ИНФОРМАЦИЯ О ДЕВЯТОЙ РЕСПУБЛИКАНСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ МАТЕМАТИКОВ ЛИТОВСКОЙ ССР

25–26 июня 1968 года в Вильнюсе состоялась Девятая конференция математиков Литовской ССР. Конференция была организована физико – математическим факультетом Вильнюсского Государственного педагогического института и Литовским математическим обществом. В работе конференции принимали участие свыше 150 математиков: сотрудники республиканских научных учреждений, преподаватели высших школ и техникумов, а также учителя средних школ. На конференции присутствовал гость из ГДР профессор Крейсвальдского университета доктор Леонард Биттнер.

Конференция также являлась и третьим сьездом Литовского математического общества. На конференции были заслушаны отчет Правления общества, который сделал председатель Правления проф. И. Кубилюс и отчет Ревизионной комиссии, который сделал доц. В. Паулаускас.

В отчетном докладе были охарактеризованы работа Общества за 1965–1968 годы и развитие математики в Литовской ССР. Отмечалось, что в Вильнюсе работает общий математический семинар, заседания которого происходят ежемесячно. Наряду с этим семинаром в Вильнюсе работает ряд научно-исследовательских семинаров: семинар по теории вероятностей и теории чисел, специальный семинар по теории вероятностей, семинар по геометрии, семинар по математической логике и теории алгоритмов, семинар по теории функций и дифференциальным уравнениям, семинар по исследованию операций, семинар по вычислительной математике, семинар по вопросам программирования. Литовское математическое общество совместно с Академией наук Лит. ССР и высшими школами республики издает математический журнал „Литовский математический сборник", который по своему научному уровню не уступает другим математическим журналам, издаваемым в СССР. Ряд математиков Литовской ССР (И. Кубилюс, В. Статулявичус, Б. Ряуба, В. Близникас и др.) выступали с научными докладами за границей. Литовские математики приняли активное участие в работе Всемирного Конгресса Математиков (Москва, 1966).

В настоящее время в республике работает 5 докторов физико-математических наук (математиков) и около 50 кандидатов наук. В последнее время начали заниматься научно-исследовательской работой математики Каунаса и Шяуляй.

Во время конференции работали шесть секций (теории функций и дифференциальных уравнений, геометрии, методики преподования математики, вычислительной математики и математической логики, исследования операций и прикладной математики, теории вероятностей и теории чисел).

На заключительном пленарном заседании было избрано новое Правление Литовского Математического общества, в состав которого вошли: В. Близникас, П. Катилюс, И. Кубилюс, В. Лютикас, А. Нафталевичюс, М. Сапаговас, В. Статулявичус, И. Тейшерскис, И. Урбялис, Э. Вилкас. Председателем Правления был избран И. Кубилюс. В ревизионную комиссию избраны: В. Паулаускас, Р. Плюшкевичюс, Р. Восилюс.

Ниже приводится программа конференции и резюме некоторых докладов, прочитанных на заседаниях соответствующих секций.

Пленарные заседания

Вторник, 25 июня

1. Открытие конференции.
2. И. Кубилюс, Отчет Правления Литовского математического общества.
3. В. Паулаускас, Отчет ревизионной комиссии Литовского математического общества.
4. В. Лютикас, В. Статулявичус, Проблемы преподования математики в средней школе.

Среда, 26 июня

1. Дискуссии.
2. Выборы Правления Литовского математического общества.
3. Выборы ревизионной комиссии Литовского математического общества.
4. Закрытие конференции.

Секция теории функций и дифференциальных уравнений

(Руководитель А. НАФТАЛЕВИЧЮС)

Вторник, 25 июня

1. Ш. Стрелиц (ВГУ), О росте целых трансцендентных решений дифференциальных уравнений.
2. В. Кабайла (ВГУ), Об обобщенных автоморфных функциях.
3. В. Тевялис (ВГУ), Об интерполировании периодических мероморфных функций.
4. В. Меркис (ВГУ), Решение в конечном виде некоторых линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
5. И. Мационис (ВГУ), Обобщенная функция Грина.

Среда, 26 июня

1. П. Голоквосчюс (ВГУ), Об интегральной матрице одного класса систем дифференциальных уравнений.
2. Ю. Дегутис, Ш. Стрелицас (ВГУ), О существовании собственных значений одной нелинейной задачи линейного дифференциального уравнения n-того порядка.
3. Е. Дагене (ВГУ), О непродолжаемости рядов Дирихле.
4. К. Гармус, Класс ACG — функций в двумерном пространстве.
5. И. Киселюс (ВГПИ), Ш. Стрелицас (ВГУ), Существование регулярных решений.

Секция геометрии

(Руководитель В. БЛИЗНИКАС)

Вторник, 25 июня

1. В. Близникас (ВГПИ), О геометрии систем дифференциальных уравнений.
2. З. Лупейкис (ВГПИ), О геометрии квазилинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка.
3. И. Шинкунас (ВГПИ), Нормальные координаты и расширения в пространстве опорных линеаров линеарной связности.
4. А. Ионушаускас, О некоторых свойствах геодезических линий инвариантных аффинных связностей в однородных пространствах.
5. А. Матузявичюс (ВГУ), Об эквивалентности категории микропучков.

Среда, 26 июня

1. З. Жемайтис (ВГУ), Применения новых формул гиперболической геометрии в случаях предельных радиусов.
2. И. Медведевайте (ВГПИ), К вопросу теории поверхностей в метрическом пространстве гиперплоскостных элементов.
3. А. Урбонас (Казанский ун-т). О движениях в пространстве гиперплоскостных элементов аффинной связности.
4. В. Падервинскас (ВГУ), Ромбические сети из сфер в трехмерном эвклидовом пространстве.
5. Р. Восилюс (ВГИП), Об инвариантных аффинных связностях на группах Ли.

Секция методики и преподавания математики

(Руководитель И. ТЕЙШЕРСКИС)

Вторник, 25 июня

1. М. Готлерас (ВГПИ), Некоторые соотношения между корнями и коэффициентами кубического уравнения.
2. И. Тейшерскис (ВГПИ), К вопросу развития понятия степени в средней школе.
3. А. Анеляускене (Школа-интернат № 1 г. Вильнюс), Вопросы развития математических способностей в IX—XI классах.

Среда, 26 июня

1. В. Дрегунас (ВГПИ), Некоторые новые универсальные наглядные пособия по математике.
2. В. Клебанскис (РИУУ), Проблемы повышения квалификации и переквалифицирования учителей математики общеобразовательных средних школ.

Секция вычислительной математики и математической логики

(Руководитель И. УЖДАВИНИС)

Вторник, 25 июня

1. Р. Плюшкявичюс (ИФМ), О некоторых исчислениях кангеровского типа.
2. Р. Плюшкевичюс (ИФМ), К вопросу о вариантах нормальных исчислений Идельсона.
3. В. Матулис (ИФМ), Некоторые элементы тактики в прямом методе поиска доказательства.
4. А. Ясюленис (АСХ), Квадратный корень из тригонометрического ряда.
5. Р. Бражените, Д. Сапаговене (ИФМ), Автокод для машины RŪTA – 110.
6. М. Гирджюте, Д. Пуоджюте (ИФМ), Организация библиотеки стандартных подпрограмм для машины с изменяющейся длиной слова.
7. И. Жвинис (ВГУ), Алгоритмы и программы для решения некоторых производственных задач.

Среда, 26 июня

1. М. Сапаговас (ИФМ), Об ускорении сходимости итерационных процессов.
2. И. Уждавинис (ВГУ), Сходимость метода областей.
3. И. Уждавинис (ВГУ), Сходимость методов колокационного типа.
4. Б. Рудокайте (ВГУ), Решение квазилинейных элиптических уравнений методом прямых.
5. И. Уждавинис (ВГУ), Применение методов колокационного типа для нелинейных уравнений.

Секция исследования операций и прикладной математики

(Руководитель Э. ВИЛКАС)

Вторник, 25 июня

1. Л. Биттнер (ГДР), Некоторые методы вариационного исчисления в вопросах двойственности.
2. С. Девулис (ИФТЭП), Алгоритм для решения задачи выпуклого, кусочно-линейного программирования.
3. Р. Ясиленис (ИФМ), Свойства решений задачи векторной минимизации равновесия.
4. И. Ячяускас (ИФМ), Некоалиционные дифференциальные игры многих участников.
5. Д. Суджюте (ИФМ), Неантагонистические игры двух участников с подбором момента времени.
6. С. Вакринене (ИФМ), Области решения неантагонистических динамических игр.

Среда, 26 июня

1. А. Моркелюнас (ВГИ), Применение моделя торга Неша для задачи распределения ресурсов.
2. В. Бистрицкас (ИФМ), Политомные задачи динамического программирования с выпуклыми функциями.
3. Э. Вилкас (ИФМ), Точки равновесии — эффективные.

4. Ш. Раудис (ИФМ), Оценка некоторых параметров закона распределения признаков, нужных при оценке выборки обучения классификатора.
5. А. Мотуза (ИФМ), Урезанные последовательные процедуры выбора вариантов систем опознования.

Секция теории вероятностей и теории чисел

(Руководитель Пр. СУРВИЛА)

Вторник, 25 июня

1. К. Булота (ИФМ, ВГПИ), Некоторые связи кубического числового поля.
2. А. Бакштис (КПИ, филиал Шяуляй), Вопрос предельных распределений для мультипликативных арифметических функций.
3. И. Кубилюс (ВГУ), Аналитические методы в вероятностной теории чисел.
4. И. Киселюс (ВГПИ), Аналог неравенства Лиувилля.
5. А. Матуляускас (ВГУ), Приближенное функциональное уравнение для Геке функции ζ в действительном квадратическом поле.
6. Г. Мисявичюс (ВГУ), Применение метода моментов к изучению асимптотических законов сумм аддитивных функций.
7. И. Урбялис (КПИ), К вопросу оценки дзета-функции Эйнштейна на прямой $\eta=\frac{1}{2}$.
8. Р. Уждавинис (ВГУ), Об одном классе аддитивных арифметических функций.
9. П. Маркшайтис (ВГУ), О некоторых эллиптических кривых.

Среда, 26 июня

1. А. Рауделюнас (ВГУ), Об одной многомерной предельной теореме для цепей Маркова.
2. В. Паулаускас (ВГИ), Обобщение одной теоремы В. В. Сазонова.
3. И. Банис (ВГПИ), Вопрос оценки остаточного члена в многомерной предельной теореме в случае устойчивого предельного закона.
4. Г. Ясюнас (ВГУ), Многомерная локальная предельная теорема для плоскостей.
5. Э. Мисявичюс (ВГУ), Одна предельная теорема с большими уклонениями для однородных цепей Маркова.
6. В. Статулявичус, Л. Вилкаускас (ИФМ), К вопросу об оценке Питмена.
7. Пр. Сурвила (ВГПИ), Большие уклонения в локальной теореме для решетчатых распределений.
8. Бр. Григеленис (ИФМ), Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих марковским процессам.
9. А. Алешкявичене (ИФМ), Предельные теоремы для процессов восстановления.
10. В. Лютикас (КПИ, филиал Вильнюс), Некоторые уточнения центральной предельной теоремы для сумм дискретных процессов восстановления.
11. Бр. Куприте (ИФМ), Центральная предельная теорема для сумм дискретных процессов восстановления.
12. И. Голосов, А. Темпельман (ИФМ), О нестационарных процессах авторегресии

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ш. И. Стрелиц

Известный метод Вимана — Валирона не всегда дает возможность извлекать информацию непосредственно из дифференциального уравнения о порядке целого его решения. На основании найденных нами в работе [1] неравенств удается все же в определенных случаях, в которых метод Вимана — Валирона не применим, установить верхнюю границу для порядков целых трансцендентных интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений типа

$$F(z, w, w', \dots, w^{(n)})=0,$$

где F — альгебраический многочлен относительно всех своих переменных.

Литература

1. Ш. И. Стрелиц, Поведение аналитической функции при больших значениях ее модуля. Лит. матем. сб., III, № 2, (1963), 123—175.

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Тевялис

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}$, $-\pi \leqslant \operatorname{Re}\lambda_n < \pi$, $\ldots \leqslant \operatorname{Im}\lambda_{-2} \leqslant \operatorname{Im}\lambda_{-1} \leqslant 0 < \operatorname{Im}\lambda_1 \leqslant \operatorname{Im}\lambda_2 \leqslant \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im}\lambda_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to-\infty} \operatorname{Im}\lambda_n = -\infty$ и последовательность функций

$$Q(z,\lambda_n) = \begin{cases} \sum\limits_{t=l_n}^{p_n} a_{nt}(e^{-iz} - e^{-i\lambda_n})^t, & n > 0, \\ \sum\limits_{t=l_n}^{p_n} a_{nt}(e^{iz} - e^{i\lambda_n})^t, & n \leqslant 0, \end{cases}$$

$l_n \leqslant 0$, $p_n \geqslant -1$, $l_n \leqslant p_n$.

Если разложение некоторой функции $f(z)$ в окрестности точки λ_n по степеням $e^{\pm iz} - e^{\pm i\lambda_n}$ начинается с группы членов $Q(z,\lambda_n)$, то мы будем говорить, что функция $f(z)$ имеет начальные части $Q(z,\lambda_n)$.

Обозначим показатели сходимости подпоследовательностей $\{\lambda_n\}$, $n>0$ и $\{\lambda_n\}$, $n \leqslant 0$ соответственно через $\varkappa$ и $\varkappa_1$.

Теорема 1. *По заданным начальным частям $Q(z,\lambda_n)$ можно построить периодическую с периодом 2π мероморфную функцию $f(z)$ порядка не выше* $\max(\varkappa+1, \varkappa_1+1)$.

Полюсы построенной функции, лежащие в основной полосе периода $-\pi \leqslant \operatorname{Re} z < \pi$, не обязательно совпадают с полюсами, содержащимися в последовательности $\{\lambda_n\}$.

Обозначим через $K(z,\lambda)$ каноническое произведение с $(p_n+1)^+ = \max(p_n+1, 0)$ кратными нулями в точках λ_n,

$$K(z,\lambda) = \prod_{n\leqslant 0} [1 - e^{i(z-\lambda_n)}]^{(p_n+1)^+} \prod_{n>0} [1 - e^{-i(z-\lambda_n)}]^{(p_n+1)^+}$$

и пусть

$$R(z,\lambda_n) = \begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{p_n-l_n+1} \dfrac{A_{nt}}{(e^{-iz} - e^{-i\lambda_n})^t}, & n > 0, \\ \sum\limits_{t=1}^{p_n-l_n+1} \dfrac{A_{nt}}{(e^{iz} - e^{-i\lambda_n})^t}, & n \leqslant 0 \end{cases}$$

периодическая главная часть функции $\dfrac{Q(z,\lambda_n)}{K(z,\lambda)}$ в точке λ_n.

Предположим, что

$$\varlimsup_{0<n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ A_n}{\ln \operatorname{Im}\lambda_n} = \tau, \qquad \varlimsup_{0>n\to-\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ A_n}{\ln(-\operatorname{Im}\lambda_n)} = \tau_1,$$

$$A_n = \max_{1\leqslant t\leqslant p_n - l_n + 1} |A_{nt}|.$$

Теорема 2. *По заданным начальным частям $Q(z,\lambda_n)$ можно построить периодическую с периодом 2π мероморфную функцию $f(z)$ имеющую порядок $\rho = \max(\tau, \tau_1, \varkappa+1, \varkappa_1+1)$, все полюсы которой содержатся в последовательности $\{\lambda_n\}$.*

В случае $l_n = 0$, $f(z)$ — целая функция. Получаются дополнительно некоторые результаты о росте целых периодических функций с начальными частями $Q(z,\lambda_n)$.

РЕШЕНИЕ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. Меркис

В первой части работы рассматриваются свойства матриц второго порядка со следами равными нулю.

Во второй части рассматривается система вида

$$\frac{dY_1}{dt} = Y_1(\bar{U}_0\varphi_0 + \bar{U}_1\varphi_1 + \cdots + \bar{U}_n\varphi_n), \tag{1}$$

где $\bar{U}_j$ — постоянные матрицы второго порядка, а φ_j — непрерывные скалярные функции от t. Используя свойства матриц второго порядка со следами равными нулю, а также некоторые подстановки, система (1) приводится к виду

$$\frac{dY}{dt} = Y(U_0\Phi_0 + U_1\Phi_1 + U_0U_1\Phi_2), \tag{2}$$

где U_0 и U_1 — постоянные матрицы со следами равными нулю, а Φ_j — непрерывные функции от t. Далее, устанавливаются условия эквивалентности системы (2) с системой

$$\frac{dX}{dt} = X(AF_1 + BF_2),$$

где A и B постоянные матрицы второго порядка, линейно выраженные через U_0, U_1 и U_0U_1, и удовлетворяющие условию

$$\Big[A\,[BA]\Big] = 0,$$

причем A имеет взаимно простые элементарные делители, а F_1 и F_2 — некоторые непрерывные функции от t. Из условий эквивалентности определяются достаточные условия интегрируемости в конечном виде системы (2), а тем самым и (1).

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

П. Голоквосчюс

Рассматривается система вида

$$\frac{dX}{dt} = X[U_1\varphi_1(t) + \varepsilon U_2\varphi_2(t)], \tag{1}$$

где U_k $(k=1, 2)$ постоянные квадратные матрицы второго порядка, ε — малый численный вещественный параметр. Предполагается, что скалярные функции $\varphi_k(t)$ $(k=1, 2)$ являются непрерывными и периодическими с периодом $\omega=1$, обладающими свойством

$$\int_0^1 \varphi_k(t)\,dt = 0 \qquad (k=1,\ 2); \tag{2}$$

X — интегральная матрица системы.

Согласно теореме Б. Л. Крылова [1], выделены и рассмотрены три случая, когда данная система интегрируется в замкнутой форме. Исследована структура интегральной матрицы $X(t, \varepsilon)$ и на основе [2] и [3] найдены необходимые и достаточные условия ее периодичности. Показано, что эти условия связаны с корнями некоторой трансцендентной функции, которая в случае простых тригонометрических функций

$$\varphi_1(t) \geqslant \cos 2\pi t, \qquad \varphi_2(t) = \sin 2\pi t \tag{3}$$

вырождается в функцию Бесселя $J_1(z)$.

Рассмотрен и случай, когда система (1) не интегрируется в замкнутой форме. Тогда, принимая во внимание [4] и ограничиваясь первым приближением, получены разложения характеристических чисел матрицы коэффициентов системы (1), соответствующей приведенной системы по целым степеням параметра ε. В частности, в случае (3) коэффициенты этих разложений выражаются через функцию $J_0(z)$. Кроме того, исследовано поведение интегральной матрицы рассматриваемой системы при $t\to\infty$ в том случае, когда функции $\varphi_k(t)$, удовлетворяющие условию (2), обладают некоторыми дополнительными свойствами.

Литература

1. Б. Л. Крылов, Решение в конечном виде проблемы Римана для системы Гаусса, Тр. Казанского авиац. ин-та, 31(1956).
2. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Минск, 1963.
3. П. Б. Голоквосчюс, Замечание об ограниченных и периодических решениях системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, интегрируемой в замкнутой форме, Изв. высших учебных заведений, Математика, № 3 (1960).
4. Н. П. Еругин, Приводимые системы, Тр. Физико-математического ин-та им. В. А. Стеклова, 13(1946).

О СУЩЕСТВОВАНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n -ГО ПОРЯДКА

Ш. И. Стрелиц, Ю. Э. Дегутис

Рассматривается задача: определить собственные значения системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&y^{(n)}+\sum_{j=0}^{m_1}\lambda^j p_j^{(1)}(x)\,y^{(n-1)}+\sum_{j=0}^{m_2}\lambda^j p_j^{(2)}(x)\,y^{(n-2)}+\dots+\sum_{j=0}^{m_n}\lambda^j p_j^{(n)}(x)\,y=0,\\&y^{(j)}(0)=0,\qquad j=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n-2,\\&y^{(k)}(l)=0,\qquad n-1\geqslant k=\mathrm{const}.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Доказывается следующее предложение.

Теорема. *Пусть в уравнении* (1) *все функции* $(-1)^{m_k}p_{m_k}^{(k)}(x)$ $(k=1,2,\dots,n)$ *непрерывны и положительны на отрезке* $[0,l]$, *а числа* $m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_n$ *удовлетворяют одному из следующих условий*:

а) *хотя бы для одного постоянного* $2\leqslant s\leqslant n$

$$m_k\leqslant km_1,\ (k=2,\dots,s-1),\ m_s>sm_1,\ m_{s+j}\leqslant(j+1)m_s,\ (j=1,2,\dots,n-s);$$

б) *хотя бы для одного постоянного* $2\leqslant s\leqslant n$

$$m_k>2m_{k-1},\ (k=2,3,\dots,s);\ m_{s+j}\leqslant 2m_{s+j-1};\ (j=1,2,\dots,n-s);$$

в) *хотя бы для одной пары постоянных* $2\leqslant s,\ l\leqslant n,\ s<l$ $m_k\leqslant km_1,\ (k=2,3,\dots,s-1)$; $m_s>sm_1,\ m_{s+j}>2m_{s+j-1},\ (j=1,2,\dots,l-s);\ m_{e+j}\leqslant 2m_{e+j-1})\ (j=1,2,\dots,n-l)$.

В этих условиях в случаях а) и б) при $\frac{m_s}{s}$, а в случае в) при $\frac{m_e}{l}$ — нецелых существует бесконечная последовательность собственных значений $\{\lambda_j\}$ задачи (1). Показатель сходимости в случаях а) и б) последовательности $\{\lambda_j\}$ равен $\frac{m_s}{s}$, а в случае в) — $\frac{m_e}{l}$.

Кроме того, в случаях а) и б)

$$c_0 p^{\frac{s}{m_s}}<|\lambda_p|<C_0 p^{\frac{s}{m_s}},$$

а в случае в)

$$c_1 p^{\frac{l}{m_l}}<|\lambda_p|<C_1 p^{\frac{l}{m_l}},$$

где $c_0,\ C_0,\ c_1,\ C_1$ — постоянные от p независящие.

Если же ни одно из условий а), б), в) не удовлетворено, то можно указать такое дифференциальное уравнение, чтобы задача (1) не имела ни одного собственного значения.

О НЕПРОДОЛЖАЕМОСТИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Е. Дагене

Хорошо известны результаты Островского о продолжении функции $g(z)$, представимой рядом

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \tag{1}$$

где $0<\lambda_0<\lambda_1< \ldots <\lambda_n \uparrow \infty$, сходящегося в круге $|z|<R$. Из результатов Островского следует, что при условии Адамара:

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n>\Theta\lambda_{n+1},\ 0<\Theta<1,\ n=0,1,2,\ldots \tag{2}$$

продолжение функции $g(z)$ невозможно ни по какому направлению во вне окружности $|z|=R$, т. е. окружность круга сходимости есть естественная граница для ряда (1). Аналогичные результаты существуют и для рядов Дирихле.

Мы показываем, что, накладывая дополнительные условия на рост ряда Дирихле

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \tag{3}$$

$0<\lambda_1<\lambda_2< \ldots <\lambda_n \uparrow \infty$, сходящегося в полуплоскости $x<0$, для непродолжаемости функции (3) в полуплоскость $x>0$ условие Адамара (2) можно ослабить.

Приведем несколько понятий, которые будут нужны для формулировки теоремы.

Число

$$\mu(x)=\max_n |a_n| e^{\lambda_n x}$$

мы называем максимальным членом ряда (3). Этот максимум достигается при одном или нескольких значениях n. Наибольшее из этих значений обозначаем $\nu(x)$ и называем центральным индексом, $\lambda_{\nu(x)}=\lambda(x)$ — центральным показателем т. е.

$$\mu(x)=|a_{\nu(x)}| e^{\lambda(x)x}.$$

Порядком функции $f(z)$ мы называем число ρ:

$$\rho=\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\ln\ln S(x,f)}{\ln\frac{1}{|x|}},$$

где

$$S(x,f)=\sup_{-\infty<y<+\infty} |f(x+iy)|.$$

Сформулируем нашу теорему.

Теорема. *Пусть $f(z)$ представима рядом Дирихле*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \tag{4}$$

где $0<\lambda_1<\lambda_2< \ldots <\lambda_n \uparrow \infty$, сходящимся при $\mathrm{Re}\, z=x<0$.

Пусть, далее,

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\ln\ln S(x,f)}{\ln\frac{1}{|x|}}=\rho>0. \tag{5}$$

и

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n>\lambda_{n+1}^{\frac{1}{2}+\delta}, \qquad \frac{2}{\rho}<\delta, \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{6}$$

В этих условиях на некотором множестве точек интервала $-1<x<0$ бесконечной логарифмической меры верно соотношение

$$f(z)=[1+0\,(1)]\,a_{\nu(x)}\,e^{\lambda(x)z}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что в условиях теоремы функцию (4) нельзя продолжить в полуплоскость $x>0$. При $\rho>4$ условие (6) можно заменить неравенствами

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n>\lambda_{n+1}^{\frac{1}{2}+\delta}, \qquad \frac{2}{\rho}<\delta<\frac{1}{2}, \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Последнее слабее условия Адамара, которым пользуется Островский.

КЛАСС ACG — ФУНКЦИЙ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

К. Гармус

Понятие ACG—функции связано с определением широкого интеграла Данжуа. Такая функция должна быть аппроксимативно дифференцируемой и единственной на прямоугольнике.

Дается следующее определение ACG — функции на множестве G.

Пусть дана обобщенно непрерывная функция на прямоугольнике R. Пусть $G\subset R$ есть двумерное множество. Скажем, что функция $F(x,\ y)+\varphi\,(x)+\psi\,(y)$ есть ACG — функции на $G\subset R$, если удовлетворяются следующие условия.

1) Множество G представимо в виде суммы последовательности подмножеств, на каждом из которых $F(x,\ y)+\varphi\,(x)+\psi\,(y)$ есть AC — функция и

2) на каждом пересечении множества G с клеткой сетки квадратов со стороной $=\frac{1}{n}$, где $n=1,2,3,\ \ldots$, должно быть для данного n не более одного такого подмножества.

Доказывается, что ACG=функция на $G\subset R$ почти всюду регулярно аппроксимативно дифференцируема и сумма двойных прирощений на множестве меры нуль равна нулю. Также доказывается, что если регулярная аппроксимативная производная ACG — функции почти всюду неотрицательна (неположительна) на R, то функция не убывает (не возрастает).

Отсюда следует, что если ACG — функция имеет почти всюду регулярную аппроксимативную производную, равную нулю, то все двойные приращения этой функции на прямоугольнике R равны нулю.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ

И. В. Киселюс, Ш. И. Стрелиц

Исследуется существование регулярных решений дифференциального уравнения

$$L(u)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}F_{j\,k-j}\,(z,w)\,z^j\,w^{k-j}\,\frac{\partial^k u}{\partial z^j\partial w^{k-j}}=0, \tag{1}$$

коэффициенты которого $F_{j\,k-j}\,(z,\ w)$ суть аналитические функции в полицилиндре $|z|<R$ и $|w|<R$.

1. Если однородная форма

$$\sum_{j=0}^{n}F_{j\,n-j}\,(0,\ 0)\,\eta_1^j\,\eta_2^{n-j} \tag{2}$$

не обращается в нуль для всех неотрицательных η_1 и η_2, когда $\eta_1+\eta_2=1$, то, в зависимости от свойств корней определяющего уравнения

$$Q(\lambda, \mu)=\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} F_{j\,k-j}(0, 0) \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-j+1)} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+j+1)}=0, \tag{3}$$

существует бесконечное множество решений уравнения (1) вида: или

$$u=z^{\lambda}w^{\mu}f(z, w), \tag{4}$$

или

$$u=u_{\tau\sigma}^{(\zeta_\tau, \delta_\tau)}=\sum_{\gamma=0}^{\tau} z^{\lambda+p_{\tau-\gamma}} w^{\mu+q_{\tau-\gamma}} \ln^{\alpha_\gamma} z \ln^{\beta_\gamma} w \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{\zeta_\tau} \sum_{j=0}^{\delta_\tau} \Phi_{\tau\sigma\gamma}^{(ij)}(z, w) \ln^{\zeta_\tau-i} z \ln^{\delta_\tau-j} w, \qquad \tau=1, 2, \ldots, 2^{\tau-1},$$

где λ и η — корни уравнения (3), причем

$$\frac{\partial^{\zeta_\tau+\delta_\tau} Q(\lambda+p_\tau, \mu+q_\tau)}{\partial\lambda^{\zeta_\tau}\partial\mu^{\delta_\tau}}=0$$

для $\zeta_\tau=0, 1, \ldots, \alpha_\tau$, $\delta_\tau=0, 1, \ldots, \beta_\tau$, $\tau=0, 1, \ldots, \nu-1$, а $(\alpha_{\nu-1}+\beta_{\nu-1}+1)$ -ая производная полинома $Q(\lambda, \mu)$ для этой пары (λ, μ) не равна нулю, и $\alpha_\gamma+\beta_\gamma=\gamma$, $\alpha_{\gamma+1}-\alpha_\gamma$ равно 0 или 1. Функции $f(z, w)$ и $\Phi_{\tau\sigma\gamma}^{(ij)}(z, w)$ — аналитические в некоторой окрестности начала координат. (p_τ, q_τ) — целые неотрицательные числа.

2. Если форма (2) не удовлетворяет условиям, указанным в пункте 1, то существование бесконечного множества решений вида (4), уравнения (1), установлено в следующих случаях лля $n=1$:

а) Функции $F_{j\,k-j}(z, w)$ — линейные и предполагается, что $pF_{10}(0, 0)+qF_{01}(0, 0)\neq 0$, p и q — целые неотрицательные числа;

б) $F_{10}(0, 0)$ и $F_{01}(0, 0)$ — действительные числа, а $F_{00}(z, w)$ полином;

в) $F_{10}(0, 0)$ и $F_{01}(0, 0)$ — алгебраические числа, а $F_{00}(z, w)$ — аналитическая функция в бицилиндре $|z|<R$ и $|w|<R$.

3. Уравнение типа (1), при $n\geqslant 2$, имеет бесконечное множество решений вида (4) в предположении, что:

а) определяющий полином $Q(\lambda, \mu)$ и полином $Q(\lambda+p, \mu+q)$ не имеют общих нулей ни при каких неотрицательных целых p и q, $p+q\geqslant 1$, хотя бы для одной пары (λ, μ), удовлетворяющей уравнению (3);

б) $Q(\lambda, \eta)$ либо сам неприводим, либо имеет хотя бы один неприводимый делитель степени выше первого;

в) $F_{n0}(0, 0)\neq 0$, $F_{0n}(0, 0)\neq 0$ и $F_{j\,k-j}(z, w)\equiv\mathrm{const}$ при $k>n-l$, где l -наибольшая кратность корней уравнения $\sum_{j=0}^{n} F_{j\,n-j}(0, 0)X^{n-j}=0$.

4. Результаты, указанные в пунктах 1 и 2 имеют место и на случай любого числа независимых комплексных переменных. Таким образом, существование аналитических решений вида (4), уравнения (1), когда условие (2) выполняется, установлено полностью.

О ГЕОМЕТРИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. И. Близникас

Хорошо известно, что вопросы неголономной геометрии тесно связаны с геометрией систем дифференциальных уравнений.

Пусть $L_n^{(p)}$ пространство линейных элементов порядка p, структурные уравнения которого имеют вид ($i, j=1, 2, \ldots, n, a, b=1, 2, \ldots, p$)

$$D\omega^i=\omega^k\Lambda\omega_k^i,$$

$$D\,\mathfrak{D}^{(a)i}=\mathfrak{D}^{(b)k}\Lambda\,\mathfrak{D}_{(b)k}^{(a)i}+\omega^k\Lambda\,\mathfrak{D}_k^{(a)i},$$

где

$$\mathfrak{D}_{(b)k}^{(a)i}=\frac{\partial\,\mathfrak{D}^{(a)i}}{\partial\,v^{(b)k}}$$

и $v^{(a)i}$ -локальные координаты линейного элемента высшего порядка. Тогда r-мерная поверхность L_r пространства $L_n^{(p)}$ определяется системой уравнений

$$(\mathfrak{A}=1, 2, \ldots, \dim L_n^{(p)}-1)$$

$$f^{\mathfrak{A}}(x, v^{(1)k}, \ldots, v^{(p)k})=0. \tag{1}$$

Дифференциальные уравнения поверхности (1) можно представить в следующем виде

$$f_i^{\mathfrak{A}}\,\omega^i+f_{(a)i}^{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{D}^{(a)i}=0,$$

$$(df_{(a)i}^{\mathfrak{A}}-f_{(b)k}^{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{D}_{(a)i}^{(b)k})\,\Lambda\,\mathfrak{D}^{(a)i}+(df_i^{\mathfrak{A}}-f_k^{\mathfrak{A}}\omega_i^k-f_{(a)k}^{\mathfrak{A}}\mathfrak{D}_i^{(a)k})\,\omega^i=0.$$

Заметим, что величины $f_i^{\mathfrak{A}}, f_{(a)i}^{\mathfrak{A}}$ образуют поле дифференциально-геометрического объекта.

Определение. Пространство $L_n^{(p)}$ с фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом $f_i^{\mathfrak{A}}$, $f_{(a)i}^{\mathfrak{A}}$

$$df_i^{\mathfrak{A}}-f_k^{\mathfrak{A}}\omega_i^k-f_{(a)k}^{\mathfrak{A}}\mathfrak{D}_i^{(a)k}=f_{ik}^{\mathfrak{A}}\omega^k+f_{i(a)k}^{\mathfrak{A}}\mathfrak{D}^{(a)k},$$

$$df_{(a)i}^{\mathfrak{A}}-f_{(b)k}^{\mathfrak{A}}\mathfrak{D}_{(a)i}^{(b)k}=f_{(a)ik}^{\mathfrak{A}}\omega^k+f_{(a)i(b)k}^{\mathfrak{A}}\mathfrak{D}^{(b)k}, \tag{2}$$

назовем неголономной поверхностью NL_r пространства $L_n^{(p)}$ типа L_r.

Под геометрией системы дифференциальных уравнений (1) будем понимать геометрию неголономной поверхности NL_r. Если уравнения (1) заданы с точностью до линейных пре образований, определенных невырожденной матрицей $\| A_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}} \|$, т. е. если уравнения $f^{\mathfrak{A}}=0$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}f^{\mathfrak{B}}=0$ эквиваленты, то под геометрией систем, эквивалентных системе (1), будем понимать геометрию пространства $L_n^{(p)}$, оснащенного дифференциально-геометрическим объектом $F_i^{\mathfrak{A}}$, $F_{(a)i}^{\mathfrak{A}}$, структурные уравнения которого отличаются от структурных уравнений дифференциально-геометрического объекта $f_i^{\mathfrak{A}}$, $f_{(a)i}^{\mathfrak{A}}$ только тем, что в левые части соответствующих дифференциальных уравнений входят дополнительные члены

$$F_k^{\mathfrak{B}}\Theta_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}} \quad \text{и} \quad F_{(a)k}^{\mathfrak{B}}\Theta_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}},$$

где $\Theta_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$ — инвариантные формы группы GL ($\dim L_n^{(p)}-1$, R).

Некоторым классам систем дифференциальных уравнений соответствуют „цилиндрические" неголономные поверхности, т.е. такие, которые определяются полями дифференциально-геометрических объектов, заданных на „естественных" подпространствами пространства $L_n^{(p)}$.

Рассмотрены частные случаи систем дифференциальных уравнений и некоторые конкретные классы многообразий, оснащенные при помощи пфаффовых форм (они образуют не вполне интегрируемые системы дифференциальных уравнений). Приведем примеры.

1. Пусть $G(n, m)$ -многообразие Грассмана проективного пространства P_n. Если мы рассмотрим r -параметрическое семейство m -мерных плоскостей пространства P_n ($1\leqslant r\leqslant (m+1)(n-m)$, $1\leqslant m\leqslant n-1$), то этому семейству $G(n, m, r)$ всегда соответствует вполне интегрируема система пфаффовых уравнений (ω_p^α — главные формы m -мерной плоскости $(\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{m+1})$):

$$\Lambda_\alpha^{ap}\,\omega_p^\alpha=0 \qquad \begin{pmatrix} a=1, 2, \ldots, r; \\ p, q=1, \ldots, m+1;\ \alpha=m+2, \ldots, n+1 \end{pmatrix}.$$

Тогда неголономное многообразие $NG(n, m, r)$ типа $G(n, m, r)$ можно определить при помощи системы пфаффовых форм

$$\Theta^a = \Lambda^{ap}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{p},$$

т.е. неголономным многообразием $NG(n, m, r)$ является многообразие Грассмана $G(n, m)$, оснащенное системой пфаффовых форм Θ^a (или дифференциально-геометрическим объектом Λ^{ap}_{α}, который является фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом первого порядка для голономного многообразия $G(n, m, r)$).

Если $n=3$, $m=1$ и $r=1$, то получаем неголономный комплекс $NG(3, 1, 1)$, и поле пфаффовой формы $\Theta = \Lambda^{p}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{p}$ на $G(3, 1)$ задается при помощи объекта

$$d\Lambda^{p}_{\alpha} - \Lambda^{p}_{\beta}\omega^{b}_{\alpha} + \Lambda^{q}_{\alpha}\omega^{p}_{q} = \Lambda^{pq}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{q}.$$

2. Пусть $\mathfrak{M}_n$ -пространство аффинной связности. Если на $\mathfrak{M}_n$ задано поле пфаффовой формы

$$\Theta = \Lambda_i\omega^i,$$

то пространство $\mathfrak{M}_n$, оснащенное этим полем формы, назовем неголономной гиперповерхностью пространства аффинной связности (в этом случае объект Λ_i является ковектором).

О ГЕОМЕТРИИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

З. И. Лупейкис

Рассмотрена квазилинейная система дифференциальных уравнений следующего вида:

$$a^{\alpha}_{i}(x^j)v^{(2)i} + h^{\alpha}(x^j, v^{(1)j}) = 0$$

$$(\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots m;\ i, j, \ldots = 1, 2, \ldots n), \tag{1}$$

где в голономном репере

$$v^{(1)i} = \frac{dx^i}{dt}, \qquad {}^{(2)i} = \frac{d^2x^i}{dt^2}.$$

Система дифференциальных уравнений (1) является частным случаем системы дифференциальных уравнений, рассмотренной в [2].

Функции $a^{\alpha}_{i}(x^j)$ и $h_{\alpha}(x^j, v^{(1)j})$ образуют дифференциально-геометрический объект $(a^{\alpha}_{i}, h^{\alpha})$ на пространстве линейных элементов второго порядка $L^{(2)}_{n}$, система дифференциальных уравнений которого имеет вид:

$$\nabla a^{\alpha}_{i} = a^{\alpha}_{ij}w^j,$$

$$\nabla h^{\alpha} + a^{\alpha}_{i}\omega^{i}_{kl}v^{(1)k}v^{(1)l} = h^{\alpha}_{i}\omega^{i} + h^{\alpha}_{(1)i}\Theta^{(1)i}. \tag{2}$$

Геометрией системы (1) назовем геометрию пространства $L^{(2)}_{n}$ с дифференциально геометрическим объектом $(a^{\alpha}_{i}, h^{\alpha})$.

При $m=n+1$ с помощью ковектора m_{α}, компоненты которого являются решением системы

$$a^{\alpha}_{i}m_{\alpha} = 0 \tag{3}$$

и определяются с точностью до скалярной функции λ ($\tilde{m}_{\alpha} = \lambda m_{\alpha}$), где $d\lambda = \lambda_i\omega^i$, из величин a^{α}_{ij} можно построить тензор:

$$a_{ij} = a^{\alpha}_{ij}m_{\alpha} \tag{4}$$

и симметрический тензор

$$b_{ij} = a_{ij}, \tag{5}$$

охватываемые подобъектом $(a_i^\alpha,\ a_{ij}^\alpha)$ фундаментального дифференциально-геометрического объекта второго порядка $(a_i^\alpha\ h^\alpha)$.

Величины X^l_{ji}, определенные следующим образом:

$$X^l_{ji}=\frac{1}{2}\,b^{kl}(b_{jki}+b_{kij}-b_{ijk}), \qquad (6)$$

где b_{ijk} -компоненты продолжения тензора b_{ij}, называются коэффициентами внутренней связности тензора b_{ij}.

Дифференцируя выражение (6), получаем:

$$\nabla X^l_{ji}-\omega^l_{ji}=X^l_{jip}\omega^p. \qquad (7)$$

При конформных преобразованиях тензора $(b_{ij}:\ \tilde{b}_{ij}=\lambda b_{ij}$, где $\lambda=\lambda\,(x)$, коэффициенты X^l_{ji} преобразуются по закону:

$$\tilde{X}^l_{ji}=X^l_{ji}+G^{es}_{ji}\tilde{\lambda}_s, \qquad (8)$$

где

$$\tilde{\lambda}_s=\frac{\lambda_s}{\lambda},$$

$$G^{es}_{ji}=\frac{1}{2}\,(\delta^s_j\delta^l_i+\delta^s_i\delta^s_i\delta^l_i-b^{ls}b_{ji}).$$

При помощи неголономного ковариантного дифференцирования [1] построены ковариантные векторные поля:

$$\psi_l=\varphi_s\cdot\overset{*}{p}{}^s_l,$$

$$\overset{*}{\psi}_l=\overset{*}{\varphi}_s\cdot\overset{*}{q}{}^s_l, \qquad (9)$$

преобразующиеся при конформных преобразованиях тензора b_{ij} по закону:

$$\tilde{\psi}_l=\psi_l-\tilde{\lambda}_l,$$

$$\tilde{\overset{*}{\psi}}_l=\overset{*}{\psi}_l-\tilde{\lambda}_l. \qquad (10)$$

где

$$\varphi_s=b^{ij}\,(\overset{X}{D}{}^*_s\overset{X}{D}{}^*_j a^\alpha_i)\,m_\alpha\,;$$

$$\overset{*}{\varphi}_s=b^{ij}\,(\overset{X}{D}{}^*_j\overset{X}{D}{}^*_s a^\alpha_i)\,m_\alpha, \qquad (11)$$

а $\overset{*}{p}{}^s$ и q^s_l — тензоры, обратные для тензоров:

$$p^t_s=\frac{2-n}{2}\,b^{lt}a_{ls}+n\delta^t_s,$$

$$q^t_s=\frac{1}{2}\,(b^{lj}a_{lj}\delta^t_s+b^{tl}a_{sl}-b^{tl}a_{ls})+\delta^t_s. \qquad (12)$$

Этим полям соответствуют симметрические объекты аффинных связностей:

$$\underset{\psi}{\Lambda}{}^k_{ji}=X^k_{ji}+G^{kl}_{ji}\psi_l,$$

$$\underset{\overset{*}{\psi}}{\Lambda}{}^k_{ji}=X^k_{ji}+G^{kl}_{ji}\overset{*}{\psi}_l, \qquad (13)$$

инвариантные относительно конформных преобразований тензора b_{ij}.

Для случая $a^\alpha_{[ij]}=0$ построены ковекторные поля:

$$\varphi'_s=\frac{2}{2+n}\,a^{ij}\,(\overset{X}{D}_s\overset{X}{D}_j a^\alpha_i)\,m_\alpha,$$

$$\overset{*}{\varphi}{}'_s=\frac{2}{2+n}\,a^{ij}\,(\overset{*}{D}_j\overset{*}{D}_s a^\alpha_i)\,m_\alpha,$$

где a^{ij}-тензор, обратный тензору a_{ij}, а $\overset{*}{D}_j$ -символ неголономного ковариантного дифференцирования.

Ковекторным полям φ'_s и $\overset{*}{\varphi}'_s$ соответствуют симметрические аффинные связности $\underset{\varphi'}{\Lambda}{}^l_{ji}$ и $\underset{\overset{*}{\varphi}'}{\Lambda}{}^l_{ji}$, инвариантные относительно конформных преобразований тензора a_{ij}.

Литература

1. В. И. Близникас, Некоторые внутренние геометрии гиперповерхности аффинной связности, Лит. матем. сб., IV, № 2 (1964), 165–181.
2. З. И. Лупейкис, Третья Прибалтийская геометрическая конференция (Тезисы докладов), Паланга, 1968, 107–108.

НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ И РАСШИРЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ОПОРНЫХ ЛИНЕАРОВ ЛИНЕАРНОЙ СВЯЗНОСТИ

Ю. Шинкунас

Рассматривается пространство опорных линеаров $L_{n,v}$ [2] с линеарной связностью, определенной формами [3]:

$$\underset{\beta}{\overset{A}{\tilde{\omega}}}{}^\alpha_\gamma = \underset{\beta}{\overset{A}{\omega}}{}^\alpha_\gamma + \underset{\beta}{\overset{A}{\overset{*}{\Gamma}}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}\omega^\varepsilon + \underset{BD}{\overset{A}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\overset{D}{\tilde{\Theta}}{}^\varepsilon. \tag{1}$$

Определение 1. Однопараметрическое семейство опорных элементов $x^\alpha = x^\alpha(t)$, $\overset{A}{v}{}^\alpha = \overset{A}{v}{}^\alpha(t)$ назовем путем, если вдоль него касательный вектор $\frac{dx^\alpha}{dt}$ переносится параллельно в смысле связности $\overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$, при параллельном переносе $\overset{A}{v}{}^\alpha$ в смысле связности $\underset{B}{\overset{A}{\overset{*}{\Gamma}}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon}$, т.е

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}\dfrac{dx^\beta}{dt}\dfrac{dx^\gamma}{dt} = 0, \\ \dfrac{d\overset{A}{v}{}^\alpha}{dt} + \underset{\beta}{\overset{A}{\overset{*}{\Gamma}}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon}\overset{B}{v}{}^\varepsilon\dfrac{dx^\gamma}{dt} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{N}\left(\underset{A}{\overset{A}{\overset{*}{\Gamma}}}{}^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{C\delta^\alpha_\gamma}{N+cn}\underset{A}{\overset{A}{\overset{*}{\Gamma}}}{}^\varepsilon_{\beta\varepsilon}\right).$$

Вводится нормальные координаты, т.е. такие координаты, в которых уравнение (2_1) принимает вид

$$y^\alpha = b^\alpha t, \qquad \left(b^\alpha = \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)_{t=0}\right),$$

и определяется расширение любого диффеденциального геометрического объекта $\Omega^\mu(x^\alpha, \overset{A}{v}{}^\varepsilon)$ следующим образом [4]:

$$(\Omega^\mu_{,\alpha})_Q = (\partial^\Gamma_\alpha\check{\Omega}^\mu)_0. \tag{3}$$

Используя базисную производную (3), можно записать

$$(\Omega^\mu_{,\alpha})_Q = \left(\frac{\partial\check{\Omega}^\mu}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial\check{\Omega}^\mu}{\partial\overset{A}{\check{v}}{}^\varepsilon}\underset{\beta}{\overset{\varepsilon A}{\Gamma}}{}_{\alpha\gamma}\overset{\beta}{\check{v}}{}^\gamma\right)_0. \tag{3'}$$

Определение 2. k-ую базисную производную от компонент $\Omega^\mu(x^\alpha, \overset{A\gamma}{\check{v}})$ дифференциального геометрического объекта в нормальной системе координат (y), вычисленную в точке, которой эта система соответствует, будем называть компонентами в системе (x) k-го расширения объекта Ω^{μ} в этой точке и обозначим

$$(\Omega^{\mu}{}_{,\alpha_1,\ldots,\alpha_k})_a=(\overset{\Gamma}{\partial}_{\alpha_k}\ldots\overset{\Gamma}{\partial}_{\alpha_1}\check{\Omega}^{\mu})_0. \qquad (4)$$

Отметим, что так определенные расширения не симметричны по индексам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. А. П. Урбонас [4] рассматривал симметричные расширения в пространстве опорных элементов плоской линейной связности. Определяется нормальный тензор k-го порядка, как k-ое расширение $\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{(\beta\gamma)}$, формулируются и доказываются теоремы замены и приведения для дифференциальных инвариантов пространства опорных линеаров линеарной связности, аналогичные теоремам [4].

Литература

1. Б. Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пр-ве тензорных опорных элементов, Учен. зап. Казанского Гос. ун.-та, т. 118, кн. 4, 1958, 75–147.
2. Ю. Шинкунас, О пространстве опорных линеаров, Лит. матем. сб., VI, № 3(1966), 449–455.
3. Ю. Шинкунас, Третья Прибалтийская Геометрическая конференция. Тезисы докладов, 1968, 173.
4. А. П. Урбонас, О дифференциальных инвариантах пространства опорных элементов, Учен. зап. Казанского Гос. ун-та, т. 128, кн. 3, 1966, 115–133.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ ИНВАРИАНТНЫХ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Ионушаускас

В докладе рассматривается вопрос совпадения геодезических линий инвариантной аффинной связности в однородном пространстве с экстремалями инвариантной финслеровой метрики, заданной в этом же пространстве. Критерий совпадения выражается в виде условия инвариантности локальной индикатрисы метрики относительно некоторой линейной группы, тесно связанной с группой голономии аффинной связности.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КАТЕГОРИЙ МИКРОПУЧКОВ

А. Матузявичюс

Рассматривается категория G -микропучков, объектами которой являются G -микропучки, а морфизмами – G -отображения этих G -микропучков.

Пусть группа G действует без неподвижных точек на пространство B. Естественным образом получаем непрерывное отображение $B f\!\to B/G$, где B/G — пространство орбит.

Пусть $\psi\,(E, B/G, i, j)$ — любой микропучек с базисом B/G, тогда микропучек ψ и отображение f индуцируют G — микропучек ψ' над B. Рассматриваются две категории: категория микропучков ψ над $B/G - \Psi_{B/G}$ и категория индуцированных G -микропучков Ψ_G.

Если любому микропучку $\psi \in \Psi_{B/G}$ сопоставим индуцированный G -микропучек $\psi' \in \Psi_G$ и любому отображению $f \in \Psi_{B/G}$ сопоставим индуцированное отображение $f' \in \Psi_G$, то это сопоставление дает ковариантный функтор категории $\Psi_{B/G}$ в категорию Ψ_G.

Далее строится обратный функтор категории Ψ_G в категорию $\Psi_{B/G}$.

Показывается, что композиция этих двух функторов является эквивалентностью категории Ψ_G с категорией $\Psi_{B/G}$.

Рассматривается еще одна эквивалентность категорий микропучков. Пусть G' подгруппа группы G и B – есть G' – пространство. Тогда G – пространство $G \times G' B$ получается из произведения $G \times B$ с помощью отождествления $(g, b) \sim (gg^{-1}, gb)$.

Пусть теперь $\psi(E, G\times_{G'}B, i, j)$ — G — микропучек над $G\times_{G'}B$, тогда ограничение G — микропучка ψ над $G'\times_{G'}B$ является G' — микропучек над B. Этим определяется функтор категории Ψ''_G в категорию Ψ'_G. При помощи продолжения G' — микропучка над B строится обратный функтор $\Psi_{G'}\to\Psi''_G$.

Показывается так же, что композиция этих двух функторов является эквивалентностью. Таким образом и функторы $\Psi_{G'}$, Ψ''_G эквивалентны.

О ДВИЖЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОБЩЕЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

А. П. Урбонас

Рассматривается пространство опорных элементов [1], где опорным объектом служит ковектор U_k. Это пространство будем обозначать U_n.

Аффинная связность в U_n задается объектом $(\Gamma^i_{jk}(x, u), C^{ij}_k(x, u))$. В [2] было показано, что в случае неусеченной связности $(c^{ij}_k\neq 0)$ U_n не допускает групп движений порядка $r>n^2$, $n\geqslant 4$. Оказалось, что этот результат можно усилить.

Теорема. *Максимальный порядок групп движений, допускаемых пространством U_n общей аффинной связности, равен n^2-n+2, $n\geqslant 7$.*

Литература

1. Б. Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов, Уч. зап. Казанского ун-та, т. 118, кн. 4, 75—146, 1958.
2. А. П. Урбонас, Автоморфизмы пространства гиперплоскостных элементов, Третья Прибалтийская Геометрическая конференция, Тезисы докладов, Паланга, 1968.

РОМБИЧЕСКИЕ СЕТИ ИЗ СФЕР В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Падервинскас

Сеть, описываемая вектором $\vec{r}\,(u^1, u^2, u^3)$, называется ромбической, если

$$\vec{r}^{\,2}_{u^1}:\vec{r}^{\,2}_{u^2}:\vec{r}^{\,2}_{u^3}=A(u^2, u^3):B(u^1, u^3):C(u^1, u^2).$$

Три однопараметрические семейства сфер

$$\vec{r}^{\,2}-2\vec{a}_i\vec{r}+2b_i=0 \qquad (i, j, k=1, 2, 3), \tag{1}$$

где

$$\vec{a}_i=\{a^1_i, a^2_i, a^3_i\}, \qquad a^j_i=a^j_i(u^i), \qquad b_i=b_i(u^i) \quad (\text{по } i \text{ не суммировать}),$$

описывают ромбическую сеть тогда и только тогда, если

$$\left(\vec{r}\,\frac{d\vec{a}_1}{du^1}-\frac{db_1}{du^1}\right):\left(\vec{r}\,\frac{d\vec{a}_2}{du^2}-\frac{db_2}{du^2}\right):\left(\vec{r}\,\frac{d\vec{a}_3}{du^3}-\frac{db_3}{du^3}\right)=A:B:C. \tag{2}$$

Из равенства (2) следует, что

$$A=C_1\varphi_2(u^2)\varphi_3(u^3),$$

$$B=C_2\varphi_1(u^1)\varphi_3(u^3),$$

$$C=C_3\varphi_1(u^1)\varphi_2(u^2).$$

После замены параметров

$$u^{i'}=\int\limits_{U_0}^{U^i}\frac{\varphi_i}{c_i}\,du^i$$

из уравнений (2) следует:

$$\frac{\dfrac{da_j^i}{du^{j'}}-\dfrac{da_k^i}{du^{k'}}}{a_j^i-a_k^i}=\frac{\dfrac{db_j}{du^{j'}}-\dfrac{db_k}{du^{k'}}}{b_j-b_k}\,.$$

Исследование системы (3) показывает, что сферы (1) (при фиксированном i) принадлежат одному пучку сфер.

К ВОПРОСУ РАЗВИТИЯ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

И. Тейшерскис

Основная часть доклада посвящена методике введения степеней с дробными показателями и преподаванию действий степеней с рациональными показателями в IX классе.

Традиционное определение степени с дробным показателем $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ предлагается заменить следующим: степенью положительного числа a с дробным показателем $\frac{m}{n}$ (где n — натуральное, а m — целое число) называется положительное число ($a^{\frac{m}{n}}>0$), n-я степень которого равна a^m, т.е. $(a^{\frac{m}{n}})^n=a^m$, где $a>0$ и $a^{\frac{m}{n}}>0$.

Теорему о существовании $a^{\frac{m}{n}}$ в средней школе можно строго и не доказывать. Достаточно показать, что можно найти, например, $2^{\frac{2}{3}}$, с любой точностью. Пусть $2^{\frac{2}{3}}=x$, то $x^3=4$ и $1<x<2$. Разделив интервал (1, 2) на 10 равных частей, можно установить, что $1{,}5<x<1{,}6$ и т.д.

Теорема о единственности $a^{\frac{m}{n}}$ и основное свойство степени с рациональным показателем ($a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}$) легко доказываются на основании следующего положения: если a и в положительные и n целое число, то из $a^n=b^n$ следует, что $a=b$.

При помощи этого положения можно проверить и 5 известных правил действий со степенями для случая дробных показателей.

Понятие корня предлагается ввести после рассмотрения степеней с рациональными показателями. Знак радикала целесообразно употреблять только для обозначения алгебраического корня, и не употреблять для обозначения арифметического значения корня. Т. е. не следует писать, например

$$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}\right),$$

а писать

$$\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}\right).$$

Изучать действия с корнями не нужно. Достаточно установить, что в поле действительных чисел, для $a>0$, $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ если n нечетные, и $\sqrt[n]{a^m}=\pm a^{\frac{m}{n}}$ при n четном.

ВОПРОСЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ В IX—XI КЛАССАХ

А. Анеляускене

Постоянно развивающийся процесс математизации всех отраслей народного хозяйства требует все больше специалистов, умеющих применять в своей работе математические методы. В связи с увеличивающимся количеством математической информации выдвигается важный вопрос — вопрос быстрого и глубокого усвоения основ элементарной математики.

При переходе к новым программам математического обучения появляются два важных вопроса:

а) преподавание в IX—XI классах такого материала, который максимально облегчил бы изучение высшей математики;

б) усовершенствование методов обучения, чтобы за предусмотренное время (уделять большее количество часов на преподавание математики практически нет возможностей) ученики сумели бы усвоить более широкий математический курс.

Развитие математических способностей учеников — одно из главных условий успешного усвоения математики. При исследовании математических способностей как структурной части следует отметить интересы в процессе их формирования и развития. Следовало бы выделить три ступени развития интересов:

а) увлечение ученика математикой;

б) ученик испытывает удовольствие в процессе математической деятельности (при решении задач, моделировании, чтении математической литературы и т.д.);

в) математика становится целью его жизни.

Путем исследований, проведенных в 1-ой школе-интернате г. Вильнюса, установлено что первая ступень интересов — увлечение математикой — достигается очень легко.

Изучая биографии выдающихся математиков, проводя интересные диспуты по применению математики во всех отраслях народного хозяйства, участвуя в математических викторинах, соревнованиях, решая задачи логического содержания и математические софизмы, ученики проявляют глубокое увлечение математикой.

При развитии математических способностей нельзя разрешить ни одному ученику остановиться на том, что уже достигнуто. Если ученик легко усваивает преподаваемый материал, необходимо сейчас же перед ним ставить более сложные задачи. Необходимо постоянно развивать такие качества, как трудоспособность, постоянность, без которых немыслима деятельность ни одного математика.

При Московском и Ленинградском университетах действуют заочные математические школы, в которых учились все исследуемые нами ученики IX—XI классов. Заочное обучение открыло широкие возможности для самостоятельной работы, приучило учеников регулярно читать дополнительную математическую литературу, искать материал, решать задачи, а главное — помогло сформироваться твердым навыкам систематической работы. Поэтому можно утверждать, что исследуемые нами ученики вполне достигли вторую ступень развития интересов.

Способными математиками мы считали тех учеников, которые решали нестандартные задачи оригинальными методами; одну и ту же задачу они умели решать несколькими способами.

При дальнейшем исследовании математических способностей учеников IX—XI классов мы предусматривали:

а) вести более широкую пропаганду по основанию классов математического профиля, включая в них самых способных к математике восьмиклассников;

б) для развития математических способностей использовать факультативные занятия и внеклассную деятельность учащихся;

в) исследовать оптимальные пути формирования математических способностей, при условном поиске способа, путем которого будущая система математического обучения действительно формировала бы математическое мышление учеников, математические способности;

г) улучшать подготовку будущих студентов (учеников IX–XI классов) к учебе в высших школах; добиться, чтобы кафедры математики высших учебных заведений оказывали квалифицированную, деловую и методическую помощь не только учителям, но и ученикам.

О НЕКОТОРЫХ ИСЧИСЛЕНИЯХ КАНГЕРОВСКОГО ТИПА

Р. А. Плюшкявичюс

С. Кангер в [1] построил секвенциальный вариант классического исчисления предикатов первого порядка с равенством, обладающий рядом свойств, особенно существенных для решения задачи о поиске логического вывода (сохранение логическими правилами вывода „свойства подформульности" отсутствие структурных правил вывода, обратимость всех правил вывода и др.).

В настоящем сообщении строятся аналогичные секвенциальные варианты для некоторых фрагментов исчисления Идельсона $NK_1^{\natural}$ (см. [2]).

§ 1. Рассмотрим исчисление $G^!$, которое, кроме постулатов, выражающих основные свойства предикатов применимости алгорифма и условного равенства (обозначаемых посредством ! и $\simeq$, соответственно), содержит обычные правила для символов $\supset$, &, $\neg$ и $\forall$. Исчисление $G^!$ задается нижеприводимыми постулатами.

Схемы аксиом

1) $A\to A$; 2) $\to r\simeq r$; 3) $\to\neg(k\simeq l)$, где k, l — различные слова в алфавите $\{0, |\}$; 4) $\to\Delta_0$ где Δ_0 — произвольное слово в алфавите $\{0, |\}$ или слово вида $\widehat{\alpha}$ (см. [2, стр. 234)]; 5($\to$ $\to(![t]_r^a\supset !r)$, где t — произвольный предметный терм, содержащий по крайней мере одно хождение переменной a (это условие обозначим посредством (*)); 6)$\to((\neg !r\&\neg !s)\supset(r\simeq s))$.

Правила вывода для условного равенства и логические правила для символов $\supset$, &, $\neg$ и $\forall$ — обычного натурального типа (см., напр., [2]).

Построим кангеровский вариант (обозначаемый через $P_0^!$) исчисления $G^!$, задаваемого следующими постулатами.

Схемы аксиом

1) $\Pi_1 A\,\Pi_2\to\Omega_1 A\,\Omega_2$; 2)$\Pi\to\Omega_1(r\simeq r)\,\Omega_2$; 3) $\Pi_1(k\simeq l)\,\Pi_2\to\Omega$; 4) $\Pi\to\Omega_1\,!\,\Delta_0\,\Omega_2$.

Правила вывода исчисления $P_0^!$ состоят из двух групп.

Первая группа:

$$1.1\quad \frac{[\Pi]_s^r(r\simeq s)[\Sigma]_s^r\to[\Omega]_s^r}{\Pi(r\simeq s)\Sigma\to\Omega}\,;\qquad 1.2\quad \frac{[\Pi]_s^r(s\simeq r)[\Sigma]_s^r\to[\Omega]_s^r}{\Pi(s\simeq r)\Sigma\to\Omega}\,;$$

$$1.3\quad \frac{[\Pi\to\Omega_1\,\Omega_2]_r\,[t]_r^a\,!\,r}{\Pi\to\Omega_1\,!\,r\,\Omega_2},$$

где t — произвольный предметный терм, удовлетворяющий условию (*)

$$1.4\quad \frac{\Pi(r\simeq s)\to\ !\,r\,!\,s\,\Omega_1\,\Omega_2\,\Omega_3}{\Pi\to\Omega_1\,!\,r\,\Omega_2\,!\,s\,\Omega_3}\,;$$

Вторая группа — логические правила — такие же, как в [3].

Теорема 1. *Исчисления $P_0^!$ и $G^!$ равнообъемны.*

§2. Рассмотрим исчисление $I^!$, язык которого получается из языка исчисления $G^!$ путем присоединения логических символов V и $\exists$; а также нового предиката $\in\frac{\text{нат}}{n\div\xi}$ (принадлежность натуральному ряду (см. [2])), $n=0, 1, 2, \ldots$; ξ или натуральное число, такое, что $n\leqslant\xi$, или знак ∞. Исчисление $I^!$ задается нижеприводимыми постулатами.

Схемами аксиом исчисления $I^!$ являются схемы 1) — 6) исчисления $G^!$, а также схемы аксиом XI 2) и IX 3) работы [2].

Правила вывода получаются из правил вывода исчисления $G^!$ путем присоединения постулатов III 4), VI 1), VII 4) и VII 4′) работы [2].

Построим кангеровский вариант (обозначенный посредством $P_1^!$) исчисления $I^!$. Исчисление $P_1^!$ представляет собой расширенное многосукцедентное конструктивное исчисление предикатов, задаваемое следующими постулатами.

Схемами аксиом исчислений $P_1^!$ являются схемы 1) — 4) исчисления $P^!$, а также следующая: 5) $\Pi \to \Omega_1 \left(i \in \frac{\text{нат}}{n \div \xi} \right) \Omega_2$, где $n \leqslant i \leqslant \xi$.

Правила вывода исчисления $P_1^!$ состоят из двух групп.

Первая группа

В первую группу входят правила 1.1)—1.4) исчисления $P^!$, а также следующие:

$$1.5 \quad \frac{\Pi_1 (t \simeq n) \Pi_2 \to \Omega_j \ldots, \Pi_1 (t \simeq m) \Pi_2 \to \Omega}{\Pi_1 \left(t \in \frac{\text{нат}}{n \div m} \right) \Pi_2 \to \Omega}, \text{ где } n \leqslant m;$$

$$1.6 \quad \frac{\Pi \neg E \to \Omega_1 \Omega_2}{\Pi \to \Omega_1 E \Omega_2},$$

где E — элементарная формула;

$$1.7 \quad \frac{\Pi \to \Omega_1 (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \Omega_2}{\Pi \to \Omega_1 \exists \sigma \left(\sigma \in \frac{\text{нат}}{1 \div k} \right) \& (\sigma \simeq 0 \mid \supset A_1) \& \ldots \& \left((\sigma \simeq k) \supset A_k) \right) \Omega_2}.$$

Вторая группа — логические правила. Строятся аналогично логическим правилам конструктивного многосукцедентного исчисления предикатов без структурных правил вывода (см., напр. [4]).

Теорема 2. *Исчисления $P_1^!$ и $I^!$ равнообъемны.*

Литература

1. С. Кангер, Упрощенный метод доказательства для элементарной логики, в. кн. „Математическая теория логического вывода", М., 1967, 200—207.
2. А. В. Идельсон, Исчисления конструктивной логики с подчиненными переменными, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1964, 72, 228—343.
3. Р. А. Плюшкявичюс, Об одном варианте прикладного исчисления конструктивной логики, в кн. „Математика, Физика, Кибернетика", (научн. конф. молодых ученых Лит. ССР), Вильнюс, 1967, 64—67.
4. H. B. Curry, Foundation of mathematical logic, New York, 1963.

К ВОПРОСУ О ВАРИАНТАХ НОРМАЛЬНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ ИДЕЛЬСОНА

Р. А. Плюшкявичюс

Известно, что традиционное конструктивное исчисление предикатов не в состоянии формализовать сколь-нибудь содержательную теорию конструктивной математики, в частности, в рамках традиционного конструктивного исчисления предикатов невозможно произвести формализованное изложение уже самых начальных глав конструктивного математического анализа. Более удовлетворительными в этом отношении являются такие расширения конструктивной логики, в которых помимо постулатов традиционного конструктивного исчисления предикатов содержатся и некоторые другие, систематически применяемые в конструктивной математике логические переходы, например, переходы, соответствующие отдельным шагам-алгоритмам построения конструктивной расшифровки математических суждений, переходы, связанные с условным равенством термов и др. (см. [1]). Необходимо также, чтобы эти расширения содержали целый ряд постулатов, описывающих работу конкретных алгоритмов, нужных для построения доказательств теорем конструктивной математики. Несколько вариантов таких исчислений конструктивной логики — исчисления NK_1^{Σ} и NK_2^{Σ} —были построены А. В. Идельсоном в [2]. Вопрос об обосновании исчислений NK_1^{Σ} и NK_2^{Σ} сведен Идельсоном (теорема 12.3.1 из [2]) к обоснованию значительно более простых исчислений NN_1 и NN_2, соответственно. Выводы в исчислениях NK_2^{Σ} и NN_1 (NK_1^{Σ} и NN_2) строятся в форме, близкой к форме обычного математического доказательства. Однако с точки зрения задачи о поиске вывода секвенций эти исчисления имеют ряд существенных недостатков (наличие необратимых правил вывода, наличие структурных правил и др.). Поэтому желательно иметь для этих исчислений варианты, лучше приспособленные для поиска вывода, например, варианты, близкие по типу к исчислению Генцена без правила сечения (см. [3]).

В [4] построен вариант этого рода для несущественного сужения исчисления NN_1. В настоящем сообщении строятся генценовские варианты для исчислений NN_1 и NN_2.

Построим генценовский вариант (обозначенный через P_1) исчисления NN_1, не содержащий структурных правил, все правила вывода которого обратимы.

Схемами аксиом исчисления P_1 являются схемы 1) – 5) исчисления P_0 (см. [4]), а также следующие:

$$6)\ \Pi\to\Omega_1[(r\simeq s)|^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{T_1\ldots T_n}]\Omega_2, \qquad \text{где}$$

термы r и s составляют аксиомную пару типа 1.μ ($\mu=1, \ldots, 6$) (см. [4]), $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – список попарно различных переменных, а $T_1, \ldots, T_n$ – список произвольных термов, подобный списку переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (см. [1]);

$$7)\ \Pi\to\Omega_1\Big(\langle W^2_1\rangle\Big(\langle B\rangle(t)\Big)\simeq\Lambda\Big)\Omega_2 \qquad \text{(см. [2 : §1])}.$$

Правила вывода исчисления P_1 состоят из трех групп.

Первая группа.

В первую группу входят правила 1.1 – 1.8 исчисления (см. [4]), а также следующие правила вывода, соответствующие схеме аксиом XI 4) (см. [2]):

$$1.9\quad \frac{\Pi\to(\langle B\rangle(t)\simeq 0\,|\,)\,(t\simeq\Lambda)\,\Omega_1\,\Omega_2}{\Pi\to\Omega_1\,(t\simeq\Lambda)\,\Omega_2};$$

$$1.10\quad \frac{\Pi_1(t\simeq\Lambda)\,\Pi_2\to(\langle B\rangle(t)\simeq 0\,|\,|\,)\,\Omega}{\Pi_1\,(t\simeq\Lambda)\,\Pi_2\to\Omega};$$

$$1.11\quad \frac{\Pi\to(t\simeq\Lambda)\,\Omega;\ \Pi\,(t\simeq\Lambda)\to\Omega}{\Pi\to\Omega}.$$

Вторая группа – логические правила – так же, как и в [4].

Третья группа состоит только из правил 3.2.1 и 3.2.2 исчисления P_0.

Генценовский вариант (обозначенный через P_2) исчисления NN_2 получается из исчисления P_1 путем присоединения следующих правил вывода:

$$1.12\quad \frac{\Pi\to A^*\,!\,\langle V^i_i\rangle\,(\Phi)\,\Omega_1\,\Omega_2}{\Pi\to\Omega_1\,!\,\langle V^i_i\rangle\,(\Phi)\,\Omega_2}, \qquad \text{где } i=1, \ldots, k;$$

$$1.13\quad \frac{\Pi\to A^*\Big(\Phi\,\big(\langle V^1_1\rangle(\Phi)\,\square\ldots\square\,\langle V^k_k\rangle(\Phi)\big)\simeq\Lambda\Big)\,\Omega_1\,\Omega_2}{\Pi\to\Omega_1\Big(\Phi\,\big(\langle V^1_1\rangle(\Phi)\,\square\ldots\square\,\langle V^k_k\rangle(\Phi)\big)\simeq\Lambda\Big)\,\Omega_2},$$

где

$$A^*\rightleftarrows\forall\gamma_1\ldots\gamma_k\,!\,\Phi\,(\gamma_1\div k)\,\&\,\neg\forall\gamma_1\ldots\gamma_k\neg\,\big(\Phi\,(\gamma_1\div k)\simeq\Lambda\big).$$

Правила 1.12 и 1.13 соответствуют схеме аксиом XI 5) (см. [2]), которая выражает принцип конструктивного подбора, выдвинутый А. А. Марковым в [5].

Теорема. *Исчисление* $\mathbf{NN_1}$ (*исчисление* $\mathbf{NN_2}$) *равнообъемно исчислению* $\mathbf{P_1}$ (*соответственно, исчислению* $\mathbf{P_2}$).

Литература

1. Н. А. Шанин, О конструктивном понимании математических суждений, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1958, 52, 226–311.
2. А. В. Идельсон, Исчисления конструктивной логики с подчиненными переменными, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1964, 72, 228–343.
3. Г. Генцен, Исследования логических выводов, в кн. Математическая теория логического вывода, М., 1967, 9–76.
4. Р. А. Плюшкявичус, Секвенциальный вариант исчисления конструктивной логики для нормальных формул без структурных правил вывода, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1967, 4, 174–188.
5. А. А. Марков. О непрерывности конструктивных функций, Успехи матем. наук, 1954, IX, № 3(61), 226–230.

13. 10824

КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

А. Ясюлёнис

1. Даются два способа вычисления коэффициентов тр. (тригонометрического) ряда функции $\sqrt{f(x)}$, когда известны коэффициенты тр. ряда

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}(a_i\cos ix+b_i\sin ix), \tag{1}$$

такой функции, что $f^4(x)$ интегрируема.

2. Ищутся коэффициенты тр. многочлена

$$\sqrt{S_n(x)}=\frac{z_0}{2}+\sum_{i=1}^{n}(z_i\cos ix+u_i\sin ix), \tag{2}$$

который аппроксимирует функцию $\sqrt{f(x)}$.

3. Составляются:

а) строковая матрица $\|B_n\|$ из первых n коэффициентов при косинусах и синусах

$$\|B_n\|=\|a_n,\ \ldots\ a_2,\ a_1,\ \frac{a_0}{2},\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_n\|, \tag{3}$$

б) строковая матрица $\|Z_n^{(k)}\|$ из искомых коэффициентов, полученных в к-том приближении итерационного процесса

$$\|Z_n^{(k)}\|=\left\|z_n^{(k)},\ \ldots,\ z_2^{(k)},\ z_1^{(k)},\ \frac{z_0^{(k)}}{2},\ u_1^{(k)},\ u_2^{(k)},\ \ldots,\ u_n^{(k)}\right\|, \tag{4}$$

в) матрица $\|P(Z_n^{(k-1)})\|$ порядка $2n+1$ из коэффициентов $k-1$-го приближения

$$\|P(Z_n^{(k-1)})\|=\left\|\begin{array}{ccccccccccccc}
z_0^{(k-1)} & \cdots & z_{n-4}^{(k-1)} & z_{n-3}^{(k-1)} & z_{n-2}^{(k-1)} & z_{n-1}^{(k-1)} & \frac{1}{2}z_n^{(k-1)} & -u_{n-1}^{(k-1)} & -u_{n-2}^{(k-1)} & -u_{n-3}^{(k-1)} & -u_{n-4}^{(k-1)} & \cdots & 0 \\
\hdashline
0 & \cdots & z_0^{(k-1)} & z_1^{(k-1)} & z_2^{(k-1)} & z_3^{(k-1)} & \frac{1}{2}z_4^{(k-1)} & -u_3^{(k-1)} & -u_2^{(k-1)} & -u_1^{(k-1)} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & z_1^{(k-1)} & z_0^{(k-1)} & z_1^{(k-1)} & z_2^{(k-1)} & \frac{1}{2}z_3^{(k-1)} & -u_2^{(k-1)} & -u_1^{(k-1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \frac{1}{2}z_2^{(k-1)} & z_1^{(k-1)} & z_0^{(k-1)} & z_1^{(k-1)} & \frac{1}{2}z_2^{(k-1)} & -u_1^{(k-1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1^{(k-1)} & z_0^{(k-1)} & \frac{1}{2}z_1^{(k-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_0^{(k-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{2}u_1^{(k-1)} & 0 & \frac{1}{2}u_1^{(k-1)} & z_0^{(k-1)} & z_1^{(k-1)} & z_2^{(k-1)} & z_3^{(k-1)} & \cdots & z_{n-1}^{(k-1)} \\
0 & \cdots & -\frac{1}{2}u_2^{(k-1)} & -u_1^{(k-1)} & 0 & u_1^{(k-1)} & \frac{1}{2}u_2^{(k-1)} & z_1^{(k-1)} & z_0^{(k-1)} & z_1^{(k-1)} & z_2^{(k-1)} & \cdots & z_{n-2}^{(k-1)} \\
0 & \cdots & -u_1^{(k-1)} & 0 & u_1^{(k-1)} & u_2^{(k-1)} & \frac{1}{2}u_3^{(k-1)} & z_2^{(k-1)} & z_1^{(k-1)} & z_0^{(k-1)} & z_1^{(k-1)} & \cdots & z_{n-3}^{(k-1)} \\
0 & \cdots & 0 & u_1^{(k-1)} & u_2^{(k-1)} & u_3^{(k-1)} & \frac{1}{2}u_4^{(k-1)} & z_3^{(k-1)} & z_2^{(k-1)} & z_1^{(k-1)} & z_0^{(k-1)} & \cdots & z_{n-4}^{(k-1)} \\
\hdashline
0 & \cdots & u_{n-4}^{(k-1)} & u_{n-3}^{(k-1)} & u_{n-2}^{(k-1)} & u_{n-1}^{(k-1)} & \frac{1}{2}u_n^{(k-1)} & z_{n-1}^{(k-1)} & z_{n-2}^{(k-1)} & z_{n-3}^{(k-1)} & z_{n-4}^{(k-1)} & \cdots & z_0^{(k-1)}
\end{array}\right\|$$

4. Строится нестационарный итерационный процесс

$$z_0^{(k-1)} \| Z_n^{(k)} \| = \| B_n \| - \| Z_n^{(k-1)} \| \left(\| P(Z_n^{(k-1)}) \| - z_0^{(k-1)} \| E \| \right), \tag{6}$$

с нулевым приближением

$$\| Z_n^{(0)} \| = \| 0, \dots 0, 0, \; 1 \;, 0, 0, \dots 0 \| . \tag{7}$$

5. Даются условия сходимости итерационного процесса. Доказывается сходимость коэффициентов тр. многочлена (2) к коэффициентам ряда $\sqrt{f(x)}$.

6. Второй итерационный процесс построен на последовательном решении систем уравнений

$$\| B_n \| = \| Z_n \| \| P(Z_n) \|, \tag{8}$$

где матрица $\| P(Z_n) \|$ структуры (5).

7. Второй итерационный процесс отличается более быстрой сходимостью.

ОБ УСКОРЕНИИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

М. Сапаговас

Рассматриваются некоторые теоретические и практические вопросы ускорения сходимости итерационных процессов при решении системы нелинейных разностных уравнений.

Пусть

$$F(x)=0 \tag{1}$$

является системой нелинейных разностных уравнений, соответствующей нелинейному дифференциальному уравнению эллиптического типа второго или четвертого порядка с дивергентной главной частью. Пусть система (1) решается следующим итерационным методом:

$$A_n X_{n+1} = A_n X_n - \lambda F(x_n). \tag{2}$$

Требуется подобрать операторы A_n (в частности, не зависит от n) так, чтобы они имели по возможности простейший вид, а итерационный процесс (2) сходился бы достаточно быстро.

Дано обоснование выбора в качестве оператора A_n такого разностного оператора, котогрый соответствует линейному самосопряженному дифференциальному оператору второго или четвертого порядка с переменными коэффициентами, зависящими в общем случае от номера итерации.

Изложенная теория иллюстрируется на примере уравнения минимальной поверхности.

РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРЯМЫХ

Б. Рудокайте

Рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка

$$Au \equiv -\frac{\partial}{\partial x_1}[a_1(x_1, x_2, u, p_1, p_2)] - \frac{\partial}{\partial x_2}[a_2(x_1, x_2, u, p_1, p_2)] +$$

$$+ a_0(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = f(x_1, x_2) \tag{1}$$

в конечной области $\bar{\Omega} = [0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1]$ с однородным краевым условием на контуре Γ **области** $\bar{\Omega}$:

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = p_2, \quad p_0 = u, \quad A(0) = 0.$$

Пусть при всех значениях $x \in \Omega$, при любых u, p_1, p_2 и при любых вещественных ξ_0, ξ_1, ξ_2 выполнено неравенство:

$$\alpha \sum_{i=0}^{2} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=0}^{2} \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \leqslant \beta \sum_{i=0}^{2} \xi_i^2. \quad \frac{\partial a_i}{\partial p_j} = \frac{\partial a_j}{\partial p_i},$$

где α, β — положительные постоянные.

Предполагается, что задача (1), (2) имеет единственное решение, непрерывное в замкнутой области $\bar{\Omega}$, и обладающее всеми, требуемыми по ходу изложения, производными.

Покроем область $\bar{\Omega}$ системой прямых Ω_h с шагом h и параллельных оси x_1:

$$x_2 = kh, \; k=0, 1, \ldots, N+1, \; (N+1)\, h = 1.$$

Дифференциальное уравнение (1) аппроксимируется системой дифференциально-разностных уравнений:

$$A_h u_h = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[a_1\left(x_1, x_2, u(i), \frac{\partial}{\partial x_1} u(i), \frac{\nabla_{x_2} u(i) + \nabla_{\bar{x}_2} u(i)}{2}\right)\right] -$$

$$-\frac{a_2^{\left(i+\frac{1}{2}\right)} - a_2^{\left(i-\frac{1}{2}\right)}}{h} + a_0\left(x_1, x_2, u(i), \frac{\partial}{\partial x_1} u(i), \frac{\nabla_{x_2} u(i) + \nabla_{\bar{x}_2} u(i)}{2}\right) = f(x_1, x_2), \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N, \; u(0) = u(N+1) = 0, \; u(i)|_{x_1=0} = u(i)|_{x_1=1} = 0,$$

где

$$a_2^{\left(i-\frac{1}{2}\right)} = a_2\left(x_1, x_2, \frac{u(i)+u(i-1)}{2}, \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u(i)+u(i-1)}{2}\right), \nabla_{\bar{x}_2} u(i)\right),$$

$$\nabla_{x_2} u(i) = \frac{u(i+1) - u(i)}{h}, \; \nabla_{\bar{x}_2} u(i) = \frac{u(i) - u(i-1)}{h}, \; u(i) = u(x_1, ih),$$

которая получается, при замене, на каждой прямой системы Ω_h уравнения (1) дифференциально-разностным уравнением, применяя разностную аппроксимацию одной частной производной.

Показано, что эта система дифференциально-разностных уравнений аппроксимирует (1) уравнение с погрешностью порядка $0(h^2)$.

Это уравнение методом прямых решается в статье [1]. Там оно аппроксимируется другой системой дифференциально-разностных уравнений, которая дает погрешность аппроксимаций порядка $0(h)$.

Для дифференциальных уравнений система разностных уравнений решается во многих статьях, в том числе и в статье [2].

Применяя результаты статей [1] и [2], доказываются существование, единственность решения u_h системы дифференциально-разностных уравнений (3), сходимость итерационного процесса к единственному решению системы (3) и сходимость решения u_h к решению задачи (1), (2) при $h \to 0$.

Литература

1. А. Д. Ляшко и М. М. Карчевский, Исследование метода прямых для нелинейных эллиптических уравнений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, № 3.
2. М. П. Сапаговас, К вопросу о решении квазилинейных эллиптических уравнений методом конечных разностей, Лит. матем. сб., V, № 4 (1965).

АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С. Девулис

1. Постановка задачи

Задачей выпуклого кусочно-линейного программирования назовем задачу минимизации выпуклой кусочно-линейной функции

$$f(x) \tag{1}$$

при условиях

$$A\ x'+u'=0, \tag{2}$$

$$x \in x, \tag{3}$$

где функция $f(x)$ определена на ограниченном L-мерном многогранном подмножестве x определяемого системой линейных неравенств

$$y_j=(b_j,\ x)+c_j \geqslant 0,\ j=1,\ \ldots,\ l, \tag{4}$$

L -мерного эвклидова пространства R^L, А-матрица размеров $T\times L$, ранг которой $r<L$ и $u-T$-мерный вектор.

Выпуклая кусочно-линейная функция представляется в следующем виде:

$$f(x) = \max_{1\leqslant k\leqslant K} \{(b_k,\ x)+a_k\}. \tag{5}$$

2. Условия оптимальности

Так как множество допустимых векторов $D=\{x : Ax'+u'=0,\ x\in X\}$, которое предполагается не пустым, является N -мерным ($N=L-r$), то при алгоритмической реализации решения задачи целесообразно перейти к N -мерному эвклидову пространству R^N.

Условия оптимальности представим в следующем виде:

$$\tilde{f}^{+}_{y_i}(0)\geqslant 0,\quad \tilde{f}^{-}_{y_i}(0)\leqslant 0,\quad i\in I(\tilde{y}), \tag{6}$$

где $|I(\tilde{y})|=N$, $I(\tilde{y})$ — множество индексов координат y_i, каждая из которых определяется одним из следующих уравнений:

$$y_j=(b_j,\ x)+c_j,\ j=1,\ \ldots,\ l.$$

$$y_j=(b_p-b_t)x'+(a_p-a_t),\ j=t\cdot K-(1+2+\ \ldots\ +t)-(K-p),\ l,\ p>t,\ p=1,\ \ldots,K-1,$$

$$t=2,\ \ldots,\ K, \tag{7}$$

вектора $\tilde{y}\in R^N$, $\tilde{f}^{+}_{y_i}(0)$, $\tilde{f}^{-}_{y_i}(0)$—производные по переменной y_i функции $\tilde{f}(\tilde{y})$, соответственно, справа и слева в точке $\tilde{y}=0$.

Предполагается, что задача невырождена, т. е. каждый вектор одновременно удовлетворяет не более N уравнений системы (7).

3. Алгоритм

Пусть известно множество $I(\tilde{y}^{(0)})<\{1,\ \ldots,\ l\}$ где $|I(\tilde{y}^{(0)})|=N$ и связь между векторами $x^{(0)}\in R'^{<}$, $\tilde{y}^{(0)}\in R^N$, т. е.

$$x^{(0)}=D\tilde{y}^{(0)\prime}+D_0', \tag{8}$$

где D -матрица размеров $L\times N$, D_0-L -мерный вектор.

Также имеем:

$$y_j=(\tilde{b}_j,\ \tilde{y})+\tilde{c}_j,\ j=1,\ \ldots,\ l, \tag{9}$$

$$(\tilde{b}_k,\ \tilde{y})+\tilde{a}_k,\ k=1,\ \ldots,\ k. \tag{10}$$

Алгоритм состоит из однотипных итераций, выполняемых поочередно для каждой координаты вектора $\bar{y}$. Для s -той итерации алгоритма выполняются следующие действия:

1) выбирается индекс

$$k_0 = K = \left\{ \{k : \tilde{a}_k = \max_{1 \leqslant k \leqslant K} \{\tilde{a}_k = \}\right\},$$

для которого

$$|\tilde{B}k_0 p| = \min_{k \in K} \{\tilde{b}_{kp} : \tilde{b}_{kp} \neq 0\}.$$

Здесь $p = p(s)$ — номер столбца коэффициентов уравнений (9) при p-той координате y_{i_p} вектора $\bar{y}^{(s-1)}$;

2) вычисляются величины:

$$\Delta_r = -\frac{\tilde{c}_r}{\tilde{b}_{rp}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant l} \left\{ -\frac{\tilde{c}_i}{\tilde{b}_{ip}} : \tilde{b}_{ip} < 0 \right\} \geqslant 0,$$

$$\Delta_t = -\frac{\tilde{c}_t}{\tilde{b}_{tp}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \left\{ -\frac{\tilde{c}_i}{\tilde{b}_{ip}} : \tilde{b}_{ip} > 0 \right\} \leqslant 0;$$

3) составляется последовательность индексов $k_0, \ldots, k_{v+1}$ такая, что

$$|\Delta_i| = \left| -\frac{\tilde{a}_{k_{i+1}} - \tilde{a}_{k_i}}{\tilde{b}_{k_{i+1}p} - \tilde{b}_{k_i p}} \right| = \min_{k \notin G^{(i)}} \left\{ \left| \frac{\tilde{a}_k - \tilde{a}_{k_i}}{\tilde{b}_{kp} - b_{k_i p}} \right| \right\},$$

где

$$G^{(0)} = \left\{ k : \frac{b_{kp}}{\tilde{b}_{k_0 p}} \geqslant 1 \right\}, \; G^{(i+1)} = G^{(i)} + \{k_{i+1}\}, \; i = 0, \ldots, v-1$$

и

$$\frac{\tilde{b}_{k_{v+1} p}}{\tilde{b}_{k_v p}} \leqslant 0 \text{ или } \Delta_r < \Delta_v, \text{ или } \Delta_t > \Delta_v;$$

4) составляется уравнение

$$y_z = (\tilde{b}, \bar{y}^{(s-1)}) + \tilde{a}, \tag{11}$$

где

$$\tilde{a} = \tilde{c}_r, \; \tilde{b} = \tilde{b}_r, \; z = r, \text{ если } \Delta_r < \Delta_v,$$

$$\tilde{a} = \tilde{c}_t \; \tilde{b} = \tilde{b}_t, \; z = t, \text{ если } \Delta_t > \Delta_v,$$

$$\tilde{a} = \tilde{a}_{k_{v+1}} - \tilde{a}_{k_v}, \; \tilde{b} = \tilde{b}_{k_{v+1}} - \tilde{b}_{k_v} \text{ и } z = l + K \cdot \tilde{K},$$

$$(1 + 2 + \ldots + \tilde{K}) - (K - k^*), \; \tilde{k} = \min\{k_v, k_{v+1}\}, \; \tilde{k} = \max\{k_v, k_{v+1}\},$$

если $\Delta_r > \Delta_v > \Delta_t$;

5) уравнение (11) решается относительно переменной y_{i_p} и полученное выражение для y_{i_p} подставляется в уравнения (9) и выражения линейных функций (10).

Вычисления прекращаются, если $I(\bar{y}^{(s)}) = I(\bar{y}^{(s+t)})$, $t = 1, \ldots, N-1$, а оптимальный (один из оптимальных) вектор определяется из соотношения (8), где $y_i = \tilde{c}_i$, $i \in I(\bar{y}^{(0)})$.

Литература

1. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин, Новые направления в линейном программировании, Сов. радио, 1966 г.
2. Г. С. Девулис, Об одной задаче кусочно-линейного программирования, Труды Академии наук Лит. ССР, серия Б, т. 2.

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ КУБИЧЕСКОГО ЧИСЛОВОГО ПОЛЯ

К. Булота

Рассматриваемая задача является частью более общей задачи – рассмотрения поведения L -функций и дзета-функций неполного модуля алгебраического числового поля. Под неполным модулем понимается модуль M алгебраического числового поля K степени n, содержащий $m<n$ линейно независимых чисел. Наряду с изучением дзета-функции обычного типа, построенной на модуле M размерности m:

$$Z_m^*(s) = \sum_{\alpha\in M}{}^{*} (N\alpha)^{-s},$$

где знак * означает, что из каждой системы ассоциированных с α чисел берется только по одному представителю, представляют интерес функции

$$Z_m(s) = \sum_{\alpha\in M} (N\alpha)^{-s},$$

где α суммируется по всем целым числам модуля M, включая и ассоциированные. Такие функции, построенные на неполных модулях, по-видимому, почти не изучались.

В данном докладе были рассмотрены некоторые аналитические свойства функций $Z_m^*(s)$ и $Z_m(s)$ на неполных модулях кубического чисто вещественного нормального числового поля. Очевидно, что функции $Z_1^*(s)$ и $Z_1(s)$ нетрудно свести к обычной дзета-функции Римана, поэтому ряд следствий для них получается тривиальным способом. Более содержательное рассмотрение функций $Z^*(s)$ и $Z_2(s)$. Абсолютная сходимость ряда $Z_2(s)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s>\frac{2}{3}$ устанавливается применением теоремы Туэ. Обе эти функции являются регулярными во всей плоскости комплексного переменного s, за исключением точки $s=2/3$, где они имеют простой полюс. Функция $Z_2^*(s)$ аналитически продолжена влево от прямой $\mathrm{Re}\, s=2/3$ посредством функционального уравнения, связывающего функцию $Z^*(s)$ с гамма-функциями и гипергеометрическими рядами.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ВЕРОЯТНОСТНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Й. Кубилюс

Дается обзор применения метода производящих рядов Дирихле в вероятностной теории чисел. В частности, доказывается следующая

Теорема. *Пусть $f(m)(m=1,2,\ldots)$ комплекснозначная мультипликативная функция. Предположим, что $|g(m)|\leqslant 1$ $(m=1,2,\ldots)$ и что при некоторой постоянной $\varkappa$ ряд по простым p*

$$\sum_p \frac{f(p)-\varkappa}{p}$$

сходится абсолютно. В этих условиях при $x\to\infty$

$$\sum_{m\leqslant x} f(m)=\frac{x(\ln x)^{\varkappa-1}}{\Gamma(\varkappa)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\varkappa}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)+O\left(x\sqrt{\frac{\ln\ln x}{\ln x}}\right).$$

Даются различные приложения этой формулы к задачам вероятностной теории чисел.

АНАЛОГ НЕРАВЕНСТВА ЛИУВИЛЛЯ

И. Киселюс

Теорема. *Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ – алгебраические числа, $i_1,i_2,\ldots,i_m$ – целые неотрицательные числа. Если $\alpha_1 i_1+\alpha_2 i_2+\ldots+\alpha_m i_m\neq 0$ то имеет место неравенство*

$$|i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+\cdots+i_m\alpha_m| > \frac{C}{(i_1+i_2+\cdots i_m)^n}, \qquad (1)$$

где $C>0$ – некоторая постоянная, независящая от $i_1,i_2,\ldots,i_m$, а n – натуральное число.

Доказательство. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_s \neq 0$; $s \leq m$. Выражение $\sum_{j=1}^{3} i_j \alpha_j$ представим в виде $\alpha_s \left(\sum_{j=1}^{s-1} i_1 \frac{\alpha_j}{\alpha_s} + i_s \right)$, и пусть $\frac{\alpha_j}{\alpha_s}$ являются нулями некоторых полиномов $P_j(x) = \sum_{k=0}^{n_j} a_{n_j-k} x^{n_j-k}$. Положим $i_j x = y$. Тогда

$$Q_j(y) = P_j\left(\frac{y}{i_j}\right) = P(x) = \sum_{k=0}^{n_j} \frac{a_{n_j-k}}{i_j^{n_j-k}} y^{n_i-k}$$

и уравнение $Q_j(y) = 0$ имеет корень $y = i_j \frac{\alpha_j}{\alpha_s}$.

Последовательно мы строим полиномы, среди нулей которых имеются и числа

$$i_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_s},\quad i_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_s} + i_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_s},\ \ldots$$

Продолжая процесс, на $(s-2)$-ом шагу, мы приходим к полиному

$$Q(y) = \prod_{j=1}^{s-1} \prod_{i_j=1}^{n=n_1 n_2 \cdots n_{s-1}} (y - \gamma_{i_1 i_2 \cdots i_{s-1}}) = \sum_{k=0}^{n} A_k y^{n-k}, \tag{2}$$

среди нулей которого $\gamma_{i_1 i_2 \cdots i_{s-1}}$, по построению, имеется нуль $\gamma_{11\cdots 1} = \sum_{j=1}^{s-1} i_j \frac{\alpha_j}{\alpha_s}$, причем коэффициенты A_k являются многочленами от $\frac{1}{i_1}, \frac{1}{i_2}, \ldots, \frac{1}{i_{s-1}}$ с рациональными коэффициентами, т. е.

$$A_k\left(\frac{1}{i_1}, \frac{1}{i_2}, \ldots, \frac{1}{i_{s-1}}\right) =$$

$$+ \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{s-1}=0}^{\nu_k} B_{k_1 k_2 \cdots k_{s-1}} \left(\frac{1}{i_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{i_2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{1}{i_{s-1}}\right)^{k_{s-1}}.$$

Умножим уравнение $Q(y) = 0$ на некоторый одночлен $\tilde{C} i_1^{p_1} i_2^{p_2} \cdots i_{s-1}^{p_{s-1}}$ с подходящими натуральными $p_1, p_2, \ldots, p_{s-1}$ и $\tilde{C}$ такими, чтобы получилось эквивалентное уравнение

$$Q^*(y) = \sum_{k=1}^{n} C_k y^{n-k} = 0, \tag{3}$$

где $C_k(i_1, i_2, \ldots, i_{s-1})$ — полиномы с целыми коэффициентами. Заметим, что не все $C_k(i_1, i_2, \ldots, i_{s-1})$ равны нулю, так как уравнению (3) удовлетворяет лишь конечное число корней, а именно: $\gamma_{i_1 i_2 \cdots i_{s-1}}$.

Теперь, разлагая $Q^*(y)$ по степеням $y + i_s$, получаем

$$Q^*(y) = \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_k(i_1, i_2, \ldots, i_s)(y+i_s)^k + \bar{Q}_0(i_1, i_2, \ldots, i_s) = 0. \tag{4}$$

Пусть $\bar{Q}_0 = \bar{Q}_1 = \cdots = \bar{Q}_{p-1} = 0$, а $\bar{Q}_p \neq 0$. Так как $|\bar{Q}_p(i_1, i_2, \ldots, i_s)| \geq 1$, а

$|\bar{Q}_k(i_1, i_2, \ldots, i_s)| < D \cdot (i_1 + i_2 + \cdots + i_s)^n$, $k = p+1, p+2, \ldots, n$, где $D>0$ постоянная, независящая от $i_1, i_2, \ldots, i_s$ то, при $y=\gamma_{11\ldots1}$ из (4) получаем неравенство

$$\sum_{j=p+1}^{n} |\gamma_{11\ldots1+i_s}|^j > \frac{1}{D\cdot(i_1+i_2+\cdots+i_s)^n},$$

из которого, с учетом того, что

$$\alpha_s(\varphi_{11\ldots1}+i_s)=i_1\alpha_1+i_2\alpha_2+\ \ldots\ +i_s\alpha_s,$$

легко следует утверждение теоремы.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ К ИЗУЧЕНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ СУММ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Мисявичюс

Будем пользоваться обозначениями, принятыми в [1].

Рассматриваются предельные законы распределения сумм сильно аддитивных функций:

$$\nu_n=\left\{\frac{f(m+a_1)-A_1(n)}{B_1(n)}+\ldots+\frac{f_s(m+a_s)-A_s(n)}{B_s(n)}<x\right\}. \qquad (1)$$

Методом моментов доказан частный случай теоремы 5.1 Й. Кубилюса [1] более общий чем в работе [2].

Теорема. *Пусть $f_1(m), \ldots f_s(m)$ — сильно аддитивные арифметические функции из класса H, для которых попарно выполняются $B_j/B_j=1+0$ (1); a_i -различные фиксированные целые неотрицательные числа ($i, j=1, \ldots n$). Для того чтобы закон распределения* (1) *сходился при $n\to\infty$ к предельному с дисперсией s необходимо и достаточно, чтобы существовала неубывающая функция $K(u)$ с вариацией s такая, что при $n\to\infty$ во всех ее точках непрерывности*

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{B_j^2(n)}\sum_{\substack{p\leq n\\ f_j(p)<u B_j(n)}}\frac{f_j(p)}{p}\to K(u).$$

Логарифм характеристической функции $\varphi(t)$ предельного закона вычисляется по формуле Колмогорова

$$\ln\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)\frac{1}{u^2}\,dK(u).$$

Литература

1. Й. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.
2. Г. Мисявичус, Применение метода моментов в вероятностной теории чисел, Лит. матем. сб., V, № 2 (1965).

К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ЭЙНШТЕЙНА НА ПРЯМОЙ $\sigma=\frac{1}{2}$

И. Урбялис

Пусть $\psi(m, n)=am^2+bmn+cn^2$, где a, b, c—целые вещественные числа, $a>0$, $c>0$, $b^2-ac<0$;

$$Z(s)=\sum_{m,n}{}' \psi^{-s}(m, n) \quad (s=\sigma+it),$$

где знаком $'$ обозначается, что из суммы исключается случай $m=n=0$.

Методом Титчмарша (1) доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $M \leqslant M' \leqslant 2M$, $N \leqslant N' \leqslant 2N$ и $L = \max(M, N)$. *Тогда имеет место оценка*

$$\sum_{m=M}^{M'} \sum_{n=N}^{N'} \psi^{-\frac{1}{2}-it}(m, n) \ll \frac{t \ln t}{L}$$

для всех L, *удовлетворяющих условию* $t^{\frac{1}{2}} \ll L \ll t$.

Теорема 2. *Пусть* $M \leqslant M' \leqslant 2M$, $N \leqslant N' \leqslant 2N$ *и* $L = \max(M, N) \leqslant t^{\frac{2}{3}}$. *Тогда имеет место оценка*

$$\sum_{m=M}^{M'} \sum_{n=N}^{N'} \psi^{-\frac{1}{2}-it}(m, n) \ll t^{\frac{1}{3}} \ln t.$$

Теорема 3. *Имеет место оценка*

$$Z\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll t^{\frac{1}{3}} \ln^3 t.$$

Литература

1. E. C. Titchmarsh, On Epstein's zeta-function, Proc. London, Math. Soc., 36 (1934), 485–500.

О НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Г. Маркшайтис

В сообщении изложено вычисление группы H, которая является средним членом в точной последовательности:

$$0 \to A_{\frac{Q}{2}} A_Q \to H \to Ш_2 \to 0,$$

где A_Q — группа рациональных точек эллиптической кривой $y^2 = x^3 - q^2x$, q -простое число, $q = 5\ (8)$, $Ш_2$-подгруппа группы Шафаревича-Тэйта, порожденная элементами второго порядка. H интерпретируется как группа специальных расширений поля рациональных чисел Q с группой Галуа $Z_2 \oplus Z_2$ и точками ветвления 2 и q, где Z_2 -циклическая группа 2-го порядка. Эти расширения соответствуют элементам одномерной группы когомологий $H'(G, \Delta_2)$, которые являются тривиальными над p-адическими полями Q_p где p отлично от 2 и q, G -группа Галуа алгебраического замыкания поля рациональных чисел Q, Δ_2-точки второго порядка кривой $y^2 = x^3 - q^2x$. Получается, что $H = Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$. Отсюда следует, что ранг r группы рациональных точек кривой $y^2 = x^3 - q^2x$ не превышает 1. Согласно гипотезе Тэйта, Шафаревича, Касссельса и Берча о конечности группы Ш, r должен быть равен 1, т.е. должна существовать точка бесконечного порядка на эллиптической кривой $y^2 = x^3 - q^2x$, q -простое число, $q \equiv 5\ (8)$. К сожалению, это можно подтвердить лишь некоторыми численными примерами.

ОБ ОДНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

А. К. Рауделюнас

Пусть $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n - k$ -мерные случайные величины, связанные в цепь Маркова с коэффициентом эргодичности

$$\alpha^{(n)} = 1 - \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \sup_{\omega, \bar{\omega} \in A} |P_\nu(\omega, A) - P_\nu(\bar{\omega}, A)| > 0,$$

где $P_\nu(\omega, A)$ — переходные вероятности.

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $|\vec{X}_\nu| \leqslant C^{(n)}$ *с вероятностью* 1 *при* $\nu=1, 2, \ldots, n$ *и распределение* $\vec{X}_\nu$ — *не вырождено. Тогда*

$$\sup_{\mathfrak{B}} |P_{\vec{S}_n}(\mathfrak{B}) - \Phi_n(\mathfrak{B})| \leqslant c(k) \left(\frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)} \sqrt{\inf\limits_{|\vec{t}|=1} \mathbf{D}\{\vec{S}_n, \vec{t}\}}} \right)^{\frac{1}{3}},$$

где

$$\vec{S}_n = \vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \ldots + \vec{X}_n \text{ и } \sup$$

берется по всем выпуклым измеримым (абсолютно) множествам $\mathfrak{B}$, $c(k) \leqslant ck^{\frac{7}{2}}$, *где* c — *абсолютная константа,* $\Phi_n(\mathfrak{B})$ — *нормальное распределение с теми же первыми и вторыми моментами, как и распределение* $\vec{S}_n$, $(\vec{S}_n, \vec{t})$ — *скалярное произведение векторов* $\vec{S}_n$ и $\vec{t}$.

Теорема 2. *Пусть* $M|X_{\nu j}^3| \leqslant M < \infty$, $j=1, 2, \ldots, k$, $\nu=1, 2, \ldots, n$ *и*

$$\inf_{|\vec{t}|=1} \mathbf{D}\{(\vec{X}_\nu, \vec{t})\} \geqslant \sigma^2 > 0, \quad \nu=1, 2, \ldots, n.$$

Тогда

$$\sup_{\mathfrak{B}} |P_{\vec{S}_n}(\mathfrak{B}) - \Phi_n(\mathfrak{B})| \leqslant c(k, \sigma, M) \frac{\ln n}{\alpha^{(n)2}\sqrt{n}},$$

где $c(k, \sigma, M) \leqslant c_1(\sigma, M) \cdot k^{\frac{7}{2}}$.

Литература

1. В. В. Сазонов, Исследования по многомерным и бесконечномерным предельным теоремам теории вероятностей, Докторская диссертация, 1968.

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

В. Паулаускас

Пусть $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{ik})$ $i=1, 2, \ldots n$ — независимые k-мерные ($k \geqslant 2$) величины с функциями распределения $F_i(x)$, $x \in R_k$ и $\mathbf{M}\xi_i = 0$.

Обозначим через σ_{ij}^2 дисперсию и через β_{ij} — третий абсолютный момент случайной величины ξ_{ij}, $i=1, 2, \ldots n$, $j=1, 2, \ldots k$, и далее:

$$B_{ni}^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ji}^2, \quad L_{3n}^{(i)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ji}}{B_{ni}^3},$$

$$S_n = \left(\frac{1}{B_{n1}} \sum_{j=1}^{n} \xi_{j1}, \ldots, \frac{1}{B_{nk}} \sum_{j=1}^{n} \xi_{jk} \right).$$

Пусть ξ_i — k-мерные независимые нормальные случайные величины с функцией распределения $\varphi_i(x)$, $M\xi_i' = 0$ и матрицей вторых моментов, равной соответствующей матрице величины ξ_i, а $S_n' = \left(\frac{1}{B_{n1}} \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_{j1}', \ldots, \frac{1}{B_{nk}} \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_{jk}'\right.$.

$F_{s_n}(x)$ и $\Phi_{S_n'}(x)$ — функции распределения сумм S_n и S'_n, соответственно.

Введем еще так называемые „псевдомоменты".

$$\nu_{ij} = \int (x)^3 \mid (F_i - \varphi_i)(dx) \mid, \quad W_{3n}^{(j)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \nu_{kj}}{B_{nj}^3}.$$

Теорема 1. *Для всех $n \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$\sup_{x \in R_k} \mid F_{S_n}(x) - \Phi_{S_n'}(x) \mid \leqslant C_1(k) \left(\sum_{i=1}^{k} W_{3n}^{(i)} \right)^{\frac{1}{4}},$$

где $C_1(k) \leqslant C_1 k^{\frac{13}{8}}$ и C_1 — абсолютная константа.

Утверждение теоремы обобщает одномерную оценку В. М. Золотарева, полученную в [3].

Из теоремы 1 и неравенств $\nu_{ij} \leqslant C_2 \beta_{ij}$ получается

Следствие. *Для всех $n \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$\sup_{x \in R_k} \mid F_{S_n}(x) - \Phi_{S_n}(x) \mid \leqslant C_2(k) \left(\sum_{i=1}^{k} L_{3n}^{(i)} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Введем величины γ_{jl}, $j=1, 2, \ldots, n$, $l=1, 2, \ldots, k$ следующим образом. Пусть

$$\gamma_{jl} \geqslant 1, \quad \tilde{\beta}_{jl} = \beta_{jl} \gamma_{jl}, \quad \tilde{D}_{nl} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\beta}_{jl}, \quad \tilde{L}_{3n}^{(l)} = \frac{\tilde{D}_{nl}}{B_{nl}^3} \quad \text{и} \quad \gamma_{jl}$$

подобраны так, что для всех $j=1, 2, \ldots, n$ и $l=1, 2, \ldots, k$ имеют место неравенства

$$\frac{\tilde{\beta}_{jl}}{\sigma_{jl}^2} \leqslant \frac{\tilde{D}_{nl}}{B_{jl}^2}.$$

Теорема 2. *Для всех $n \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$\sup_{x \in R_k} \mid F_{S_n}(x) - \Phi_{S_n'}(x) \mid \leqslant C_3(k) \left(\sum_{i=1}^{k} \tilde{L}_{3n}^{(i)} \right)^{\frac{1}{3}},$$

где $C_3(k) \leqslant C_3 k^{\frac{5}{3}}$ и C_3 — абсолютная константа (получено $C_3 = 7{,}4$).

Следствие. *Если величины ξ_i удовлетворяют условия*

$$\frac{\beta_{jl}}{\sigma_{jl}^2} \leqslant \frac{\sum_{p=1}^{n} \beta_{pl}}{B_{jl}^2} \qquad j=1, 2, \ldots, n, \; l=1, 2, \ldots, k, \tag{1}$$

то

$$\sup_{x \in R_k} \mid F_{S_n}(x) - \Phi_{S_n'}(x) \mid \leqslant C_3(k) \left(\sum_{i=1}^{n} L_{3n}^{(i)} \right)^{\frac{1}{3}}. \tag{2}$$

Если величины ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ распределены одинаково, то условие (1) выполняется, а (2) превращается в утверждение теоремы 3 из работы [1].

Сформулируем еще одну теорему, дающую оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме в одномерном случае.

Пусть ξ_k, $k=1, 2, \ldots, n$ — независимые случайные величины с функцией распределения $F(x)$, нулевым средним и $\sigma^2=\int x^2 dF(x)=1$. Через $\Phi(x)$ обозначим функцию распределения нормальной случайной величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Обозначим $S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, $F_n(x)$ функцию распределения S_n, и

$$\beta_3=\int |x|^3 dF(x), \quad \nu_3=\int |x|^3 d\,|(F-\Phi)(x)|.$$

Теорема 3. *Для всех n справедлива оценка*

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant C\,\frac{\max\left(\nu_3, \nu_3^{\frac{1}{4}}\right)}{\sqrt{n}}, \tag{3}$$

где C — абсолютная константа.

Если $\sigma^2\neq 1$, то (3) принимает следующий вид:

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x) \leqslant C\,\frac{\max\left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}, \left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}\right)^{\frac{1}{4}}\right)}{\sqrt{n}}, \tag{4}$$

где $F_n(x)$ — функция распределения величины $\tilde{S}_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$.

Теорема 3 является усилением классической теоремы Ляпунова, которая дает оценку

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant C\,\frac{\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}}. \tag{5}$$

Именно, если $\frac{\nu_3}{\sigma^3}>1$, то

$$\max\left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}, \left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}\right)^{\frac{1}{4}}\right)=\frac{\nu_3}{\sigma^3}\leqslant\frac{C_2\beta_3}{\sigma^3},$$

а если $\frac{\nu_3}{\sigma^3}\leqslant 1$, то

$$\max\left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}, \left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}\right)^{\frac{1}{4}}\right)=\left(\frac{\nu_3}{\sigma^3}\right)^{\frac{1}{4}}\leqslant 1\leqslant\frac{\beta_3}{\sigma^3},$$

поэтому из (4) следует (5).

Теоремы доказываются методом, опирающимся на идеи работ [1] и [2].

Автор благодарен научному руководителю проф. В. Статулявичусу и В. В. Сазонову за представление возможности ознакомиться с еще неопубликованным доказательством работы [1].

Литература

1. В. В. Сазонов, О скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, Теория вероят. и ее примен., т. XII, вып. 1 (1968).

2. H. Bergström, On y the Central Limit Theorem in the Case of Not Equally Distributed Random Variables, Stand. Aktuarietidskrift, No 1—2 (1949), pp. 37—62.

3. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее прим., т. IX, вып. 3, (1965).

ОДНА ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА С БОЛЬШИМИ УКЛОНЕНИЯМИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Э. В. Мисявичюс

Рассмотрим однородную цепь Маркова $\{\xi_n,\ n=1, 2, \dots\}$ с произвольным множеством возможных состояний Ω, выделенной на нем σ-алгеброй подмножеств $\mathfrak{F}$, переходной вероятностной функцией $P(w, A)$, $w\in\Omega$, $A\in\mathfrak{F}$, и начальным распределением $\pi(A)$, $A\in\mathfrak{F}$.

Условие 1: существует целое число $n_0\geqslant 1$ такое, что

$$\sup_{\omega,\,\tilde\omega,\,A} |\mathbf{P}^{(n_0)}(\omega, A)-\mathbf{P}^{(n_0)}(\tilde\omega, A)|=\delta, \quad 0<\delta<1; \tag{1}$$

$\mathbf{P}^{(n_0)}(\omega, A)$ — функция вероятностей перехода за n_0 шагов.

Тогда для всех $n\geqslant n_0$ существует стационарное распределение $\mathbf{P}(A)$, $A\in\mathfrak{F}$, и

$$\sup_{\omega,\,A} |\mathbf{P}^{(n)}(\omega, A)-\mathbf{P}(A)|\leqslant C\delta^n, \quad C>0 - \text{константа}$$

На множестве Ω определим измеримую вещественную функцию $X(\omega)$, $\omega\in\Omega$, и последовательность случайных величин $\{X_n=X(\xi_n),\ n=1, 2, \dots\}$, связанных в однородную цепь Маркова, полагая

$$F(x\mid\omega)=P\{X_{i+1}(\tilde\omega)<x\mid\xi_i=w\},$$

$$F_i(x)=P\{X_i(w)<x\},\ i=1, 2, \dots$$

Условие 2: существует условная плотность $p(x\mid\omega)$, непрерывная по x, измеримая по ω и равномерно ограниченная, т. е.

$$\sup_{\omega,\,X} p(x\mid\omega)<\infty. \tag{2}$$

Условие 3: при любом α, $0<\alpha<\frac{1}{6}$,

$$\sup_{\omega} \mathbf{M}_\omega \exp\{|X_1|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\}<\infty; \tag{3}$$

M_ω — условное математическое ожидание. Плотность нормированной суммы

$$S_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathbf{M}X_i),$$

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbf{M}\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathbf{M}X_i)\Big]^2,$$

обозначим через $P_n(x)$, а нормальную — через $\varphi(x)$.

Теорема. *Если выполнены условия* (1), (2) *и* (3), *то равномерно относительно* x, $x\in\Big[-\frac{n^\alpha}{\rho(n)}, \frac{n^\alpha}{\rho(n)}\Big]$ ($\rho(n)$ — *медленно возрастающая при* $n\to\infty$ *функция*)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n(x)}{\varphi(x)}=1.$$

Доказательство опирается на результаты В. А. Статулявичуса (см. [4]), С. В. Нагаева (см. [2] и [3]) и проводится как и для независимых случайных величин (см. [1]).

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, Москва, 1965.
2. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее примен., II, № 4 1957, 389—416.

3. С. В. Нагаев, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее примен., VI, № 1, 1961, 67—86.
4. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., X, № 4, 1965, 645—659.

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ В ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ РЕШЕТЧАТЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

П. Сурвила

Рассматривается последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots,$$

принимающих лишь целочисленные значения.

Пусть

$$P\{\xi_k=j\}=p_{k,j}, M_k(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{zj}\, p_{k,j},$$

$$P_n(N)=\mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_k=N\right\}.$$

Доказывается, что если рассматриваемая последовательность удовлетворяет условиям:

1) существуют положительные числа $l<L$ и A такие, что

$l\leqslant|M_k(z)\leqslant L$ для $|z|\leqslant A$ и $k=1, 2, \ldots$ (условие Крамера — Рихтера);

2) существует число c, $0<c<1$ такое, что

$$e^{hj}p_{k,j}[M_k(h)]^{-1}\leqslant c$$

для всех $k=1, 2, \ldots,$ и $j\leftarrow(-\infty, \infty)$ при $|h|<A$;

3)

$$\prod_{k=1}^{\infty} C_k(l)=0 \text{ при } l\geqslant 2 \text{ и } |h|<A,$$

где

$$C_k(l)=[M_k(h)]^{-1}\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{hrl}p_{k,rl},$$

то для $P_n(N)$ имеют место большие уклонения типа Крамера — Рихтера.

Метод доказательства аналогичен методу, использованному в [1].

Литература

1. В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероятн. и ее примен., 2,2 (1957), 214—229.
2. Ю. А. Розанов, О локальной предельной теореме для решетчатых распределений, Теория вероятн. и ее примен., 2,2 (1957), 278—281.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СУММ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Б. Куприте

Пусть имеется последовательность независимых неотрицательных неодинаково распределенных случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots,$$

принимающих лишь целочисленные неотрицательные значения.

Положим

$$S_0=0, \quad S_m=\sum_{l=1}^{m} \xi_l, \quad m=1, 2, \ldots,$$

Случайный процесс

$$N(t)=\max\{m\colon S_m<t\}, \quad t=0, 1, \ldots,$$

принято называть дискретным процессом восстановления.

Мы будем рассматривать последовательность

$$N_1(t), \; N_2(t), \; N_3(t), \ldots$$

независимых неодинаково распределенных дискретных процессов восстановления.

Обозначим

$$\bar{N}_n(t)=\frac{1}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}} \sum_{l=1}^{n} \Big(N_l(t)-\Lambda_l(t)\Big),$$

$$F_{n,t}(x)=\mathbf{P}\{\bar{N}_n(t)<x\}.$$

Здесь

$$\Lambda_l(t)=\mathbf{M}N_l(t), \quad \bar{\sigma}_n^2=\sum_{l=1}^{n} \frac{\mu_l^{(2)}-\mu_l^{(1)2}}{\mu_l^{(1)3}},$$

$$\mu_l^{(i)}=\mathbf{M}N_l^i(t).$$

Теорема. *Если* $\mu_l^{(3)}<\infty$ *и* $\mu\geqslant\inf\limits_{l}\mu_l^{(1)}>0$, $M=\sup\limits_{l}\mu_l^{(3)}<\infty$, *то*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |F_{n,t}(x)-\Phi(x)|= C\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{nt}}\right),$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

C — положительная константа, зависящая лишь от μ *и* M.

Литература

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л,. 1949.
2. А. О. Гельфонд, Оценка остаточного члена в предельной теореме для рекуррентных событий, Теор. вероятн. и ее прим., IX, 2 (1964), 327—331.
3. Б. Григелионис, О центральной предельной теореме для сумм процессов восстановления, Лит. матем. сб., IV, № 2 (1964), 197—201.
4. А. Алешкявичене, Центральная предельная теорема для сумм дискретных процессов восстановления, Лит. матем. сб., VII, № 3 (1967).
5. В. Лютикас, О центральной предельной теореме, Лит. матем. сб., VI, № 3 (1966), 381—391.

ИНФОРМАЦИЯ О ТРЕТЬЕЙ ПРИБАЛТИЙСКОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

С 7 по 12 июня 1968 г. в курортном городе Паланга (Литовская ССР) проходила III Прибалтийская геометрическая конференция (первая состоялась в 1963 г., в городе Тракай, вторая — в 1965 г., в городе Тарту), организавонная Вильнюсским Государственным педагогическим институтом и Вильнюсским Государственным университетом им. В. Капсукаса.

Оргкомитет конференции в составе Л. Я. Березиной, В. И. Близникаса (председатель), П. И. Вашкаса (секретарь), К. И. Гринцевичюса, А. И. Дрейманаса, А. Ионушаускаса (зам. председателя), П. И. Катилюса, Ю. Г. Лумисте, Д. К. Петрушкевичюте, М. О. Рахула был избран на заключительном заседании Второй Прибалтийской геометрической конференции.

Основная задача конференции заключалась в том, чтобы подвергнуть широкому обсуждению состояние ведущихся в Прибалтийских республиках исследований по различным вопросам дифференциальной геометрии, установить более глубокие научные связи с основными геометрическими центрами СССР.

В настоящее время в Прибалтике работают четыре научно-исследовательских семинара по геометрии (Тарту, Рига, Калининград, Вильнюс).

Значительная часть научных исследований Прибалтийских геометров относится к линейчатой дифференциальной геометрии, многообразий, вложенных в клейновые пространства (работы К. И. Гринцевичюса, В. С. Малаховского, Ю. Г. Лумисте, П. И. Вашкаса, Л. А. Тульметс, Л. Я. Березиной и др.), к теории поверхностей клейновых пространств и пространств с групповой связностью (Ю. Г. Лумисте, Р. Р. Муллари, В. И. Близникас, Л. И. Стиклаките, Р. В. Восилюс, Л. Я. Березина, Д. И. Рускол и др.), к дифференциальной геометрии обобщенных пространств и вложенных в них многообразий (Ю. Г. Лумисте, В. И. Близникас, А. П. Урбонас, Ю. И. Шинкунас, М. О. Рахула, И. Х. Медведевайте и др.), к глобальной геометрии дифференцируемых многообразий (Ю. Г. Лумисте, М. О. Рахула, Р. В. Восилюс и др.), к аналитическим методам в геометрии (Ю. Г. Лумисте, М. О. Рахула, В. И. Близникас, В. С. Малаховский и др.), к вопросам существования инвариантных связностей на группах Ли (Д. К. Петрушкевичюте, Р. В. Восилюс), к вопросам существования инвариантных метрик (финслеровых и римановых) в однородных пространствах (А. Ионушаускас), к геометрии систем дифференциальных уравнений (В. И. Близникас, З. Ю. Лупейкис), к вопросам теории структур (А. Л. Крищюнайте, В. И. Близникас).

К началу конференции были изданы тезисы докладов, представленных на конференцию, под названием „Третья Прибалтийская геометрическая конференция", Паланга, 1968.

В работе конференции приняло участие 167 геометров (на первой — 72, на второй — 95) из 25 городов СССР: из Москвы (25), Вильнюса (23), Минска (12), Киева (11), Казани (10), Харькова (10), Риги (9), Калининграда (9), Тарту (8), Томска (8), Саратова (7), Горького (6) Тбилиси (4), Еревана (3), Иркутска (3), Орехово-Зуево (3), Черновцов (3), Великих Лук (2), Могилева (2), Пензы (2). На конференцию прибыли по одному делегату из Иванова, Полтавы, Омска, Шяуляй и Химок.

Среди участников конференции было 20 докторов физико-математических наук (на первой — 15, на второй — 14) и 45 кандидатов физико-математических наук (на первой — 36, на второй — 32), среди них 2 доктора физико-математических наук и 15 кандидатов физико-математических наук из Прибалтики (Эстонии, Латвии, Литвы и Калининградской области).

Конференция открылась 7 июня в 11 часов утра в актовом зале средней школы города Паланги. Конференцию открыл директор НИИММ им. Чеботарева при Казанском Государственном университете проф. Борис Лукич Лаптев, который в своей вступительной речи охарактеризовал значение Прибалтийских геометрических конференций, отметил основные достижения эстонских, литовских и латышских геометров и приветствовал конференцию от имени казанских геометров. Конференцию приветствовал ректор Вильнюсского Государственного педагогического института доц. Витаутас Уогинтас, выразивший признательность Московской и Казанской геометрическим школам, которые помогли и помогают готовить высококвалифицированных специалистов по геометрии не только для Литвы, но и для других Прибалтийских республик. От имени московских геометров конференцию приветствовал проф. Валерий Витальевич Рыжков (университет Дружбы Народов им. Патриса Лумумбы), от имени геометров города Пензы — проф. Иван Петрович Егоров, от имени геометров города Харькова — проф. Яков Павлович Бланк, от геометров Минска — доц. Леонид Кондратьевич Тутаев и от ВИНИТИ при АН СССР — Наталья Михайловна Остиану.

По предложению Ю. Г. Лумисте делегаты конференции приняли решение послать приветственные телеграммы проф. проф. Г. Ф. Лаптеву, В. В. Вагнеру, А. П. Нордену, П. К. Рашевскому.

14. 10824

Председатель оргкомитета В. И. Близникас в своей вступительной речи отметил, что геометры Прибалтики являются учениками московских и казанских геометров, что они всегда получают всестороннюю научную помощь от основных геометрических школ СССР, т.е. от московских, казанских и саратовских геометров. В. И. Близникас от имени литовских геометров поздравил Ю. Г. Лумисте с успешной защитой докторской диссертации, которую он защитил при Казанском Государственном университете.

На первом пленарном заседании была избрана редакционная комиссия для составления проекта решения конференции в следующем составе: Л. Я. Березина, В. И. Близникас, К. И. Гринцевичюс, П. И. Катилюс, П. И. Вашкас, Б. Л. Лаптев, Ю. Г. Лумисте. В. С. Малаховский и Н. М. Остиану.

На конференции было проведено 5 пленарных заседаний, на которых было заслушано 15 пленарных докладов (на первой — 14, на второй — 12):

1. Я. П. Бланк, Л. В. Дмитриева, Н. М. Гормашева (Харьков), Некоторые вопросы теории поверхностей и гиперповерхностей.
2. В. И. Близникас, К. И. Гринцевичюс (Вильнюс), О неголономной линейчатой геометрии.
3. А. М. Васильев (Москва), Об интранзитивных псевдогруппах преобразований.
4. Р. М. Гейдельман (Москва), К проективной теории пар конгруэнций прямых.
5. И. П. Егоров (Пенза), Об одном классе обобщенных дифференциально-геометрических пространств первых двух лакунарностей.
6. Г. Ф. Лаптев (Москва), Фундаментальные объекты отображений.
7. А. Е. Левашев (Минск), Картанова проблема и дуальность в теории относительности.
8. А. Е. Либер (Саратов), Тензорная теория сетей в n-пространстве.
9. Ю. Г. Лумисте (Тарту), Внутренние конформные связности многообразий m-сфер.
10. В. С. Малаховский (Калининград), О многообразиях пар фигур в однородном пространстве.
11. Н. М. Остиану (Москва), О подмногообразиях в пространствах с (Ф,0) структурой.
12. Н. М. Остиану, В. В. Рыжков (Москва), Об изданиях отдела математики ВИНИТИ.
13. Ю. В. Павлюченко, В. В. Рыжков (Москва), К определению наложимости точечных соответствий проективных пространств.
14. А. З. Петров (Казань), О квазигеодезическом отображении римановых пространств
15. А. Чахтаури (Тбилиси), Об одном классе проективно-жестких поверхностей

Кроме того, ежедневно работали четыре секции (деление докладов на секции носило условный характер), на которых был поставлен 101 доклад (на первой — 59, на второй — 55):

1. Н. Х. Азизова, О тканях кривых и гиперповерхностей.
2. М. А. Акивис, О три-тканях многомерных поверхностей.
3. Э. Д. Алшибая, Условия совпадения аффинной нормали с другими нормалями гиперповерхности.
4. Н. В. Амишева, Об одном классе комплексов центральных коник в эквиаффинном пространстве.
5. А. И. Аршанская, М. Т. Березина, В. М. Гоштейн, И. В. Зак, Е. М. Рапопорт, Э. А. Розенталь, Некоторые классы конгруэнций в E_3.
6. В. Т. Базылев, Об одном свойстве геодезических линий на многомерных поверхностях.
7. Е. М. Белоногова, Об одном классе транзитивных подмногообразий грассманова многообразия плоскостей.
8. Н. Г. Беляев, Некоторые замечательные кривые 3-го порядка в плоскости Лобачевского.
9. И. В. Белько, А. С. Феденко, Геометрия некоторых однородных пространств.
10. Л. Я. Березина, Репер С. Д. Росинского для семейства плоскостей в E_n.
11. А. М. Березман, Метрический тензор неголономной поверхности.

12. Р. Ю. Блажис, К вопросу построения топографической поверхности по аэрофотоснимкам.

13. В. С. Болодурин, О геодезических и асимптотических соответствиях между гиперповерхностями проективных пространств.

14. Г. П. Бочило, О некоторых многообразиях проективного пространства, элементы которых двойственны самим себе.

15. А. А. Бурдун, К геометрии вполне изотропных векторов в пространстве Минковского.

16. И. К. Варначева, Конфигурация эллиптических конгруэнций симплектического пространства.

17. В. В. Васенин, О неголономной гиперповерхности.

18. М. В. Васильева, О некоторых подгруппах бесконечных групп Ли.

19. П. И. Вашкас, О расслоении конгруэнций и комплексов прямых при помощи развертывающихся поверхностей.

20. В. И. Ведерников, О наслоениях в однородных пространствах.

21. М. Т. Виноградова, В. В. Смирнова, Односторонно расслояемые пары двупараметрических семейств 2-плоскостей в E_5.

22. Р. К. Власова, Гиперконгруэнция двухмерных плоскостей в E_5.

23. Р. В. Василюс, Об одном классе инвариантных аффинных связностей на группах Ли.

24. Н. Г. Галстян, Тензор кривизны изотропной гиперповерхности.

25. В. А. Глуздов, Параболические пары T двупараметрических семейств 2-плоскостей в P_5.

26. В. В. Гольдберг, О некоторых специальных классах двумерных поверхностей четырехмерных проективных и евклидовых пространств.

27. И. М. Горжалцан, Кватерионное квазисимплектическое пространство, как симметрическое полуриманово пространство.

28. А. В. Гохман, О геометризации динамики твердого тела переменной массы.

29. С. И. Григелионис, О неголономном комплексе четырехмерного проективного пространства.

30. В. П. Долговых, О полях скоростей системы K.

31. А. М. Жабик, Характеристика некоторых специальных типов 1-пар в P_4.

32. Л. Е. Евтушик, Нелинейные связносли высших порядков.

33. Ю. М. Ермаков, О геметрии гиперповерхности пространства Финслера с фундаментальной формой.

34. О. С. Иваницкая, Об объектах неголономности, вызванных обобщенными преобразованиями Лоренца.

35. Г. И. Иванов, Л. И. Магазинников, К вопросу о центроаффинном расслоении пар неголономных конруэнций в паре комплексов.

36. Е. Т. Ивлев, О некоторых геометрических образах, инвариантно связанных с многообразием $E(0, n-1, m)$ в n-мерном проективном пространстве P_n.

37. В. Ф. Игнатенко, К теории главных диаметральных гиперплоскостей алгебраических гиперповерхностей.

38. А. Ионушаускас, О тангенциальной невырожденности орбит неприводимых тензорных представлений.

39. Н. И. Кабанов, Геометрическая интерпретация условий трансверсальности с помощью полуконической индикатрисы.

40. Ф. И. Каган, О некоторых типах почти алгебраических структур в касательном пучке.

41. В. Р. Кайгородов, Релятивистские пространства Эйнштейна с ковариантно постоянным векторным полем.

42. С. Е. Карапетян, Геометрический смысл сопряженных направлений грассманова многообразия.

43. Х. Кильп, О группах инвариантности некоторых семейств плоскостей.

44. Л. А. Киселевич, К вопросу классификации комплексов в проективном пространстве P_3.

45. Р. К. Колде, Геометрия конгруэнций изотропных прямых в пространстве ${}^1R_4$.

46. А. М. Комиссарук, О некотором соответствии между 3-тканями и сетями.

47. Е. В. Коробенок, А. К. Лапковский, Особенности геометрии в пространстве с индефинитной метрикой.

48. А. Л. Крищюнайте, Контактные преобразования и контактные гиперповерхности биаффинного пространства гиперболического типа.

49. Л. З. Кругляков, Псевдофокальные семейства прямых в P_n.

50. П. И. Кудрик, О некоторых новых результатах в теории изгибания поверхностей.

51. Г. И. Кручкович, К вопросу об аффинорных структурах и их интегрируемости.

52. Г. М. Кузьмина, Функционально-инвариантные законы сохранения некоторых систем квазилинейных уравнений.

53. А. Н. Лебедева, О некоторых группах бесконечно малых преобразований линейчатого комплекса пространства постоянной кривизны.

54. Л. Ю. Лизунова, Некоторые вопросы бесконечно малых изгибаний гиперповерхностей в римановом постранстве R_{n+1}.

55. В. С. Лисняк, Канонические реперы соответствий в четырехмерном пространстве.

56. В. С. Лисняк, Экстремальные образы соответствий в четырехмерном пространстве.

57. М. В. Лосик, Об алгебре функций дифференцируемого многообразия.

58. К. Д. Лукин, Некоторые вопросы обобщенных пространств.

59. З. И. Лупейкис, О геометрии квазилинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка.

60. З. П. Макарова, К эквиаффинной теории пар неголономных поверхностей.

61. Г. Н. Макеев, Пары T двупараметрических семейств $(n-1)$ -плоскостей в P_{2n-1} из семейств W.

62. В. И. Матвеенко, Дифференциальная геометрия шестипараметрического семейства невырожденных коник, плоскости которых образуют двупараметрическое семейство.

63. И. Х. Медведевайте, О гиперповерхностях метрического пространства гиперплоских элементов.

64. З. А. Михеева, Бесконечно малые аффинные деформации поверхностей.

65. М. А. Николаенко, К задаче Ли о монжевых многообразиях.

66. Т. Г. Орловская, Б. А. Розенфельд, Спинорные представления групп движений квазинеевклидовых пространств.

67. В. В. Падервинскас, Ромбоэдрические сети из сфер в трехмерном пространстве.

68. Д. К. Петрушкевичюте, Специальные семейства кривых n -го порядка.

69. К. А. Пирагас, Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа в общей теории относительности.

70. А. П. Подгорный, О кинематическом способе образования множеств линий и выделениии из них поверхностей.

71. О. С Редозубова, О некоторых классах пар T конгруэнций.

72. А. А. Ривилис, Однородные локально симметрические области в конформном пространстве.

73. К. В. Рийвес, О подгруппах Ли движений с трехмерными орбитами.

74. М. В. Роговой, Некоторые вопросы кривизны и кручения неголономной поверхности.

75. Д. Е. Рускол, Классы конформного минимальных поверхностей.

76. В. Н. Рыбаков, I -отображения поверхностей и конгруэнций в A_3, P_3.

77. А. П. Рябушко, Движение вращающейся частицы в центрально-симметрическом римановом пространстве-времени.

78. А. П. Рябушко, К. С. Филипович, О геодезических риманова пространства-времени, определяемого двойной звездой.

79. Р. Н. Салия, Неинтегрируемые преобразования и кинематическое описание процессов в гравитационном поле.

80. И. К. Скидан, Сопрягающие поверхности как подмногообразия плоских кривых.

81. Ю. С. Слободян, Об n-мерных пространствах, допускающих вполне геодезические поверхности.

82. В. В. Слухаев, О геометрических условиях совместимости для некоторых классов стационарных движений идеального газа.

83. Н. И. Слисаренко, Определение лучевых поверхностей, выделяемых из множества лучей, отраженных некоторыми поверхностями.

84. Н. В. Степанов, Локальная эквивалентность обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

85. Л. Ф. Степанова, Некоторые классы пар двупараметрических семейств 2-плоскостей в P_4.

86. Л. И. Стиклаките, Некоторые вопросы нормализации поверхностей трехмерного билинейно-метрического проективного пространства.

87. В. А. Тоидзе, Ортостереопроекции с точки зрения проективного мероопределения.

88. Л. К. Тутаев, О линиях в пространстве Минковского и о некоторых движениях заряда в поле другого заряда.

89. Е. И. Ушпалене, О некоторых семействах квадрик эллиптического пространства.

90. М. А. Улановский, Упорядоченные псевдоримановы пространства.

91. А. П. Урбонас, Автоморфизмы пространства тензорных опорных элементов.

92. А. П. Урбонас, Автоморфизмы пространства гиперплоских элементов.

93. В. С. Фокин, Конфигурация T_3 в P_4.

94. А. В. Чакмазян, К теории двойственно нормализованных m-мерных поверхностей D_m в E_n.

95. З. Н. Четыркина, О группе конформных преобразований в финслеровых пространствах.

96. Б. Н. Шапуков, Об одной интерпретации пространств с билинейной метрикой.

97. Б. М. Шайн, Дифференцируемое многообразие характеризуется рестриктивной биполугруппой своих координатных систем.

98. Ю. И. Шинкунас, О линеарных связностях пространств опорных линеаров.

99. А. П. Широков, О движении твердого тела неевклидова пространства в специальном силовом поле.

100. Д. М. Яблоков, Геодезические смещения в пространстве пар линейных элементов.

101. Е. У. Ясинская, Линейные комплексы в неевклидовых и полуевклидовых пространствах.

Среди секционных докладов значительный интерес вызвали доклады: П. И. Вашкаса, Р. В. Восилюса, Ю. И. Шинкунаса (Вильнюс), А. Л. Крищюнайте (Шяуляй), К. В. Рийвес, Р. К. Колде (Тарту), В. С. Болодурина (Москва), В. И. Ведерникова (Горький), О. С. Иваницкой (Минск), А. П. Урбонаса (Казань). Прибалтийские геометры на конференции прочли 3 пленарных доклада и 20 секционных докладов, в которых были отражены результаты, полученные в течение последних двух лет.

На заключительном пленарном заседании 12 июня было принято решение, текст которого приводится ниже. В выступлениях делегатов конференции была коротко охарактеризована работа секционных и пленарных заседаний (Я. П. Бланк, В. Т. Базылев, Р. Колде, В. В. Рыжков и др.). С коротким отчетом от имени оргкомитета выступил В. И. Близникас.

Для участников конференции 10 июня была организована экскурсия в гор. Ниду.

РЕШЕНИЕ

ТРЕТЬЕЙ ПРИБАЛТИЙСКОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО ВОПРОСАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Конференция отмечает, что:

1. Программа конференции была очень интересной, разнообразной и отражала большинство важнейших направлений геометрических исследований, развиваемых в СССР.

2. Работа конференции показала, как успешно и разносторонне развиваются геометрические исследования в Прибалтийских республиках. Многие из наиболее интересных и содержательных докладов как на пленарных, так и на секционных заседаниях были сделаны геометрами Вильнюса, Шяуляй, Тарту, Калининграда и т.д. Отмечается научный рост прибалтийских геометров, защита ими докторских и кандидатских диссертаций и появление новых, ранее неизвестных имен на каждой из очередных конференций. Для некоторых направлений исследований, таких, как теория финслеровых пространств, теория связностей в расслоенных пространствах, линейчатая геометрия, Прибалтика является одним из основных научных центров в Советском Союзе. Поэтому прибалтийские геометрические конференции имеют не только региональный характер, но всегда вызывают большой интерес у геометров всей страны.

3. Конференция способствовала тесному научному общению участников, знакомству с новыми направлениями, разрабатываемыми в разных геометрических центрах Советского Союза, и постановке новых проблем.

4. В работе конференции приняло участие большое число молодых исследователей.

5. Работа конференции проходила четко по намеченной программе. Все участники были обеспечены своевременно необходимыми материалами и им были предоставлены все условия для успешной работы.

6. Участники конференции с большим интересом прослушали сообщение зав. отделом математики ВИНИТИ Н. М. Остиану о проводимой работе и о новых изданиях, подготовляемых Отделом. Отмечается достигнутое за последнее время сокращение сроков реферирования, высокое качество всех изданий Отдела математики ВИНИТИ и большая информационная ценность серии „Итоги науки". Ценным начинанием является издание Трудов геометрического семинара.

7. В условиях создания новых многочисленных направлений исследований в области дифференциальной геометрии, важную роль наряду с конференциями играют летние школы по наиболее актуальным вопросам современной дифференциальной геометрии. Такие школы успешно работали в июне 1965 г. в гор. Тарту и в июне 1964 г. в гор. Риге.

Учитывая вышеизложенное, конференция постановляет:

I. Считать очень полезным и необходимым регулярно проводить Прибалтийские геометрические конференции, созывая их в Прибалтийских Союзных республиках и в Калининградской области.

II. Следующую Четвертую Прибалтийскую геометрическую конференцию считать целесообразным созвать в июне 1970 г. в гор. Калининграде при Калининградском Государственном университете. Просить Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР разрешить организацию указанной конференции и оказать содействие в ее проведении.

III. Рекомендовать ввести в состав Оргкомитета Четвертой Прибалтийской геометрической конференции:

1. Профессора Малаховского В. С., заведующего кафедрой геометрии и алгебры Калининградского Гос. университета (председатель),
2. Доцента Березину Л. Я., Калининградский технический институт, Рижский филиал,
3. Доцента Близникаса В. И., декана физико-математического факультета, заведующего кафедрой математического анализа Вильнюсского Гос. педагогического института,
4. Профессора Гринцевичюса К. И., Вильнюсский Гос. университет,
5. Доцента Лумисте Ю. Г., заведующего кафедры геометрии и алгебры Тартуского Гос. университета,
6. Профессора Лаптева Г. Ф., начальника кафедры математики Военно-воздушной Инженерной Академии им. проф. Н. Е. Жуковского.
7. Ст. научного сотрудника Остиану Н. М., заведующую отделом математики Всесоюзного института научной и технической информации Государственного комитета Совета Министров СССР по науке и технике при АН СССР.

Поручить профессору В. С. Малаховскому дополнить Оргкомитет четырьмя сотрудниками Калининградского университета и просить МВ и ССО РСФСР утвердить такой состав Оргкомитета Четвертой Прибалтийской геометрической конференции.

IV. Просить ректора Калининградского университета оказать содействие в организации Летней школы по современным проблемам дифференциальной геометрии в июне 1969 г. в гор. Калининграде при Калининградском Гос. университете.

V. Просить ректора Тартуского университета оказать содействие в организации Летней школы по современным проблемам дифференциальной геометрии в июне 1972 г. в гор. Тарту при Тартуском Гос. университете.

VI. Поручить доценту В. И. Близникасу подготовить отчетную статью о проведенной конференции и просить Редакционную коллегию журнала „Успехи математических наук", а также Редакционную коллегию журнала „Литовский математический сборник" опубликовать ее.

VII. Отметить, что Оргкомитет конференции успешно справился с возложенными на него обязаностями и выразить большую благодарность всему составу Оргкомитета. Искреннюю благодарность участники конференции выражают ректору Вильнюсского Государственного педагогического института Витаутасу Уогинтасу за большую помощь, оказанную им при организации и проведении конференции.

IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS — ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1969

ХРОНИКА СЕМИНАРОВ ЛИТОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Семинар по теории вероятностей и теории чисел

9.IX.1968, А. Бикялис, Впечатления о Венгрии.

18.XI.1968 и 25.XI, В. Паулаускас, К вопросу суммирования независимых случайных величин.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — одномерные, одинаково распределенные независимые случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Пусть $M\xi_i=0$, $M\xi_i^2=1$,

$$Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

$F_n(x)$ обозначает функцию распределения случайной величины Z_n. Введем так называемый псевдомомент

$$\nu_3=\int |x|^3\left|d(F-\Phi)(x)\right|.$$

Теорема 1. *Если $\nu_3<\infty$, тогда для всех $n\geqslant 1$*

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_1\frac{\max\left(\nu_3^{\frac{1}{4}},\ \nu_3\right)}{\sqrt{n}}.$$

С помощью вычислений на ЭВМ получена оценка для абсолютной константы C_1: $C_1\leqslant$ $\leqslant 2{,}16$.

Пусть $\mathcal{P}_k$ — класс всех распределений на R^k с нулевыми математическими ожиданиями и конечными третьими моментами, а $\tilde{\mathcal{P}}_k$ — подкласс невырожденных распределений.

Обозначим через $\mathcal{E}_1$ класс множеств из R^k вида $\{x: x^{(1)}<y_1, \ldots, x^{(k)}<y_k\}$, где $x=(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)})\in R^k$, $y_i\in R^1$, через $\mathcal{E}_2$ — класс всех универсально измеримых выпуклых множеств из R^k.

Рассматриваются $\xi_i=(\xi_i^{(1)}, \ldots, \xi_i^{(k)})$, $i=1, 2, \ldots, n$ — независимые k-мерные случайные вектора с распределениями $P_i\in\mathcal{P}_k$, матрицей вторых моментов Δ_i и корреляционной матрицей Λ_i. Обозначим:

$$\sigma_i^{(j)2}=M\xi_i^{(j)2}, \quad \beta_i^{(j)}=M|\xi_i^{(j)}|^3, \quad B_n^{(j)2}=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{(j)2},$$

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j, \quad Z_n=\left(\frac{1}{B_n^{(1)}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(1)}, \ \ldots, \ \frac{1}{B_n^{(k)}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(k)}\right).$$

Пусть K_j является кооеляционной матрицей случайного вектора

$$S_{j,n}=\sum_{i=j}^{n}\xi_i \quad \text{и} \quad \chi_{nm}=\min_{2\leqslant j\leqslant n}\frac{|K_j|}{|K_j^{mm}|},$$

где $|K_j|$ — детерминант матрицы $K_j=\|\rho_j^{il}\|$, а $|K_j^{mm}|$ — алгебраическое дополнение элемента ρ_j^{mm}.

Определим величины $\gamma_j^{(l)}$ следующим образом: $\gamma_j^{(l)}\geqslant 1$, $j=1, 2, \ldots, n$, $l=1, 2, \ldots, k$ и они подобраны так, что для всех $j=1, 2, \ldots, n$ и $l=1, 2, \ldots, k$ выполняются неравенства

$$\frac{\beta_j^{(l)}}{\sigma_j^{(l)2}}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i^{(l)}\beta_i^{(l)}}{\sum\limits_{i=1}^{j}\sigma_i^{(l)2}}.$$

В дальнейшем положим

$$\tilde L_{3n}^{(l)}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_j^{(l)}\beta_j^{(l)}}{B_n^{(l)3}}.$$

Пусть $\xi_i'=(\xi_i^{(1)\prime}, \ldots, \xi_i^{(k)\prime})-k$ — мерные независимые нормальные случайные вектора с распределениями Φ_i, нулевыми математическими ожиданиями и матрицами вторых моментов Δ_i,

$$Z_n'=\left(\frac{1}{B_n^{(1)}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(1)\prime}, \ldots, \frac{1}{B_n^{(k)}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(k)\prime}\right)\cdot P_{Z_n} \quad \text{и} \quad \Phi_{Z_n'}$$

обозначают распределения сумм Z_n и Z_n', соответственно, а

$$d(P_{Z_n}, \mathscr{E}_i)=\sup_{E\in\mathscr{E}_i}|P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z_n'}(E)|, \quad i=1, 2.$$

Введем псевдомоменты

$$\nu_i^{(j)}=\int\limits_{R^k}|x^{(j)}|^3|(P_i-\Phi_i)(dx)|, \quad W_{3n}^{(j)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_i^{(j)}}{B_n^{(j)3}}.$$

Пусть $\lambda_j^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, k$ — собственные значения корреляционной матрицы случайного вектора

$$Z_j, \quad j=1, 2, \ldots, n, \quad \text{а} \quad \Theta_n=\max_{j\leqslant n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\lambda_j^{(i)}}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $P_i\in\mathscr{P}_k$, $i=1, \ldots, n$, *а* $P_{Z_n}\in\tilde{\mathscr{P}}_k$. *Тогда для всех* $n\geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$d(P_{Z_n}, \mathscr{E}_2)\leqslant C_1(k)\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(i)}}}\right)\sum_{i=1}^{k}W_{3n}^{(i)}\right]^{\frac14},$$

где

$$C_1(k)\leqslant 16\left(\frac{8}{3\pi^3}\right)^{\frac18}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\right]^{\frac34}k^{\frac78}.$$

Теорема 3. *Пусть* $P_i \in \mathcal{P}_k$, $i=1, \ldots, n$ *такие, что* $P_{Z_n} \in \mathcal{P}_k$ *и* $\chi_{nm} > 0$ *для всех* $m=1, 2, \ldots, k$. *Тогда для всех* $n \geqslant 1$

$$d(P_{Z_n}, \mathcal{E}_2) \leqslant C_2(k) \left[\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(i)}}} \right) \sum_{i=1}^{k} \frac{\tilde{L}_{3n}^{(i)}}{\chi_{ni}^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где $C_2(k) \leqslant C_2 k^{\frac{3}{2}}$ *и* C_2 — *абсолютная константа.*

Теорема 4. *Пусть распределения* $P_i \in \tilde{\mathcal{P}}_k$ *случайных векторов* ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^{(j)2} \geqslant \sigma_j^2, \quad \beta_m^{(j)} \leqslant \beta_j, \quad \begin{matrix} m=1, 2, \ldots, n \\ j=1, 2, \ldots, k. \end{matrix}$$

Если обозначить

$$\chi_n^{(i)} = \min_{j \leqslant n} \frac{|\Lambda_j|}{|\Lambda_j^{ii}|},$$

то для всех $n \geqslant 1$ справедлива оценка

$$d(P_{Z_n}, \mathcal{E}_2) \leqslant C_3(k) \frac{\Theta_n}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{(\chi_n^{(i)} \sigma_i^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad C_3(k) \leqslant C_3 \cdot k^3.$$

Для величины $d(P_{Z_n}, \mathcal{E}_1)$ получены анологичные оценки. Например, справедлива теорема.

Теорема 5. *В условиях теоремы* 4

$$d(P_{Z_n}, \mathcal{E}_1) \leqslant C_4(k) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\chi_n^{(i)} \sigma_i^3}, \qquad C_4(k) \leqslant C_4 k^{\frac{7}{2}}.$$

Содержание доклада с доказательствами теорем будет опубликовано в Литовском матем. сб. № 2 и № 4 (1969).

2.XII.1968, Л. Саулис, Асимптотическое разложение для вероятностей больших уклонений, Содержание доклада будет опубликовано в Литовском матем. сб. IX, № 3, 1969.

9.XII.1968, Б. Ряуба, Впечатления от поездки в Финляндию.

23.XII.1968, Н. Калинаускайте, Верхние и нижние поверхности для многомерного винеровского процесса, Содержание доклада будет опубликовано в Литовском матем. сб. IX, № 3, 1969.

10.II.1969, С. В. Нагаев, Об оценках скорости сходимости распределения сумм независимых случайных величин в граничных задачах.

17.II.1969, А. Бикялис, Характеристические функции многомерных случайных векторов.

10.III.1969, Обсуждение диссертаций Б. Григелиониса и А. Бакштиса.

17.III.1969 и 24.III, Обсуждение диссертации Б. Григелиониса.

31.III.1969, Б. Куприте, Центральная предельная теорема для неоднородно распределенных процессов восстановления, Тезисы доклада будут опубликованы в Литовском матем. сб. IX, № 2, 1969.

7.IV.1969, Д. Сургайлис, Марковские процессы и стохастические уравнения.

14.IV.1969, В. Паулаускас, Оценка остаточного члена в многомерной предельной теореме.

21.IV.1969, Ю. В. Прохоров, О характеристических функциях, убывающих степенным образом.

Л. И. Большев, Эмпирический байесовский подход.

28.IV.1969, Н. Калинаускайте, Разложение плотностей многомерных устойчивых распределений.

Известно [1], что k-мерное распределение устойчиво тогда и только тогда, когда логарифм его характеристической функции равен

$$\psi(t_1, \ldots, t_k)=\psi\Big(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}\Big)=$$

$$=\begin{cases} -\rho^\alpha\Big(C_1(\varphi)+iC_2(\varphi)\Big)+i(T, \Gamma) \text{ при } 0<\alpha\leqslant 2, \ \alpha\neq 1, \\ -\rho\Big(C_1(\varphi)+iC_2'(\rho, \varphi)\Big)+i(T, \Gamma) \text{ при } \alpha=1, \end{cases}$$

где

$$C_1(\varphi)=C\int_e |\cos\Theta|^\alpha H(ds),$$

$$C_2(\varphi)=-C\int_e \frac{\cos\Theta}{|\cos\Theta|}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\cdot|\cos\Theta|^\alpha H(ds),$$

$$C_2'(\varphi, \rho)=\int_e \cos\Theta\,\lg|\rho\cos\Theta|\,H(ds),$$

где

ϱ — модуль вектора $T=(t_1,\ldots, t_k)$, а $\varphi=(\varphi_1,\ldots \varphi_{k-1})$ его угловые координаты м многомерных сферических координатах,

$\Gamma=(\gamma_1,\ldots \gamma_k)$ — постоянный вектор,

(T, Γ) — скалярное произведение векторов T и Γ,

e — единичная сфера,

$H(s)$ — аддитивная неотрицательная мера, определенная на единичной сфере,

C — положительная константа,

Θ — угол между вектором T и единичным вектором ω, конец которого находится в ds,

$x\ (x_1\ldots, x_k) \in R_k$,

$p_\alpha(x)$ — плотность устойчивого распределения.

Мы рассматриваем невырожденные k-мерные устойчивые распределения с $\Gamma=0$.

Теорема. *Для всех $x\in R_k$ и $\alpha>1$ имеет место разложение*

$$P_\alpha(x)=\frac{2}{\alpha(2\pi)^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\Gamma\left(\frac{m+k}{\alpha}\right)\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overset{(k-2)}{\cdots}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(C_1^2(\varphi)+C_2^2(\varphi)\Big)^{-\frac{m+k}{2\alpha}}\cdot\Big(\sum_{j=1}^{k-1}x_j\prod_{i=1}^{j-1}\sin\varphi_i\cos\varphi_j+x_k\prod_{j=1}^{k-1}\sin\varphi_j\Big)^m\times$$

$$\times\cos\left(\frac{m+k}{\alpha}\,\mathrm{arctg}\,\frac{C_2(\varphi)}{C_1(\varphi)}+m\frac{\pi}{2}\right)\cdot\prod_{i=1}^{k-2}\sin^{k-i+1}\varphi_i\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{k-1}.$$

Так же получены асимптотические формулы для плотности устойчивого распределения с

$\alpha\in(0, 2]$ $\alpha\neq 1$, когда $|x|\to 0$.

Литература

1. Е. Л. Рвачева, Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений, Уч. зап. Львовск. Гос. Унив., 29, в. (1), 1954, 7—44.

2. H. Bergström, On some expansions of stable distribution functions, Arkiv för mat. II, 4, (1952), 375—378.

12.V.1969, Л. Саулис, Асимптотическое разложение для вероятностей больных уклонений (случай неодинаково распределенных случайных величин)

Рассматривается последовательность независимых неодинаково распределенных случайных величин $\{\xi_j\}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$ со средними $\mathbf{M}\xi_j=0$ и дисперсиями

$$\mathbf{D}\xi_j=\sigma_j^2<\infty,\quad j=1,\ 2,\ \ldots$$

Пусть

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j,\quad B_n^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2,\quad Z_n=\frac{S_n}{B_n},$$

$$L_j(z)=\ln\mathbf{M}\,e^{z\xi_j},\quad F_{Z_n}(x)=\mathbf{P}\{Z_n<x\},\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y\frac{2}{2}}\,dy.$$

Введем следующие обозначения:

$$p_x(y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-y\frac{2}{2}}}{\int_x^{\infty}e^{-y\frac{2}{2}}\,dy}, & y\geqslant x\\ 0, & y<x\end{cases}\qquad \mu_{xk}=\int_{-\infty}^{\infty}y^k\,p_x(y)\,dy,$$

$$\omega_k(x)=\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\binom{k}{n}x^n\,\mu_{x\,k-n}.$$

Теорема 1. 1) *Пусть соблюдено условие С. Н. Бернштейна:*

$$|\mathbf{M}\,\xi_j^k|\leqslant k!\;H_2\,K^{k-2}\,\mathbf{D}\,\xi_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

при всех $k\geqslant 3$, *где* H_2 *и* K *некоторые положительные числа;*

2) *существуют плотности* $p_{\xi_j}(x)$ *и положительные постоянные*

$$C_j\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\ \text{ такие, что }\ p_{\xi_j}(x)\leqslant C_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

тогда в интервале $1\leqslant x\leqslant\bar\delta\Delta_n$, $\bar\delta<0{,}015$ *для любого целого* $s\geqslant 2$ *имеет место соотношение:*

$$\frac{1-F_{Z_n}(x)}{1-\Phi(x)}=e^{\frac{x^3}{\Delta_n}\lambda\left(\frac{x}{\Delta_n}\right)}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-1}\frac{x^\nu N_{\nu n}(x)=K_{\nu n}(x)}{\Delta_n^\nu}+\right.$$

$$\left.+O\left(\left(\frac{x}{\Delta_n}\right)^s\right)+O\left(\frac{x}{\Delta_n}\prod_{i=1}^{4}C_i^{\frac{1}{4}}\exp\left\{-\alpha\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_j^2}\right\}\right)\right),$$

где

$$\Delta_n=z_0B_n,\quad z_0=\left[\max\left(K(1+2H_2),\ \sqrt{2}\max_{i\leqslant j\leqslant n}\sigma_j\right)\right]^{-1},$$

α — *положительная величина, зависящая лишь от* z_0 *и* δ.

Пусть $\bar p_{\xi_j}(x)$ плотность абсолютно непрерывной компоненты функций распределения $F_{\xi_j}(x)$:

$$F_{\xi_j}(x)=\alpha_j\int_{-\infty}^{\infty}\bar p_{\xi_j}(x)\,dx+\beta_j\,S_j(x),\quad \alpha_j+\beta_j=1,$$

и пусть

$$\bar p_{\xi_j}(x)\leqslant\bar C_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots$$

Теорема 2. *Пусть существуют положительные постоянные A, c_1, c_2, ... такие, что*

$$\left|\frac{L_j(z)}{z^2}\right| \leqslant c_j \text{ в круге } |z| \leqslant A \ (j=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

$$\overline{\lim}\, c_j < \infty, \tag{2}$$

$$\overline{\lim} \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} c_j < \infty, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{C_j^2} \to \infty (n \to \infty), \tag{4}$$

тогда при $x \geqslant 1$, $x \geqslant o(\Delta_n)$, $\Delta_n = AB_n$ *и* $n \to \infty$, *для любого целого* $s \geqslant 2$ *имеет место соотношение:*

$$\frac{1 - F_{Z_n}(x)}{1 - \Phi(x)} = e^{\frac{x^3}{\Delta_n} \lambda\left(\frac{x}{\Delta_n}\right)} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-1} \frac{x^\nu N_{\nu n}(x) + K_{\nu n}(x)}{\Delta_n^\nu} + O\left(\left(\frac{x}{\Delta_n}\right)^s\right)\right).$$

Везде здесь

$$N_{\nu n}(x) = \sum_{\lambda^{(1)} + \ldots + \lambda^{(q)} = \nu} \frac{1}{q!} \prod_{p=1}^{p} \left(-c_{\lambda^{(p)}, n}\right) x^q \omega_q(x),$$

$$K_{\nu n}(x) = \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]} c_{ml, \nu - l, n} x^{\nu - l} \omega_{3l - 2m}(x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\nu - 2} \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]} \sum_{\lambda^{(1)} + \ldots + \lambda^{(q')} = \nu - j} \frac{1}{q!} \times$$

$$\times \prod_{p=1}^{q} \left(-c_{\lambda^{(p)}, n}\right) c_{ml, \nu - l, n} x^{\nu - l + q} \omega_{3l - 2m + q}(x),$$

где $\sum\limits_{\lambda^{(1)} + \ldots + \lambda^{(q)} = \nu}$ — означает суммирование по всем упорядоченным наборам целых $\lambda^{(p)} > 1$, дающих в сумме ν,

$c_{ml, \nu - l, n}$ и $c_{\lambda^{(p)}, n}$ — коэффициенты, зависящие от семиинвариантов случайных величин $\xi_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ и ограничены относительно n.

$\lambda(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^k t^k$ — степенной ряд Крамера, сходящийся при достаточно малых значениях $|t|$.

Литература

1. В. А. Статулявичус, Докторская диссертация, 1967.
2. В. В. Петров, Асимптотическое поведение вероятностей больших уклонений, Теория вероят. и ее примен., XIII, в. 3(1968), 432—443.
3. Л. Саулис, О больших уклонений для плотностей, Лит. матем. сб., VIII, № 1 (1968), 153—162.

* * *

19.V.1969, И. Сапаговас, Некоторые математические задачи теории надежности сложных систем.

26.V.1969, А. Монставичюс, Распределение сумм мультипликативных функций.

3.VI.1969, В. Пипирас, Асимптотические разложения для функций распределения.

Рассматривается последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_n, \tag{1}$$

удовлетворяющих условию.

Для формулировок используются обозначения статьи [1].

Теорема 1. *Если* $\mathbf{M}|\xi_i|^r<\infty(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ *при некотором* $r\geqslant 3$, *то*

$$|F_{Z_n}(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{\Theta_1(r)}{(1+|x|)^r}(L_{3n}+L_{rn}).$$

Теорема 2. *Если* $\mathbf{M}|\xi_i|^s<\infty$ $(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ *при некотором целом* $s\geqslant 3$ *и*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\tau_i\leqslant 5\sqrt{\frac{3}{2}(1-a)B_n^{-2}B_{3n}}\ (0<a<1),$$

то

$$|F_{Z_n}(x)-\Phi_{sn}(x)|\leqslant\Theta_2(s)\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\ \int\limits_{|u|>B_n(1+|x|)}|u|^s\,dF_{\xi_i}(u)}{B_n^s(1+|x|)^s}+\right.$$

$$+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\ \int\limits_{|u|\leqslant B_n(1+|x|)}|u|^{s+1}\,dF_{\xi_i}(u)}{B^{s+1}(1+|x|)^{s+1}}+$$

$$\left.+\frac{\ln(1+n)}{a^{s+1}(1+|x|)^{s+1}}(1+L_{1n}^{s+1})\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{2\sigma_i^2}{B_n^2}+\sup_{|t|\geqslant(5B_nL_{3n})^{-1}}|f_{\xi_i}(t)|\right)\right).$$

Здесь $\Theta_1(r)$ и $\Theta_2(s)$ — константы, зависящие только от аргументов r и s.

Пусть существуют плотности распределения $p_{\xi_i}(x)$ $(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$.

Условие А. При $n\to\infty$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\sigma_i^2+B_n^2L_{3n}^2)\,C_i^2}\to\infty,$$

где константы $C_i\leqslant\infty$ определяются неравенствами $p_{\xi_i}(x)\leqslant C_i$ $(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$.

Условие В. Для некоторой положительной функции $\delta(z)=0(z)$ (при $z\to\infty$) имеет место соотношение

$$\frac{1}{B_{rn}}\sum_{i=1}^{n}\ \int\limits_{|u|>\delta\left(B_n(1+|x|)\right)}|u|^r\,dF_{\xi_i}(u)\to 0,$$

когда $B_n(1+|x|)\to\infty$.

Теорема 3. *Если* $\mathbf{M}|\xi_i|^r<\infty(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ *при* $r\geqslant 3$ *и имеют место условия* A *и* B, *то*

$$|F_{Z_n}(x)-\Phi_{[r],n}(x)|\leqslant\frac{\varepsilon\left(B_n(1+|x|)\right)}{(1+|x|)^r}L_{rn},$$

где положительная функция $\varepsilon(z)\to 0$, *когда* $z\to\infty$.

Далее, пусть случайные величины последовательности (1) решетчатые. Именно, пусть $\xi_i (i=1,2,\dots,n)$ принимают только значения вида $hk (h>0,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots)$ или, что то же самое, значения вида $h_i k$, где $h_i>0$ такие, что существует $h=\min(h_1, h_2,\dots, h_n)$, удовлетворяющее равенства $h_i=h \cdot l_i$ (l_i — некоторые целые числа).

При ограничении $M|\xi_i|^r<\infty (i=1,2,\dots,n;\ r\leqslant 3)$ и некоторых других условиях получена оценка остаточного члена аналогична оценке в теореме 3) для общественного разрывного асимптотического разложения функции распределения $F_{Z_n}(x)$.

Отметим, что для так называемых k-последовательностей соответствующие оценки приобретают более простой вид.

Изложенные результаты являются следствиями более общих теорем, доказательства которых будут опубликованы в журнале «Литовский математический сборник».

Литература

1. В. Статулявичус, В. Пипирас, Асимптотические разложения для сумм независимых случайных величин, Лит. матем. сб., III, № 1 (1968), 137—151.

* * *

СЕМИНАР ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ

(Институт физики и математики АН Лит. ССР)

30.V.1969, Т. Е. Кулаковская (Ленинград), Достаточные условия совпадения ядра и решения в кооперативной игре.

Рассмотрим кооперативную игру n лиц с множеством игроков $I_n=\{1, \dots, n\}$ и $(0-1)$-редуцированной характеристической функцией. Будем обозначать:

$$A=\left\{x\in E_n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i=1,\ 0\leqslant x_i\leqslant 1\right\}\text{— симплекс дележей,}$$

$U_0=A\backslash\operatorname{dom} A$ — ядро игры, $V=A\backslash\operatorname{dom} V$ — решение,

$$U_k\{S_1, \dots, S_k\}=\left\{x\in A \,\middle|\, \begin{array}{l} \sum\limits_{S_i} x_j<v(S_i), \quad 1\leqslant i\leqslant k, \\ \sum\limits_{T} x_i\geqslant v(T), \quad T\neq S_i, \quad 1\leqslant i\leqslant k. \end{array}\right\}$$

С помощью множеств $U_k\{S_1, \dots, S_k\}$ симплекс A разбивается на непересекающиеся множества, доминирование в которых может осуществляться только по коалициям $\{S_1, \dots, S_k\}$.

Обозначим далее через $\bar U_k\{S_1, \dots, S_k\}$ замыкание $U_k\{S_1, \dots, S_k\}$, $|S|$ — число игроков в коалиции S.

Будем говорить, что игра обладает свойством $\overline{CV}$, если $U_0=V$ и для любого

$$x: \sum_S x_i<v(S) \text{ и } \sum_T x_i\geqslant v(T),\ T\subset S$$

существует такой $z\in U_0$, что

$$z\underset{S}{>}x.$$

Лемма 1. *Пусть $x\in V$ тогда найдется такой набор коалиций $\{S_1, \dots, S_k\}$, что*

$$x\in\bar U_k\{S_1, \dots, S_k\}\cap\left\{x_j=0,\ j\notin\bigcap_{i=1}^{k} S_i\right\}.$$

Лемма 2. *Если все множества*

$$\bar{U}_k\{S_1, \dots, S_k\} \cap \left\{x_j=0, \quad j \notin \bigcup_{i=1}^{k} S_i\right\} = \Lambda,$$

то игра обладает свойством $\overline{CV}$.

Назовем покрытием множества I_n такой набор коалиций $\{S_1, \dots, S_k\}$, что

$$\bigcup_{i=1}^{k} S_i = I_n,$$

но для любого

$$i_0, \ 1 \leqslant i_0 \leqslant k, \ \bigcup_{i \neq i_0} S_i \neq I_n.$$

Покрытие $\mathfrak{A}_m$ называется покрытием ранга m, если $|S_i|=m$ для всех $S_i \in \mathfrak{A}_m$.

Теорема. *Для того чтобы игра n лиц обладала свойством* $\overline{CV}$ *достаточно, чтобы* $\sum\limits_{\mathfrak{A}_m} v(S_i) \leqslant 1$, где $\mathfrak{A}_m$ — максимальное покрытие ранга m и $\sum\limits_{\mathfrak{A}} v(S_i) < 1$ для всех остальных покрытий I_n.

Следствие 1. (Теорема Бондаревой.) Для того чтобы у игры n лиц с $v(S)=0$ $|s|<n-1$ существовало решение, совпадающее с ядром, необходимо и достаточно, чтобы

$$v(S)+v(T) \leqslant 1, \qquad |S|=|T|=n-1.$$

Следствие 2. (Теорема Дюбина.) Если $v(S) \leqslant \dfrac{1}{n-|S|+1}$, то ядро является решением (более того, обладает свойством $\overline{CV}$).

О геометрии квазилинейных систем дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными, В. И. Близникас, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

Рассматривается расслоенное пространство, на котором определена квазилинейная система дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными. Найдены линейные дифференциально-геометрические и аффинные связности расслоенного пространства, охваченные продолжением фундаментального дифференциально-геометрического объекта, при помощи которого и определяется рассматриваемая система. Библиографий 5.

УДК–513

О геометрии нормальных систем дифференциальных уравнений высшего порядка с частными производными, В. И. Близникас, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

К системе дифференциальных уравнений ($i, j = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m$)

$$\frac{\partial^{p+1} x^i}{\partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_{p+1}}} + H^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} (x, u, P^k_\beta, \ldots, P^k_{\beta_1 \ldots \beta_p}) = 0,$$

где

$$P^i_{\beta_1 \ldots \beta_p} = \frac{\partial^p x^i}{\partial u^{\beta_1} \ldots \partial u^{\beta_p}},$$

можно присоединить пространство m-мерных поверхностных элементов p-го порядка $K^{(p)}_{n, m}$, фундаментальный объект которого определяется системой функций $H^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}}$ (объект H). Найдены структурные уравнений пространства $K^{(p)}_{n, m}$, структурные уравнения дифференциальных групп высшего порядка

О геометрии секущей поверхности одного класса пространств тензорных опорных элсментов с линейчатой базой, И. В. Близникене, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

Рассматривается многообразие $\mathfrak{M}_1^{(3)}$ (множество прямых трехмерного пространства проективного P_3) с заданным невырожденным симметрическим тензорным полем

$$\nabla U_{pq} - \omega U_{pq} = U^r_{pq\alpha}\,\omega^\alpha_r\,(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ 4;\ p,\ q=1,\ 2;\ \alpha,\ \beta=3,\ 4), \tag{1}$$

где $D\omega=0$, $\det\|U_{pq}\|>0$, ω^0_j — пфаффовые формы инфинитезимального перемещения подвижного репера проективного пространства P_3, а ω^α_p — главные формы рассматриваемого многообразия. Тензор U_{pq} устанавливает инволюцию между точками прямой (A_1, A_2). Найдены: объект h^p_α, определяющий инвариантную прямую; объект $(h^p_\alpha,\ a_{\alpha\beta},)$ определяющий квадрику; относительные тензоры $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ и $g^\alpha_{pq}\,r$. Найдены геометрические интерпретации указанных подобъектов. Библиографий 6.

УДК–519.21

К вопросу о моделировании эпидемических процессов, Л. Н. Большев, Ю. И. Круопис, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

В работе построена математическая модель процесса заражения изаболеваемости клещевым энцефалитом. По статистическим данным оценены оснвные характеристики процесса. Таблиц 1, библиографий 3.

для пространства $K_{n,m}^{(p)}$. Методом Лаптева изложены элементы многомерного экстензорного исчисления. Доказано, что объект аффинной связности $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ всегда охватывается третьим дифференциальным продолжением объекта H. Если $p=1$, то существуют охваты второго порядка. Приведены конкретные формулы для построения таких охватов для произвольного p. Отдельно рассмотрены случаи $p=2$, $p=3$, $p=4$. Библиографий 11.

Проверка гипотезы об однородности дисперсии для линейно упорядоченных случайных последовательностей, В. Н. Бондаренко, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

Положим, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots \xi_n$ линейно упорядоченная последовательность случайных величин, распределенных как $N(\mu, \sigma_k^2)$ при $i \leqslant K$ и как $N(\mu, \sigma_{n-k}^2)$ при $i > k$. Дисперсию этой последовательности считать однородной, когда гипотеза

$$H_0 : \sigma_k^2 = \sigma_{n-k}^2$$

не отклоняется для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$ при альтернативе

$$H_1 : \sigma_k^2 \neq \sigma_{n-k}^2$$

хотя бы для одного k. Для проверки нулевой гипотезы предлагается статистика

$$F_k = \frac{(n-1)^2}{2(n-2)(k-1)(n-k-1)} \cdot \left[\frac{(n-k-1) \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 - (k-1) \sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \right]^2.$$

УДК–518.9

Равномерная сходимость значений дифференциальных игр, Э. Вилкас, И. Ячяускас, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

Пусть дифференциальная игра $\Gamma_n(\xi)$ типа преследования определена множествами чистых стратегий игроков P и Q, областью преследования R и некоторым отображением F множества ситуаций $P \times Q$ на множестве траекторий X. На множестве X задан выигрыш $b_n(x)$ первого игрока. Отображение F зависит от некоторого параметра $\xi \in R$. Доказано, что если игры $\Gamma_n(\xi)$, $n = 1, 2 \ldots$ имеют значения в $b_n(x)$ сходится к $b_0(x)$ равномерно, то существует val $\Gamma_0(\xi)$, и val $\Gamma_n(\xi)$ сходится к val $\Gamma_0(\xi)$ равномерно. Аналогичные результаты получены и для последовательности игр $\Gamma_k(\xi)$, где $\Gamma_k^*(\xi)$ есть дифференциальная игра, если положить $F_\xi = F_\xi$. Библиографий 2.

УДК–519.2

Последовательная фильтрация и интерполяция компонент марковской цепи, О. А. Глонти, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

На вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbf{P})$ задана двумерная марковская цепь (Θ_n, ξ_n), $n=0, \Delta, 2\Delta, \ldots, (\Delta>0)$, где $\Theta_n=\Theta_n(\omega)\in R^1$ – ненаблюдаемая, а $\xi_n=\xi_n(\omega)\in R^1$ – наблюдаемая компоненты. Обозначим $\Theta_n(\omega)=\hat{\Theta}_n\big(\xi_0(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)\big)$ и $\tilde{\Theta}_n(\omega)=\Theta_n\big(\xi_0(\omega), \ldots, \xi_N(\omega)\big)$, $N\geqslant n$, оптимальные (в среднеквадратическом смысле) оценки (фильтрации и интерполяции, соответственно) ненаблюдаемой компоненты Θ_n по $\xi^N=(\xi_0,\ldots,\xi_N)$ и по $\xi^N=(\xi_0,\ldots,\xi_N)$. Хорошо известно, что $\hat{\Theta}_n=\mathbf{M}(\Theta_n \mid F_{\xi^n})$, $\tilde{\Theta}_n=\mathbf{M}(\Theta_n \mid F_{\xi^N})$, где F_{ξ^n} – σ – алгебра ω – множеств, порожденная случайной величиной $\xi^n=(\xi_0, \ldots, \xi_n)$. Работа посвящена выводу рекуррентных соотношений для $\hat{\Theta}_n$, $\hat{\Theta}_n$ в предположении, что марковская последовательность (Θ_n, ξ_n) управляется специальной системой. Библиографий 7.

УДК–519.21

О нестационарном распределении длины очереди однолинейной системы массового обслуживания, В. А. Ивницкий, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

В статье рассматривается однолинейная система массового обслуживания с входящим пуассоновским потоком и произвольно распределенным временем обслуживания. Находится преобразование Лапласа производящей функции нестационарного распределения длины очереди, обобщающие известную формулу Полячека–Хинчина для стационарного случая. Библиографий 7.

В условиях нулевой гипотезы величина F_k представляет собой значение случайной величины, распределенной приблизительно как X^2 с одной степенью свободы. Полученный метод может быть обобщен на случай m-независимых компонент. Библиографий 1.

УДК—511

Приближенное функциональное уравнение ξ-функции Гекке вещественного квадратичного поля, А. Матуляускас, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

Доказана теорема: Пусть K — вещественное квадратичное поле с дискриминантом $\alpha>0$, $\mathfrak{m}\neq 0$ — целый идеал поля K, $\xi(s, \Xi, \mathfrak{K})$ — дзета-функция Гекке, где $s=\sigma+it$, Ξ — первообразный характер Гекке модуля $\mathfrak{m}$ показателя $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{K}$-фиксированный класс системы идеальных чисел поля K. Пусть далее $\eta>1$ — основная единица mod $\mathfrak{m}$, $N\mathfrak{m}$ — норма идеала $\mathfrak{m}$, $\nu=\frac{\pi m}{\ln n}$. Тогда при $X\geqslant 1$, $Y\geqslant 1$, $C_1<\frac{X}{Y}<C_2$, $|4t^2-\nu^2|=16\pi^2\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}$ и $-M<\sigma<M$ равномерно по X, s и ν имеет место приближенное функциональное уравнение

$$\xi(s, \Xi, \mathfrak{K})=\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{K},\ \alpha\neq 0\\ |N\alpha|<X}}\Xi(\alpha)\,|N\alpha|^{-s}+\Psi(s)\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{K}^*,\ \alpha\neq 0\\ |N\alpha|<Y}}\Xi(\alpha)\,|N\alpha|^{s-1}+$$

$$+O\left\{X^{\frac{1}{2}-\sigma}\sqrt{\frac{|2t|+|\nu|}{1+\big||2t|-|\nu|\big|}}\ \ln(e+|2t+\nu|)\ln(e+|2t-\nu|)\right\},$$

УДК—519·21

Об одном усилении теоремы Ляпунова, В. Паулаускас, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

Пусть ξ_i $i=1, 2, \ldots, n$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. $F_n(x)$ — функция распределения суммы $S_n=$ $=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, а $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$. В работе получена оценка

$$\sup_x|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C\frac{\max(\nu_3,\ \nu_3^{1/4})}{\sqrt{n}},$$

где $\nu_3=\int|x|^3\,|d(F-\Phi)(x)|$ и C — абсолютная константа. Библиографий 2.

УДК–519.21

Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, В. Паулаускас, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

Пусть $\xi_i=(\xi_{i1}, \ldots, \xi)$, $i=1, 2, \ldots, n$ – независимые случайные векторы с нулевыми векторами математических ожиданий. Дисперсию величины ξ_{ij} обозначим σ_{ij}^2 и $B_{nl}^2=\sum_{j=1}^{n} \sigma_{jl}^2$, $S_n=\left(\frac{1}{B_{n1}} \sum_{j=1}^{n} \xi_{j1}, \ldots, \frac{1}{B_{nk}} \sum_{j=1}^{n} \xi_{jk}\right)$. Пусть S_n' – случайный нормальный вектор с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей вторых моментов величины S_n. $F_\xi(x)$, $x\in R^k$ обозначает функцию распределения случайного вектора ξ. В работе получены оценки величины $\sup_{x\in R^k} | F_{S_n}(x)-F_{S_n'}(x)|$, которые являются обобщением работы В. М. Золотарева. Библиографий 4.

УДК–519.21

Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова. I, В. А. Статулявичус, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

В статье развиваются аналитические и прямые вероятностные методы, позволяющие для распределений сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова, получить такие же результаты, как и для сумм независимых случайных величин в случае нормального предельного закона. В § 1 сформулированы теоремы о скорости сходимости, об асимметрических разложениях и поведении вероятностей больших уклонений. В §§ 2, 3 доказана серия лемм, преодолевающих основные трудности на пути от независимости к зависимости. Предлагаемый метод пригоден также и для общих схем слабой зависимости. Библиографий 64.

где суммирование производится по всём целым неассоциированным идеальным числам, удовлетворяющим указанным условиям; $N\alpha$ — норма числа α, $\Psi(s)$ — множитель из полного функционального уравнения, Ξ — характер, сопряженный Ξ, $\mathfrak{K}^*$ — класс, обратный по Гекке классу $\mathfrak{K}$, а C_1, C_2 и M — положительные постоянные. Библиографий 10.

УДК—517.535.6

Об интерполировании мероморфных периодических функций, В. И. Тевялис, «Литовский математический сборник», 1969, IX, № 2, 000.

Пусть $\{\lambda_n\}$, $n=\pm 1, \pm 2, \ldots,$ — последовательность комплексных чисел $-\pi \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_n < \pi$, $\ldots, \leqslant \mathrm{Im}\,\lambda_{-1} \leqslant \mathrm{Im}\,\lambda_{-1} \leqslant 0 < Im\,\lambda,_{2} \leqslant \mathrm{Im}\,\lambda_2 \leqslant, \ldots, \lim\limits_{n\to-\infty} \mathrm{Im}\,\lambda_n = -\infty$, $\mathrm{Im}\,\lambda_n = \infty$, и $\{Q(z, \lambda_n)\}$ — последовательность функций

$$Q(z, \lambda_n) = \begin{cases} \sum\limits_{t=l_n}^{p_n} a_{n,t}\left(e^{-iz} - e^{-i\lambda_n}\right)^t, & n>0, \\ \sum\limits^{p_n} a_{n,t}\left(e^{iz} - e^{i\lambda_n}\right)^t, & n \leqslant 0, \end{cases}$$

$l_n \leqslant 0$, $p_n \geqslant -1$, $l_n \leqslant p_n$.

В работе исследуется рост периодических мероморфных функций, разложение которых в ряд по степеням $e^{\pm iz} - e^{\pm i\lambda_n}$ в окрестности точки λ_n начинается с группы членов $Q(z, \lambda_n)$. Библиографий 5.