2

IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1969

УДК – 519.281

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ ОБ ОДНОРОДНОСТИ ДИСПЕРСИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. Н. Бондаренко

Положим, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ – линейно упорядоченная последовательность независимых случайных величин. Причем ξ_i распределена как $N(\mu, \sigma_k^2)$ при $i \leqslant k$ и как $N(\mu, \sigma_{n-k}^2)$ при $i > k$. Будем считать дисперсию случайной последовательности однородной, если $\sigma_k^2 = \sigma_{n-k}^2$. Таким образом, дисперсию линейно упорядоченной случайной последовательности можно признать однородной в указанном выше смысле, когда гипотеза

$$H_0 : \sigma_k^2 = \sigma_{n-k}^2 \tag{1}$$

не отклоняется для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$ при альтернативе

$$H_1 : \sigma_k^2 \neq \sigma_{n-k}^2 \tag{2}$$

хотя бы для одного $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Причем в условиях альтернативы k неизвестно. Если эмпирическая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ является последовательностью выборочных значений для $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n$, тогда при нулевом среднем оценки дисперсий σ_k^2 и σ_{n-k}^2 соответственно равны:

$$S_k^2 = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \quad \text{и} \quad S_{n-k}^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2. \tag{3}$$

Тогда случайная величина

$$\frac{(S_k^2 - S_{n-k}^2)}{\sqrt{D(S_k^2) + D(S_{n-k}^2)}} \tag{4}$$

в условиях нулевой гипотезы (1) имеет приблизительно нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией равной 1. Квадрат величины (4), следовательно, будет распределен приблизительно как χ^2 с 1 степенью свободы. На этом основании можно получить статистику для проверки нулевой гипотезы (1), принимая $\mu = 0$.

Если для всех $n-3$ разбиений случайной последовательности из n членов на две части, значения статистики

$$F_k = \frac{(n-1)^2}{2(n-2)(k-1)(n-k-1)} \cdot \left[\frac{(n-k-1) \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 - (k-1) \sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \right]^2 \tag{5}$$

не превысят допустимого значения $\chi^2_{q,1}$ для уровня значимости q и одной степени свободы, то случайную последовательность можно признать обладающей однородной в указанном выше смысле дисперсией.

Можно считать, что в условиях альтернативы максимальному различию в дисперсиях подпоследовательностей из k и $n-k$ членов отвечает максимальное значение критерия F_k.

Предложенный метод может быть обобщен на случай m независимых компонент. При этом статистика (5) будет иметь вид

$$F_k=\frac{(n-1)^2}{2(n-2)(k-1)(n-k-1)}\cdot\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{(n-k-1)\sum\limits_{i=1}^{k}x_{ji}^2-(k-1)\sum\limits_{i=k+1}^{n}x_{ji}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ji}^2}\right]^2. \quad (6)$$

В условиях нулевой гипотезы F_k представляет собой значение случайной величины, асимптотически распределенной как χ^2 с m степенями свободы.

Практическая проверка метода была осуществлена с помощью моделирования последовательности по таблицам случайных чисел. Две части этой последовательности имели заведомо различные по величине дисперсии: $\sigma_k^2=1{,}44\cdot\sigma_{n-k}^2$. Критерий обнаружил наличие в рассматриваемой последовательности двух подпоследовательностей с различными по величине дисперсиями. Максимальное значение критерия всего на один член не совпало с истинным положением границы. Учитывая небольшое расхождение в величине дисперсий, результаты применения предложенной статистики можно считать удовлетворительными.

Москва

Поступило в редакцию
19.XI.1968

Литература

1. Э. Леман, Проверка статистических гипотез, „Наука“, 1964.

HIPOTEZĖS APIE TIESIŠKAI SUTVARKYTŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SEKŲ DISPRESIJOS HOMOGENIŠKUMĄ PATIKRINIMAS

V. Bondarenka

(*Reziumė*)

Jeigu n nepriklausomų atsitiktinių dydžių sekai visiems suskirstymams į dvi dalis nulinė hipotezė $H_0 : \sigma_k^2=\sigma_{n-k}^2$ neatmetama, esant alternatyvai $H_1 : \sigma_k^2\neq\sigma_{n-k}^2$, tai šios sekos dispersija vadinama homogeniška.

Nulinės hipotezės patikrinimui galima pasiūlyti statistiką

$$F_k=\frac{(n-1)^2}{2(n-2)(k-1)(n-k-1)}\cdot\left[\frac{(n-k-1)\sum\limits_{i=1}^{k}x_i^2-(k-1)\sum\limits_{i=k+1}^{n}x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}\right]^2.$$

Esant prielaidai H_0, dydis F_k pasiskirstęs asimptotiškai kaip χ^2 su vienu laisvės laipsniu.

Rezultatas gali būti apibendrintas nepriklausomų komponenčių atvejui.

THE TESTING OF THE HYPOTHESIS OF HOMOGENEITY OF THE VARIENCE FOR LINEARLY ARRANGED RANDOM SEQUENCES

V. Bondarenko

(*Summary*)

If the testing hypothesis $H_0 : \sigma_k^2 = \sigma_{n-k}^2$ do not regect for the all variantes of dividing of the sequence of random variables into two parts by alternative $H_1 : \sigma_k^2 \neq \sigma_{n-k}^2$ the varience of the sequence would be homogenious. The test for testing of the nullhypothesis is

$$F_k = \frac{(n-1)^2}{2(n-2)(k-1)(n-k-1)} \cdot \left[\frac{(n-k-1)\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 - (k-1)\sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \right]^2 .$$

If H_0 is true, F_k is asymptoticaly χ^2 — distributed with one degree of freedom.

The result can be expanded on the case when we have m independent components.