметров a и b намного меньше остальных (порядка сотых и тысячных), поэтому по сравнительно малочисленным данным наблюдения пункта б) получить для них хорошие оценки практически невозможно. В этих условиях для оценки k , T_1 и T_2 в качестве первого приближения можно положить в (4) $a = b = 0$. Оценки параметров k , T_1 и T_2 при этом предположении изменятся незначительно. Получены следующие оценки: $\hat{k} = 0.68$, $\hat{T}_1 = 5.2$, $\hat{T}_2 = 10.6$. Величина χ_1^2 при этих значениях параметров приняла значение 21.7 (соответствующие 90-процентные критические значения хи-квадрат с 19 степенями свободы суть 10.12 и 30.14).

3°. Случайные величины $v(t)$ также распределены по биномиальному закону с вероятностью положительного исхода $V(t)$. Считая, что k , T_1 и T_2 уже известны, оценки остальных параметров получим из условия

$$\chi_2^2 = \sum_t \frac{[v(t) - V(t)n(t)]^2}{n(t)V(t)[1 - V(t)]} = \min,$$

где вероятность $V(t) = V(t; a, b_1, b_2) = U(t, t+1)$ определена формулой (5).

Получены следующие оценки параметров: $\hat{a} = 0.015$, $\hat{b}_1 = 0.008$, $\hat{b}_2 = 0.037$. Случайная величина χ_2^2 при этих значениях параметров приняла значение 24.46 (соответствующие 90-процентные критические значения хи-квадрат с 21 степенью свободы суть 11.59 и 32.67).

Для иллюстрации в первой половине таблицы 1 приведены значения $\mu(t)$, $m(t)$ (для сокращения объема таблицы данные сгруппированы по интервалам $[t-2, t+2]$, соответствующие значения $\bar{R}(t)$ и значения $R(t)$, сосчитанные по формуле (3) (вместо неизвестных параметров подставлены полученные оценки). Во второй половине таблицы даны значения $v(t)$, $n(t)$ сгруппированные по интервалам $[t-5, t)$ (в последних двух строках группировка произведена по интервалам [30, 40), [40, 50)), значения $V(t) = v(t)/n(t)$ и соответствующие значения $U(t, t-5)/5$ определены по формуле (5) (вместо неизвестных параметров подставлены их оценки).

Все приведенные данные относятся к одной ландшафтной зоне (южная тайга). Результаты вычислений по другим ландшафтным зонам можно найти в работе [1].

Обсуждение. 1. Параметры T_1 и T_2 имеют следующий смысл: T_1 (T_2) — продолжительность циркуляции антител у индивидуума, который подвергся первичному (повторному) заражению вирусом, если последующие заражения исключены. С первого взгляда допущение о том, что время циркуляции ан-

Таблица 1

t	$m(t)$	$\mu(t)$	$\bar{R}(t)$	$R(t)$	$v(t)$	$n(t)$	$10^3 \cdot \bar{V}(t)$	$10^3 \cdot V(t)$
5	122	19	.1557	.1444	24	35397	.0678	.0446
10	154	83	.5390	.5922	98	34613	.2831	.2176
15	64	52	.8125	.7451	57	25054	.2275	.2120
20	58	49	.8448	.8254	24	15761	.1523	.1581
25	69	60	.8696	.8323	20	16748	.1194	.1276
30	72	63	.8750	.8341	26	18876	.1377	.1281
35	41	31	.7561	.9068				
40	48	43	.8958	.9399	57	35946	.1586	.1735
45	42	40	.9524	.9162				
50	50	44	.8800	.8903	30	24909	.1204	.1212
55	32	28	.8750	.8903				
60	21	21	1.0000	.8903				

тител является постоянным, может показаться довольно искусственным. Однако заражение индивидуума вирусом клещевого энцефалита возможно только во время сезона активности клещей (2–3 месяца в год), поэтому достаточно знать время циркуляции антител с точностью до одного года. Значит, если T_1 и T_2 являются даже случайными величинами с малой дисперсией, то для практических целей можно считать их постоянными. Имеющиеся данные не противоречат такому допущению (квадратичные отклонения оценок \hat{T}_1 и \hat{T}_2 , полученные по сравнительно небольшому числу данных, не превышают 1.5 года). Отметим еще, что по своему смыслу параметры T_1 и T_2 не должны зависеть от ландшафта. Имеющиеся данные подтверждают это (оценки для параметров T_1 и T_2 , сосчитанные по разным зонам, отличаются незначительно). Может возникнуть вопрос, нельзя ли считать $T_1 = T_2$. Однако уже по данным табл. 1 гипотеза $T_1 = T_2$ против альтернативы $T_2 > T_1$ отвергается критерием с уровнем значимости $P = 0.00004$.

2. Функция $R(t)$ слабо зависит от параметров a и b , а величины T_1 и T_2 можно считать постоянными во всех зонах, поэтому $R(t)$ практически зависит лишь от одного параметра k . Учитывая это обстоятельство, параметры T_1 и T_2 оценивались по одной зоне (южная тайга), а параметр k для каждой зоны в отдельности. При этом случайные величины X_i^2 для остальных зон приняли значения: 47.2, 9.1, 13.6 и 15.3 (они распределены приблизительно как хи-квадрат с 54, 13, 17 и 12 степенями свободы соответственно). Кроме того, по зоне „южная тайга“ имелись данные иммунологического обследования индивидуумов, прибывших в эту зону в возрасте t лет ($t \geq 8$). Полученные частоты $\mu(t)/m(t)$ сравнивались со значениями иммунной прослойки $R(t)$, определенными по

уже имеющимся оценкам параметров. Во всех упомянутых случаях согласие с экспериментальными данными оказалось достаточно хорошим, и в этом смысле можно утверждать, что принятая модель правильно отражает основные черты исследуемого процесса.

3. Во всех зонах наблюдается спад интенсивностей $\lambda(t)$ (см. [1]) в интервале $15 \leq t \leq 30$. Этот факт привлек внимание специалистов, но исчерпывающего объяснения ему пока не дано.

4. Оценки для вирусозоносности клещей оказались в пределах 30%–80% (см. [1]). Результаты вирусологических методов определения зараженности клещей никогда не превышали 10%. Это свидетельствует либо о недостаточной чувствительности методов индикации вируса в клещах, либо о существовании сильных побочных неклещевых источников заражения вирусом (для таежных зон такое допущение специалистам представляется маловероятным), либо, наконец, о существовании, кроме присасывания, каких-то других путей передачи вируса от клещей.

5. Обращает на себя внимание тот факт, что наличие антител еще не означает полной невосприимчивости к заболеванию. Допущение о том, что болеют только те индивидуумы, у которых в момент заражения антител нет, не соответствует экспериментальным данным и отвергается критерием с высоким уровнем значимости. В практике не раз отмечались заболевания у тех индивидуумов, у которых непосредственно перед заражением обнаруживались антитела.

Возможно, что РПГА выявляет некий тип антител, не определяющих в полной мере уровень невосприимчивости к инфекции, особенно в случаях обнаружения небольшой концентрации антител. Высокая концентрация антител, по-видимому, соответствует иммунитету. В этом случае вероятность приобретения абсолютного иммунитета b_2 — это вероятность приобретения антител высокой концентрации.

Допущению о том, что вероятность заболевания в интервале (τ_1, τ_2) выражается формулой (5) и что параметры a , b_1 и b_2 постоянны во всех зонах, экспериментальные данные не противоречат ($\chi^2_2 = 24.56$; см. также [3]).

6. Статистических данных, полученных с учетом вакцинации, не имеется. Поэтому проверить, является ли построенная математическая модель пригодной в этом случае, не представляется возможным. Отметим только, что если интенсивность вакцинации

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} c, & \text{при } 0 < t \leq t_0, \\ 0, & \text{при } t > t_0, \end{cases}$$

то выражения для $Q(t)$ и $Q_1(t)$ при $t = t_0$ принимают следующий вид:

$$Q(t_0) = 1 - \frac{1-a}{1-b} e^{-cbt_0 - bg(t_0)} + \frac{a-b}{1-b} e^{-ct_0 - bg(t_0)},$$

$$Q_1(t_0) = \left[a - \frac{b_1(1-a)}{1-b} \right] e^{-ct_0} [1 - e^{-g(t_0)}] +$$

$$+ \frac{b_1(1-a)}{b(1-b)} e^{-cbt_0} [1 - e^{-bg(t_0)}],$$

где

$$g(t) = \int_0^t \lambda(x) dx.$$

По этим формулам можно выбрать c и t_0 таким образом, чтобы

$$Q(t_0) \approx 1, \quad Q_1(t_0) \approx 0.$$

В задачах такого рода важной характеристикой является распределение времени циркуляции антител у индивидуума в очаге заражения. Это особенно важно, если циркуляция антител соответствует иммунитету. Поэтому в следующем параграфе приведены условия, при выполнении которых время циркуляции антител приближенно имеет показательное распределение вероятностей.

§ 3. Распределение времени занятости

Пусть имеется линия, на которую поступает поток вызовов, причем первый вызов поступает в момент $t=0$. Если в момент поступления вызова линия свободна, то в тот же момент начинается его обслуживание; если же линия занята, то обслуживание предыдущего вызова прекращается и одновременно начинается обслуживание вновь поступившего вызова. Обозначим ξ_i время между $(i+1)$ и $(i+2)$ поступлением и η_i — время обслуживания $(i+1)$ -го вызова.

Пусть ξ_i, η_i ($i=0, 1, 2, \dots$) — взаимно независимые неотрицательные случайные величины, и

$$P\{\xi_i < x\} = F_\alpha(x), \quad P\{\eta_i < x\} = G_\alpha(x) \quad (i=0, 1, 2, \dots),$$

где α — некоторый параметр.

Время занятости S_v можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} S_0 &= \eta_0, \\ S_v &= \xi_0 + \dots + \xi_{v-1} + \eta_v \quad (v=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

где

$$v = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_0 > \eta_0 \\ n \ (n=1, 2, \dots), & \text{если } \xi_0 \leq \eta_0, \dots, \xi_{n-1} \leq \eta_{n-1}, \xi_n > \eta_n. \end{cases}$$

Теорема 1. Для того, чтобы при $\alpha \rightarrow 0$

$$P\left\{ \frac{S_v}{M S_v} \geq x \right\} \rightarrow e^{-x},$$

необходимо и достаточно, чтобы при $\alpha \rightarrow 0$ и всех $s \geq 0$

$$B_\alpha(s) = \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{sx}{M S_v}} (1 - F_\alpha(x)) (1 - G_\alpha(x)) dx}{M S_v \int_0^\infty e^{-\frac{sx}{M S_v}} (1 - F_\alpha(x)) dG_\alpha(x)} \rightarrow 1.$$

Доказательство. Преобразование Лапласа для функции распределения, (ф. р.) случайной величины $\frac{S_v}{MS_v}$ задается формулой

$$\begin{aligned} f_\alpha(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} M \prod_{k=0}^{n-1} \int_0^{\eta_k} e^{-\frac{sy}{MS_v}} dF_\alpha(y) e^{-\frac{s\eta_n}{MS_v}} [1 - F_\alpha(\eta_n)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^y e^{-\frac{sx}{MS_v}} dF_\alpha(x) dG_\alpha(y) \right\}^{n-1} \times \\ &\times \int_0^{\infty} e^{-\frac{sx}{MS_v}} [1 - F_\alpha(x)] dG_\alpha(x) = \frac{1}{1 + sB_\alpha(s)}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает справедливость теоремы 1. При этом

$$MS_v = m_\alpha = \frac{\int_0^{\infty} [1 - F_\alpha(x)] [1 - G_\alpha(x)] dx}{\int_0^{\infty} [1 - F_\alpha(x)] dG_\alpha(x)}.$$

Рассмотрим другую схему, которая в некоторых задачах такого сорта может оказаться более подходящей. Пусть имеется система, состоящая из бесконечного числа линий, в которую поступает поток вызовов. Предположим, что поток пуассоновский и первый вызов поступил в момент $t=0$. В момент поступления вызова одна из свободных линий системы начинает его обслуживание. Система занята, если занята хоть одна линия. Пусть T_v — время занятости системы, где v — число вызовов, обслуженных за время T_v ; ζ — время, в течение которого система не занята. Отметим, что если время обслуживания каждого вызова постоянно, то T_v совпадает с S_v . Обозначим ξ_i время между $(i+1)$ -ым и $(i+2)$ -ым поступлением, и пусть η_i — время обслуживания $(i+1)$ -го вызова. При этом пусть ξ_i, η_i ($i=0, 1, 2, \dots$)-взаимно независимые неотрицательные случайные величины с ф.р.

$$P\{\xi_i < x\} = F_\alpha(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad P\{\eta_i < x\} = G(x) \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если $G(0) = 0$ и $M\eta_i = m < \infty$, то при $\lambda \rightarrow \infty$

$$P\left\{\frac{T_v}{M T_v} > x\right\} \rightarrow e^{-x}.$$

Доказательство. Преобразование Лапласа ф.р. случайной величины $T_v + \zeta$ выражается формулой (см. [2])

$$f(s) = 1 - \frac{1}{(\lambda + s) T(s)},$$

где

$$I(s) = \int_0^{\infty} e^{-st - \lambda \int_0^t [1-G(x)] dx} dt.$$

Непосредственно из свойств показательного распределения вытекает, что ζ имеет ф.р. $F_{\lambda}(x)$. Поэтому преобразование Лапласа $t(s)$ случайной величины T , есть

$$t(s) = \frac{\lambda + s}{\lambda} - \frac{1}{\lambda I(s)}. \quad (9)$$

Интегрируя $I(s)$ два раза по частям, получаем:

$$I(s) = \frac{1}{\lambda + s} \left[1 + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} d\lambda G(t) e^{-\lambda \int_0^t [1-G(x)] dx} \right]. \quad (10)$$

Из (9), учитывая (10), легко получить, что

$$M T_v = T = \frac{e^{\lambda m} - 1}{\lambda}.$$

Остается показать, что при $s \geq 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t\left(\frac{s}{T}\right) = \frac{1}{1+s}.$$

Имеем

$$t\left(\frac{s}{T}\right) = \frac{\lambda + \frac{s}{T}}{\lambda} \left[1 - \frac{s}{s + s J(s)} \right],$$

где, при $\lambda \rightarrow \infty$,

$$J(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \Phi(\lambda, t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dG(tT) e^{-\lambda \int_0^{tT} [1-G(x)] dx} T dt \rightarrow \frac{1}{s},$$

так как при всех $t > 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi(\lambda, t) = 1.$$

Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность Д. К. Львову и Л. Г. Гольдфарбу за обсуждение результатов.

Литература

1. Д. К. Львов, Л. Н. Большев, А. П. Рудик, Л. Г. Гольдфарб, Ю. И. Круопис, Опыт расчета интенсивности заражения клещевым энцефалитом, Медицинская паразитология и паразитарные болезни, XXXVII (1968), 274—279.
2. Л. Такач, О последовательности событий, выбранных счетчиком из рекуррентного процесса событий, Теория вероятностей и ее применения, I, 1 (1956), 90—102.
3. Ю. И. Круопис, Л. Г. Гольдфарб, Л. Н. Большев, Расчет вероятности заболевания клещевым энцефалитом для человека в возрастном интервале от t_0 до t , Материалы XV научной сессии Института полиомиелита и вирусных энцефалитов, 3 (1968), 40—41.

EPIDEMINŲ PROCESŲ MODELIAVIMO KLAUSIMU

L. Bolševas, J. Kruopis

(Reziumė)

Darbe sukonstruotas užsikrėtimo ir sergamumo erkiniu encefalitu proceso matematinis modelis. Naudojantis statistiniais duomenimis, įvertintos pagrindinės proceso charakteristikos.

ON THE MODELLING OF THE EPIDEMIC PROCESSES

L. Bolshev, J. Kruopis

(Summary)

Mathematical model of the process of being infected by and falling ill with tick encephalitis is constructed. From the statistical data the main characteristics of the process are evaluated.

