IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969
УДК – 517.535.6

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ МЕРОМОРФНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. Тевялис

В работе рассматривается следующая задача. Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}$, $n=\pm 1, \pm 2, \ldots$, $-\pi \leqslant \operatorname{Re}\lambda_n < <\pi$, $\ldots, \leqslant \operatorname{Im}\lambda_{-2} \leqslant \operatorname{Im}\lambda_{-1} \leqslant 0 < \operatorname{Im}\lambda_1 \leqslant \operatorname{Im}\lambda_2 < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im}\lambda_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to-\infty} \operatorname{Im}\lambda_n = -\infty$, и последовательность рациональных функций от $e^{\pm iz}$

$$Q(z, \lambda_n) = \begin{cases} \sum\limits_{t=l_n}^{p_n} a_{nt}(e^{-iz} - e^{-i\lambda_n})^t, & n > 0, \\ \sum\limits_{t=l_n}^{p_n} a_{nt}(e^{iz} - e^{i\lambda_n})^t, & n \leqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

$l_n \leqslant 0$, $p_n \geqslant -1$, $l_n \leqslant p_n$.

Требуется построить периодическую с периодом 2π мероморфную функцию $f(z)$ с начальными частями $Q(z, \lambda_n)$, то есть функцию, разложение которой по степеням $e^{\pm iz} - e^{\pm i\lambda_n}$ в окрестностях точек λ_n начинается с групп членов $Q(z, \lambda_n)$.

Аналогичный вопрос для непериодических функций рассматривался А. Ф. Леонтьевом [1] и А. Нафталевичем [2], [3].

1. Предположим, что показатели сходимости последовательностей $\{\lambda_n\}$, $n>0$, и $\{\lambda_n\}$, $n \leqslant 0$, в которых каждая точка λ_n считается p_n+1 раз, являются конечными и обозначим их соответственно $\varkappa$ и $\varkappa_1$.

Используя метод, предложенный Уиттекером, разобьем последовательность $\{\lambda_n\}$, как в работе [4], на множества H_k.

Пусть h – любое действительное число больше $\max(\varkappa, \varkappa_1)$ и $c>0$ – подобранное так действительное число, что

$$c \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\operatorname{Im}\lambda_n|^{-h} < \pi$$

(существование такого h предполагает конечность показателя сходимости последовательности $\{\lambda_n\}$). Построим вокруг каждой точки λ_n, как центра, окружность радиуса $c\,|\operatorname{Im}\lambda_n|^{-h}$. Не нарушая общности рассуждений, можно предполагать окружности, построенные вокруг точек λ_n, не пересекающимися с границей основной полосы периода, т. е. прямыми $\operatorname{Re} z = \pm\pi$. Действительно, сумма диаметров окружностей, построенных вокруг точек λ_n, меньше 2π, поэтому на отрезке действительной оси $-\pi \leqslant \operatorname{Re} z < \pi$ существует по крайней мере одна такая точка d, что прямая $\operatorname{Re} z = d$ не пересекается ни с одной окружностью. Выбирая в качестве основной полосы периода полосу $d \leqslant \operatorname{Re} z < d + 2\pi$ и заменяя точки последовательности $\{\lambda_n\}$, не попавшие в нее, конгруентными (т. е. отличающимися на 2π), мы удовлетворили бы поставленному требованию.

Множества H_k построим следующим образом. Выберем какую нибудь точку λ_n и присоединим к ней все те точки, вокруг которых построенные окружности имеют хотя бы одну общую точку с окружностью построенной вокруг выбранной точки. Присоединим к этим точкам новые, если окружности, построенные вокруг них имеют хотя бы одну общую точку с окружностями, построенными вокруг уже выбранных точек и т. д.

Объединение кругов соответствующих множеству H_k назовем облаком D_k. Выбирая все новые точки λ_n, мы построим новые облака.

Каждое множество H_k содержит лишь конечное число точек λ_n.

Через Γ_k обозначим границу облака D_k и предположим, что $v_k = \max\limits_{z \in \Gamma_k} |\operatorname{Im} z|$. Множества H_k можно считать пронумерованными так, чтобы числа v_k не убывали, причем $k > 0$, если множество H_k лежит в верхней полуплоскости и $k < 0$, если множество H_k лежит в нижней полуплоскости. Точки λ_n, содержащиеся в облаках пересекающихся с действительной осью, объединим в одно множество H_0.

Пусть $K(z, \lambda)$ – каноническое произведение с $p_n + 1$ кратными нулями в точках λ_n,

$$K(z, \lambda) = \prod_{n \leqslant 0} [1 - e^{i(z-\lambda_n)}]^{p_n+1} \cdot \prod_{n > 0} [1 - e^{-i(z-\lambda_n)}]^{p_n+1}. \tag{2}$$

Канонические произведения такого вида рассматривались Мюгелем [5].

Через $R(z, \lambda_n)$ обозначим периодическую главную часть функции $\dfrac{Q(z, \lambda_n)}{K(z, \lambda)}$ в точке λ_n,

$$R(z, \lambda_n) = \begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{p_n - l_n + 1} \dfrac{A_{n,t}}{(e^{-iz} - e^{-i\lambda_n})^t}, & n > 0, \\ \sum\limits_{t=1}^{p_n - l_n + 1} \dfrac{A_{n,t}}{(e^{iz} - e^{i\lambda_n})^t}, & n \leqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть множество $H_k = \{\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}, \ldots, \lambda_{k,n_k}\}$. Сложим периодические главные части (3) соответствующие полюсам, содержащимся в H_k и обозначим полученную сумму $R_k(z)$,

$$R_k(z) = \sum_{\lambda_n \in H_k} R(z, \lambda_n).$$

Пусть $k > 0$, тогда

$$R_k(z) = \frac{P_k(z)}{(e^{-iz} - e^{-i\lambda_{k,1}})(e^{-iz} - e^{-i\lambda_{k,2}}) \ldots (e^{-iz} - e^{-i\lambda_{k,n_k}})},$$

где $P_k(z)$ – многочлен от e^{-iz} степени меньше n_k.

Многочлен $P_k(z)$ можно представить в виде

$$P_k(z)=P_{k,0}+P_{k,1}\cdot e^{-iz}+\ldots+P_{k,n_k-1}\cdot e^{-i(n_k-1)z}=$$

$$=r_{k,0}+r_{k,1}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,1}})+r_{k,2}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,1}})(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,2}})+$$

$$+\ldots+r_{k,n_k-1}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,1}})\ldots(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,n_k-1}}). \qquad (4)$$

Обозначим

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+ r_k}{\ln v_k}=\tau, \qquad (5)$$

где

$$r_k=\max_{0\leq l\leq n_k-1}|r_{k,l}|, \quad v_k=\max_{z\in\Gamma_k}\operatorname{Im} z.$$

Число τ в дальнейшем будем называть порядком коэффициентов r_k.

Аналогично определяется τ_1 — порядок коэффициентов r_k в случае $k<0$.

Пусть χ (χ_1) — порядок последовательности $\{\lambda_n\}$, $n>0$ ($n\leq 0$), где каждая точка λ_n считается p_n-l_n+1 раз. Очевидно, $\chi\geq\varkappa$ и $\chi_1\geq\varkappa_1$.

В этих обозначениях имеет место теорема.

Теорема 1. *Существует периодическая мероморфная функция $f(z)$ с начальными частями* (1) *порядка $\rho=\max(\tau,\tau_1,\chi+1,\chi_1+1)$, все полюсы которой содержатся в последовательности $\{\lambda_n\}$.*

Если $\max(\chi+1,\chi_1+1)<\max(\tau,\tau_1)$, то не существует такой функции более низкого порядка.

Доказательство. В работе [4] показано, что существует периодическая мероморфная функция $\Phi(z)$ с периодическими главными частями (3) порядка $\max(\tau,\tau_1,\chi+1,\chi_1+1)$, все полюсы которой содержатся в последовательности $\{\lambda_n\}$, но не существует периодической мероморфной функции с теми же главными частями меньшего порядка.

Очевидно функция $f(z)=\Phi(z)\cdot K(z,\lambda)$ будет периодической мероморфной функцией с начальными частями (1) и все ее полюсы будут содержаться в последовательности $\{\lambda_n\}$.

Порядок канонического произведения $K(z,\lambda)$ равен $\max(\varkappa+1, \varkappa_1+1)$ (см. [5]), поэтому порядок $f(z)$ не превосходит $\max(\tau,\tau_1,\chi+1,\chi_1+1)$.

Если же $\rho=\max(\tau,\tau_1)>\max(\varkappa+1,\varkappa_1+1)$, то не существует периодической мероморфной функции $\varphi(z)$ с заданными начальными частями (1) более низкого порядка чем $\rho=\max(\tau,\tau_1)$. В противном случае следовало бы, что порядок функции $\frac{\varphi(z)}{K(z,\lambda)}$ меньше ρ, а это противоречит тому, что $\frac{\varphi(z)}{K(z,\lambda)}$ имеет главные части (3).

2. Если $l_n=0$, то в этом случае функция $f(z)$ является целой периодической с периодом 2π и теорему 1 можно высказать в других терминах.

Через $T_k(z)$ обозначим многочлен от e^{iz} в случае $k<0$ и от e^{-iz}, если $k>0$, имеющий начальные части (1) соответствующие точкам λ_n, принадлежащим множеству H_k.

Пусть $k>0$ и

$$T_k(z)=T_{k,0}+T_{k,1}e^{-iz}+\ldots+T_{k,\,n_k-1}e^{-i(n_k-1)z}=$$

$$=s_{k,0}+s_{k,1}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,1}})+s_{k,2}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,1}})(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,2}})+$$

$$+\ldots+s_{k,\,n_k-1}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,1}})\ldots(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,\,n_k-1}}). \tag{6}$$

Предположим, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+T_k}{\ln v_k}=\alpha,\quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+s_k}{\ln v_k}=\beta, \tag{7}$$

где

$$T_k=\max_{0\leqslant l\leqslant n_k-1}|T_{k,l}|,\quad s_k=\max_{0\leqslant l\leqslant n_k-1}|s_{k,l}|$$

и

$$v_k=\max_{z\in\Gamma_k}\operatorname{Im}z.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть* μ *— некоторое число не меньше* χ *— показателя сходимости последовательности* $\{\lambda_n\}$, $n>0$, *тогда* $\max(\alpha,\mu+1)=\max(\beta,\mu+1)$.

Доказательство. По лемме работы [4]

$$s_{k,l}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\frac{T_k(z)e^{-iz}dz}{(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,1}})\ldots(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,\,l+1}})},\quad l=0,1,2,\ldots,n_{k-1},$$

где C — отрезок $\operatorname{Im}z=2v_k$, $-\pi\leqslant\operatorname{Re}z<\pi$.

Так как на C

$$|T_k(z)|\leqslant T_k(1+e^{2v_k}+\ldots+e^{(n_k-1)2v_k})<T_ke^{2n_kv_k},\quad v_k>v_0,$$

$$|e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,m}}|>e^{2v_k}-e^{v_k}>1,\quad m=1,2,\ldots,l+1\leqslant n_k,$$

то

$$|s_{k,l}|<\frac{1}{2\pi}\cdot T_k\cdot e^{2n_kv_k}\cdot e^{2v_k}\cdot 2\pi=T_k\cdot e^{2v_k(n_k+1)}.$$

Число n_k не превосходит $n(2v_k)$ — числа точек λ_n, содержащихся в прямоугольнике $-\pi\leqslant\operatorname{Re}z<\pi$, $0<\operatorname{Im}z\leqslant 2v_k$

$$n_k\leqslant n(2v_k)<(2v_k)^{\mu+\varepsilon}. \tag{8}$$

Отсюда

$$|s_{k,l}|\leqslant T_k\cdot e^{(2v_k)^{\mu+1+\varepsilon_1}},\quad \varepsilon_1>\varepsilon,$$

и следовательно

$$\beta\leqslant\max(\alpha,\mu+1). \tag{9}$$

С другой стороны

$$T_{k,l}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C T_k(z)e^{ilz}dz,\qquad l=0,1,\ldots,n_k-1,$$

где C — отрезок $\operatorname{Im}z=v_k$, $-\pi\leqslant\operatorname{Re}z<\pi$.

Так как при $\operatorname{Im}z=v_k$

$$|e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,m}}|<e^{v_k}+e^{v_k}=2e^{v_k},\qquad m=1,2,\ldots,n_k-1,$$

и

$$|e^{ilz}|=e^{-lv_k}<1,$$

то для $v_k>v_0$

$$|T_k(z)|<s_k[1+2e^{v_k}+(2e^{v_k})^2+\ldots+(2e^{v_k})^{n_k-1}]<s_k(2e^{v_k})^{n_k}.$$

Следовательно

$$|T_{k,l}|<s_k(2e^{v_k})^{n_k}, \qquad l=0,\ 1,\ \ldots,\ n_k-1.$$

Принимая во внимание неравенство (8), получаем

$$\alpha\leqslant\max(\beta,\mu+1). \tag{10}$$

Сопоставляя неравенства (9) и (10), окончательно имеем

$$\max(\alpha,\mu+1)=\max(\beta,\mu+1).$$

Замечание. *Аналогичное утверждение можно сформулировать и в случае* $k<0$, *а именно* $\max(\alpha_1,\mu_1+1)=\max(\beta_1,\mu_1+1)$, *где* α_1 *— порядок коэффициентов* T_k, β_1 *— порядок коэффициентов* S_k *многочлена* $T_k(z)$ *при* $k\to-\infty$ *и* μ_1 *— число не меньше показателя сходимости последовательности* $\{\lambda_n\}$, $n<0$.

Теорема 2. *Существует периодическая целая функция* $f(z)$ *с начальными частями* $Q(z,\lambda_n)$, $l_n=0$, *порядка* $\sigma=\max(\alpha,\alpha_1,\chi+1,\chi_1+1)=\max(\beta,\beta_1,\chi+1,\chi_1+1)$, *но не существует такой функции более низкого порядка, чем* $\max(\beta,\beta_1)$.

Доказательство. Главные части функции $\frac{T_k(z)}{K(z,\lambda)}$ в точках $\lambda_{k,1}$, $\lambda_{k,2}$, $\ldots$, λ_{k,n_k}, т. е. в точках множества H_k, совпадают с главными частями функции $\frac{f(z)}{K(z,\lambda)}$, где $K(z,\lambda)$ — каноническое произведение (2).

На контуре Γ_k облака D_k, при $|\operatorname{Im} z|>v_0=v_0(\varepsilon)$

$$\frac{1}{K(z,\lambda)}\leqslant e^{v_k^{\max(\chi+1,\ \chi_1+1)}}\leqslant e^{v_k^{\sigma+\varepsilon}}.$$

Что касается $T_k(z)$, то в случае $k>0$ на Γ_k

$$|e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,l}}|\leqslant e^{v_k}+e^{v_k}=2e^{v_k}, \qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ n_k,$$

и

$$|T_k(z)|\leqslant s_k[1+2e^{v_k}+(2e^{v_k})^2+\ldots+(2e^{v_k})^{n_k-1}].$$

Используя равенства (7) получаем

$$|T_k(z)|<e^{v_k^{\beta+\varepsilon}}\cdot(2e^{v_k})^{n_k}<e^{v_k^{\sigma+\varepsilon}}.$$

То же самое получается в случае $k<0$. Таким образом,

$$|T_k(z)|\leqslant e^{v_k^{\sigma+\varepsilon}}$$

и

$$\left|\frac{T_k(z)}{K(z,\lambda)}\right|\leqslant e^{v_k^{\sigma+\varepsilon}}.$$

Сумму главных частей относящихся к множеству H_k функции $\frac{T_k(z)}{K(z,\lambda)}$ обозначим как прежде $R_k(z)$ $\left(\text{они такие же, как функции } \frac{f(z)}{K(z,\lambda)}\right)$ и представим в виде

$$R_k(z)=\begin{cases}\sum\limits_{l=1}^{n_k}\dfrac{r_{k,l}}{(e^{-iz}e^{-i\lambda_{k,1}})\dots(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,l}})}, & k>0,\\ \sum\limits_{l=1}^{n_k}\dfrac{r_{k,l}}{(e^{iz}-e^{-i\lambda_{k,1}})\dots(e^{iz}-e^{i\lambda_{k,l}})}, & k\leqslant 0,\end{cases}$$

где в случае $k>0$

$$r_{k,l}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_k}\frac{T_k(z)}{K(z,\lambda)}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,1}})\dots(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,l-1}})e^{-iz}dz.$$

Используя полученные выше оценки, имеем

$$|r_{k,l}|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot e^{v_k^{\sigma+\varepsilon}}\cdot(2e^{v_k})^{l-1}\cdot e^{v_k}\text{ длина }\Gamma_k.$$

Число l не превосходит $n(v_k)$ — числа точек λ_n содержащихся в прямоугольнике $-\pi\leqslant\operatorname{Re}z<\pi$, $0<\operatorname{Im}z\leqslant v_k$

$$l\leqslant n(v_k)\leqslant v_k^{\chi+\varepsilon}.$$

Таким образом

$$|r_{k,l}|<e^{v_k^{\sigma+\varepsilon_1}},\qquad \varepsilon_1>\varepsilon,\ v_k>v_0.$$

То же самое получается и в случае $k\leqslant 0$.

Тем самым доказано, что порядки последовательностей коэффициентов функций $R_k(z)$ не превосходят σ и по теореме 1 существует целая функция, имеющая порядок σ и начальные части $Q(z,\lambda_n)$.

С другой стороны, если некоторая целая периодическая функция $\varphi(z)$ имеет начальные части (1), то ее порядок не превосходит $\max(\beta,\beta_1)$.

Действительно, если $k>0$, то

$$\varphi(z)=s_{k,0}+s_{k,1}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,1}})+\dots+$$
$$+s_{k,n_k-1}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,1}})\dots(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,n_k-1}})+g(z)$$

и

$$s_{k,l}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\frac{\varphi(z)e^{-iz}dz}{(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,1}})\dots(e^{-iz}-e^{-i\lambda_{k,l+1}})},\ l=0,1,2,\dots,n_k-1,$$

где C — контур прямоугольника, две горизонтальные (параллельные к действительной оси) стороны которого находятся на расстоянии единицы от облака D_k, а вертикальные стороны симметричны относительно некоторой точки облака D_k и удалены друг от друга на расстояние 2π.

Модуль знаменателя подынтегрального выражения больше еднницы и поэтому

$$|s_{k,l}|\leqslant\max_{z\in C}|\varphi(z)|\cdot e^{2v_k}.$$

Таким образом $\beta\leqslant\sigma$ и совершенно аналогично $\beta_1\leqslant\sigma$. Отсюда

$$\max(\beta,\beta_1)\leqslant\sigma.$$

3. Рост построенных в теоремах 1 и 2 функций, имеющих заданные начальные части (1) существенным образом зависит от порядков последовательностей коэффициентов и плотности последовательности $\{\lambda_n\}$. Покажем, что если не требовать, чтобы совокупность точек λ исчерпывалась заданными точками, то можно построить мероморфную функцию, рост которой зависит только от плотности последовательности $\{\lambda_n\}$.

Теорема 3. *По заданным начальным частям можно построить периодическую мероморфную функцию порядка не выше* $\max(\varkappa+1,\varkappa_1+1)$.

Доказательство. Пусть сначала $l_n=0$. Обозначим, как прежде, $K(z,\lambda)$ каноническое произведение с p_n+1 кратными нулями в точках λ_n.

Пусть $S_{n,m}(z)$ — сумма первых m членов разложения функции

$$\frac{(e^{-iz}-e^{-i\lambda_n})^{p_n+1}}{K(z,\lambda)}$$

в степенной ряд (по степеням $e^{-iz}-e^{-i\lambda_n}$), если $\operatorname{Im}\lambda_n>0$ и сумма первых m членов разложения функции

$$\frac{(e^{iz}-e^{i\lambda_n})^{p_n+1}}{K(z,\lambda)}$$

в степенной ряд (по степеням $e^{iz}-e^{i\lambda_n}$), если $\operatorname{Im}\lambda_n\leqslant 0$.

Заметим, что, если $\operatorname{Im}\lambda_n>0$, то

$$a_{n,t}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_n})^t\cdot\frac{K(z,\lambda)}{(e^{-iz}-e^{-i\lambda_n})^{p_n+1}}\cdot\frac{(e^{-iz}-e^{-i\lambda_n})^{p_n+1}}{K(z,\lambda)}=$$
$$=a_{n,t}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_n})^t \tag{11}$$

и p_n+1 — член разложения в окрестности точки λ_n по степеням $e^{-iz}-e^{-i\lambda_n}$ функции

$$a_{n,t}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_n})^t\cdot\frac{K(z,\lambda)}{(e^{-iz}-e^{-i\lambda_n})^{p_n+1}}\cdot S_{n,p_n-t+1}(z)$$

такие же, как у функции (11) и совершенно аналогично, если $\operatorname{Im}\lambda_n<0$.

Поэтому функция

$$\psi_n(z)=\begin{cases}\dfrac{K(z,\lambda)}{(e^{-iz}-e^{-i\lambda_n})^{p_n+1}}\cdot\displaystyle\sum_{t=0}^{p_n}a_{n,t}(e^{-iz}-e^{-i\lambda_n})^t\cdot S_{n,p_n-t+1}(z),\ \operatorname{Im}\lambda_n>0,\\[2ex] \dfrac{K(z,\lambda)}{(e^{iz}-e^{i\lambda_n})^{p_n+1}}\cdot\displaystyle\sum_{t=0}^{p_a}a_{n,t}(e^{iz}-e^{i\lambda_n})^t\cdot S_{n,p_n-t+1}(z),\ \operatorname{Im}\lambda_n\leqslant 0\end{cases}$$

имеет в точке λ_m, $m\neq n$ нуль, кратность которого не меньше p_n+1, а в точке λ_n ее разложение по соответствующим степеням начинается с заданной начальной части.

Так как на прямых $|\operatorname{Im}z|=v$, не пересекающих ни одного из облаков D_k, функции

$$\frac{\psi_n(z)}{K(z,\lambda)}\ \text{и}\ \frac{S_{n,p_n+1}(z)}{(e^{\pm iz}-e^{\pm i\lambda_n})^{p_n+1}}$$

являются ограниченными, то найдется последовательность $\{\varepsilon_n\}$ настолько малых положительных чисел, что на этих прямых

$$\varepsilon_n |\psi_n(z)| \leqslant \frac{|K(z, \lambda)|}{2^{|n|+1}},$$

$$\frac{\varepsilon_n |S_{n, p_n+1}(z)|}{|e^{\pm iz} - e^{\pm i\lambda_n}|^{p_n+1}} < \frac{1}{2^{|n|+1}}. \tag{12}$$

Функция

$$\varphi(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{K(z, \lambda)}{(e^{iz} - e^{i\lambda_n})^{p_n+1}} \cdot \varepsilon_n \cdot S_{n, p_n+1}(z) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K(z, \lambda)}{(e^{-iz} - e^{-i\lambda_n})^{p_n+1}} \cdot \varepsilon_n \cdot S_{n, p_n+1}(z)$$

является целой периодической и в окрестности точки λ_m имеет разложение

$$\varphi(z) = \varepsilon_m + c_{m, p_m+1} (e^{\pm iz} - e^{\pm i\lambda_m})^{p_n+1} + \ldots,$$

где знаки $\pm$ берутся в соответствии с тем, в какой полуплоскости лежит точка λ_m.

На прямых $|\operatorname{Im} z| = v$

$$|\varphi(z)| \leqslant |K(z, \lambda)|,$$

и порядок $\varphi(z)$ не превосходит $\max(\varkappa+1, \varkappa_1+1)$.

Функция

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \varphi(\lambda_n) \varphi_n(z) \qquad (n \neq 0)$$

является также целой периодической и на прямых $|\operatorname{Im} z| = v$

$$|F(z)| \leqslant |K(z, \lambda)|,$$

значит порядок $F(z)$ также не превосходит $\max(\varkappa+1, \varkappa_1+1)$.

Функция $f(z) = \frac{F(z)}{\varphi(z)}$ является мероморфной периодической и ее порядок также не превосходит $\max(\varkappa+1, \varkappa_1+1)$.

Разложение функции $f(z)$ в ряд по соответствующим степеням начинается с заданной группы членов.

Если $l_n < 0$, $f(z)$ – функция имеющая заданные начальные части (1) и $\tilde{K}(z, \lambda)$ – каноническое произведение с l_n кратными нулями в точках λ_n, то можно вычислить начальные части функции $\Phi(z) = \tilde{K}(z, \lambda) f(z)$ и задача сводится к отысканию функции $\Phi(z)$.

Благодарю доктора физико-математических наук А. Нафталевича за внимание к работе и полезные советы.

Вильнюсский Государственный
университет им. В Капсукаса

Поступило в редакцию
27.IX.1968

Литература

1. А. Ф. Леонтьев, О значениях целой функции конечного порядка в заданных точках, Изв. АН СССР 22, № 3, 1958, 387–394.
2. А. Г. Нафталевич, Двойные системы разностных уравнений, Докторская диссертация, Вильнюс, 1964.
3. А. Г. Нафталевич, Об интерполировании функций мероморфных в единичном круге, Лит. матем. сб. I, № 1–2 (1961), 159–179.
4. В. И. Тевялис, О росте периодических мероморфных функций, Лит. матем. сб. VIII, № 2 (1968), 331–342.
5. K. W. Mügel, Über meromorphe periodische Funktionen. Math. Nachr., 13, 3–4 (1955), 187–230.

APIE PERIODINIŲ MEROMORFINIŲ FUNKCIJŲ INTERPOLIAVIMĄ

V. Tėvelis

(*Reziumė*)

Sakykime, $\{\lambda_n\}$ yra kompleksinių skaičių seka, $-\pi\leqslant\operatorname{Re}\lambda_n<\pi$, ..., $\leqslant\operatorname{Im}\lambda_{-2}\leqslant\operatorname{Im}\lambda_{-1}\leqslant\leqslant 0<\operatorname{Im}\lambda_1\leqslant\operatorname{Im}\lambda_2\leqslant\ldots$, $\lim\limits_{n\to-\infty}\operatorname{Im}\lambda_n=-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Im}\lambda_n=\infty$ ir $\{Q(z,\lambda_n)\}$ – seka funkcijų

$$Q(z,\lambda_n)=\begin{cases}\sum\limits_{t=l_n}^{p_n} a_{n,t}\left(e^{-iz}-e^{i\lambda_n}\right)^t, & n>0,\\ \sum\limits_{t=l_n}^{p_n} a_{n,t}\left(e^{iz}-e^{i\lambda_n}\right)^t, & n\leqslant 0,\end{cases}$$

$l_n\leqslant 0$, $p_n\geqslant -1$, $l_n\leqslant p_n$.

Darbe nagrinėjamas augimas periodinių meromorfinių funkcijų, kurių skleidimas taško λ_n aplinkoje $e^{\pm iz}-e^{\pm i\lambda_n}$ laipsniais prasideda $Q(z,\lambda_n)$ narių grupe.

ON THE INTERPOLATION OF PERIODIC MEROMORPHIC FUNCTIONS

V. Tėvelis

(*Summary*)

Let $\{\lambda_n\}$, $n=\pm 1,\pm 2,\ldots$, be the sequence of complex numbers $-\pi\leqslant\operatorname{Re}\lambda_n<\pi$, ..., $\leqslant\operatorname{Im}\lambda_{-2}\leqslant\leqslant\operatorname{Im}\lambda_{-1}\leqslant 0<\operatorname{Im}\lambda_1\leqslant\operatorname{Im}\lambda_2\leqslant\ldots$, $\lim\limits_{n\to-\infty}\operatorname{Im}\lambda_n=-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Im}\lambda_n=\infty$, and let $\{Q(z,\lambda_n)\}$be the sequence of functions

$$Q(z,\lambda_n)=\begin{cases}\sum\limits_{t=l_n}^{p_n} a_{n,t}\left(e^{-iz}-e^{-i\lambda_n}\right)^t, & n>0,\\ \sum\limits_{t=l_n}^{p_n} a_{n,t}\left(e^{iz}-e^{i\lambda_n}\right)^t, & n\leqslant 0,\end{cases}$$

$l_n\leqslant 0$, $p_n\geqslant -1$, $l_n\leqslant p_n$.

In this paper we consider the growth of periodic meromorphic functions, the periodic Laurent expansions of which of in the neighbourhood of λ_n begin with the cluster of terms $Q(z,\lambda_n)$.