1969

УДК–519.21

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ К ОДНОЙ РАБОТЕ И. Н. КОВАЛЕНКО

Б. В. Гнеденко, Б. Фрайер

Введение. В статье [1] А. Реньи было дано решение следующей изящной задачи: имеется рекуррентный поток событий, для которого распределение $F(x)$ длины промежутков времени между последовательными событиями имеет конечное математическое ожидание a. Каждое из событий потока вычеркивается с вероятностью q. В оставшейся части потока распределение расстояния между последовательными сохранившимися событиями имеет распределение

$$\Psi(x)=p\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} F^{*(k)}(x), \tag{1}$$

где $F^{(1)*}(x)=F(x)$ и

$$F^{*(k)}(x)=\int_0^x F^{*(k-1)}(x-z)\,dF(z).$$

В полученном таким образом потоке производится преобразование масштаба так, чтобы математическое ожидание расстояния между соседними событиями было вновь равно a. Легкий подсчет показывает, что преобразование Лапласа $\varphi_1(x)$ так измененного распределения $\Psi(x)$ равно

$$\varphi_1(s)=\frac{pf(ps)}{1-qf(ps)}.$$

Здесь введены обозначения

$$f(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx}\,dF(x), \quad \varphi_1(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx}\,d\Phi_1(x).$$

Повторим указанную операцию разреживания и последовательного изменения масштаба n раз. В результате получим новый поток, для которого преобразование Лапласа распределения расстояний между соседними событиями оказывается равным

$$\varphi_n(s)=\frac{p^n f(p^n s)}{1-(1-p^n)f(p^n s)}.$$

Легко показать, что при $n\to\infty$

$$\varphi_n(s)\to\frac{1}{1+as}.$$

Этот результат А. Реньи был обобщен в работе Ю. К. Беляева [2], а позднее в статье И. Н. Коваленко [3]. В [3], в частности, доказана следующая теорема. Пусть можно так подобрать функцию δ_ε, что при $\varepsilon\to 0$

$$\varphi_\varepsilon(s)=\frac{\varepsilon f(\delta_\varepsilon s)}{1-(1-\varepsilon)f(\delta_\varepsilon s)}\to\psi(s), \tag{2}$$

где $\psi(s)$ — преобразование Лапласа некоторой функции распределения $\psi(x)$. Класс всех возможных собственных предельных распределений $\psi(x)$ описывается посредством преобразования Лапласа такой формулой:

$$\psi(s)=\frac{1}{1+s^\alpha}, \tag{3}$$

где α постоянная, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Приведенным результатам можно придать формулировку в терминах сумм независимых случайных величин. Действительно, обозначим расстояния между последовательными событиями первоначального потока через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ По условию эти величины независимы и имеют одно и то же распределение $F(x)$. После первой операции разреживания (без изменения масштаба) расстояние между последовательными событиями нового потока будет равно

$$s_1=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{\nu_1},$$

где (ν_1-1) — число вычеркнутых событий первоначального потока между последовательными двумя оставшимися. Величина ν_1 независима от всех ξ_i и ее распределение задается равенствами

$$P\{\nu_1=k\}=q^{k-1}p, \quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Для потока, полученного в результате n таких разреживаний (без сопутствующего изменения масштаба) расстояние между последовательными событиями равно

$$s_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{\nu_n},$$

где ν_n также случайная величина, независимая от слагаемых, с распределением

$$P\{\nu_n=k\}=(1-p^n)^{k-1}p^n, \quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Распределение суммы S_1 задается формулой (1).

Предельная теорема А. Реньи означает ничто иное, как следующий результат для сумм случайного числа одинаково распределенных неотрицательных независимых случайных величин: если распределение $F(x)$ имеет конечное математическое ожидание a, то функции распределения нормированных сумм S_n сходятся к показательному распределению. Точнее

$$P\{p^n S_n<x\}\to 1-e^{-\frac{x}{a}} \qquad (n\to\infty).$$

Точно так же приведенная нами теорема И. Н. Коваленко является предельной теоремой для сумм случайного числа случайных слагаемых. Именно она определяет класс предельных распределений для сумм случайного числа первых ν_n членов твердой последовательности $\{\xi_i\}$ одинаково распределенных, неотрицательных и независимых слагаемых. При этом предполагается, что число слагаемых независимо от ξ_i и имеет геометрическое распределение.

Об областях притяжения распределений (3) при $\alpha \neq 1$. Мы скажем, что распределение $F(x)$ принадлежит области притяжения закона $\Psi(x)$, если при надлежащем подборе нормирующих констант δ_n выполняется соотношение

$$P\{\delta_n S_n < x\} \to \Psi(x) \quad (n \to \infty).$$

Теорема А. Реньи показывает, что все распределения $F(x)$ с конечным математическим ожиданием принадлежат области притяжения экспоненциального закона.

Наша ближайшая задача состоит в разыскании всех распределений $F(x)$, принадлежащих области притяжения $\Psi(x)$, преобразование Лапласа для которого определяется формулой

$$\Psi(s) = \frac{1}{1+s^\alpha}, \qquad (0 \leqslant \alpha < 1). \tag{4}$$

Ответ содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Функция $F(x)$ принадлежит области притяжения закона $\Psi(x)$, преобразование Лапласа для которого задано формулой* (4), *тогда и только тогда, когда для каждого $c>0$*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F(cx)}{1-F(x)} = c^{-\alpha}. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость условия (5) вытекает из рассуждений И. Н. Коваленко почти немедленно. Действительно, согласно (6) и (10) работы [3], если $F(x)$ принадлежит области притяжения $\Psi(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-f(s\delta_n)}{p^n} = s^\alpha.$$

Отсюда немедленно вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-f(s\delta_n)}{1-f(\delta_n)} = s^\alpha.$$

Согласно известным теоремам (см., например, [4], стр. 336) отсюда следует, что в окрестности $s=0$ имеет место представление

$$1-f(s) = s^\alpha a\left(\frac{1}{s}\right),$$

где $a\left(\frac{1}{s}\right)$ – медленно изменяющаяся функция. Согласно тауберовой теореме (см. [4], стр. 513) функция распределения $F(x)$ имеет представление

$$1-F(x) \sim \frac{a(x)}{x^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)},$$

где $a(x)$ – указанная ранее медленно меняющаяся функция. Простым делением находим

$$\frac{1-F(cx)}{1-F(x)} \sim c^{-\alpha} \frac{a(cx)}{a(x)}.$$

Отсюда следует (5).

Нам остается показать достаточность условия (5). С этой целью заметим, что согласно [4] (см. стр. 336–337) из (5) вытекает, что при $x \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$1 - F(x) = \frac{a(x)}{x^{\alpha}}, \tag{6}$$

где $a(x)$ – медленно меняющаяся функция. Далее, в силу теоремы 2 книги В. Феллера ([4], стр. 511), из (6) вытекает асимптотическое равенство

$$1 - f(s) \sim \Gamma(1-\alpha)\, s^{\alpha} a(s^{-1}) \tag{6'}$$

в окрестности точки $s = 0$.

Последнее соотношение, как в этом легко убедиться непосредственно (это было сделано в указанной работе И. Н. Коваленко), означает, что функция $F(x)$ принадлежит области притяжения закона $\Psi(x)$.

Заметим, что только что найденная область притяжения содержит те и только те распределения, которые принадлежат области притяжения устойчивых законов с характеристическим показателем $\alpha < 1$ (см. [5], стр. 189).

Область притяжения при $\alpha = 1$. В работе [3] содержится следующее утверждение. **Следствие.** Предельное распределение для редеющего потока будет показательным (при соответствующей нормировке) тогда и только тогда, когда $-\varphi'(0) < +\infty$, т.е. когда интервалы между восстановлениями исходного процесса имеют конечное математическое ожидание.

Это утверждение ошибочно, поскольку в действительности область притяжения показательного закона несколько шире и существуют распределения $F(x)$ с бесконечным математическим ожиданием, принадлежащие области притяжения показательного закона. Исчерпывающее решение вопроса содержится в следующем предложении.

Теорема 2. *Распределение $F(x)$ принадлежит области притяжения показательного закона тогда и только тогда, когда выполнено соотношение*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x[1 - F(x)]}{\int_0^x [1 - F(z)]\, dz} = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$U(x) = \int_0^x [1 - F(z)]\, dz.$$

Преобразование Лапласа для функции $U(x)$ равно

$$u(s) = \frac{1}{s}[1 - f(s)].$$

Предположим, что условие (7) выполнено, тогда имеет место соотношение

$$0 \leqslant \lim_{x \to \infty} \left| 1 - \frac{U(bx)}{U(x)} \right| = \lim_{x \to \infty} \frac{\left| \int_{bx}^{x} [1 - F(z)]\, dz \right|}{\int_0^x [1 - F(z)]\, dz} \leqslant |1 - b| \lim \frac{x[1 - F(kx)]}{U(kx)} = 0,$$

где $k=1$ при $b>1$ и $k=b$ при $b<1$. Отсюда ясно, что $U(x)$ — медленно меняющаяся функция. В силу известной теоремы (см. [4], теорема 4, стр. 513) отсюда заключаем, что в окрестности $S=0$ ($S>0$)

$$1-f(s)\sim s\,U\left(\frac{1}{s}\right). \tag{8}$$

Это равенство означает, как это правильно сделано в работе И. Н. Коваленко, что $F(x)$ принадлежит области притяжения показательного закона.

Если известно обратное, то из рассуждений И. Н. Коваленко следует, что имеет место асимптотическое представление (8). Согласно ранее упомянутой теореме ([4], стр. 513) отсюда вытекает, что $U(x)$ — медленно меняющаяся функция.

Пусть теперь для определенности $b>1$. Тогда очевидно, что

$$0=\lim_{x\to\infty}\frac{U(bx)}{U(x)}-1=\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_x^{bx}[1-F(z)]\,dz}{U(x)}\geqslant(b-1)\varlimsup_{x\to\infty}\frac{x\,[1-F(x)]}{U(x)}\geqslant 0.$$

Мы доказали, что из принадлежности $F(x)$ к области притяжения экспоненциального распределения вытекает соотношение (7). Теорема доказана полностью.

Сравнение теоремы 2 с результатами работы А. Я. Хинчина [6] показывает, что $F(x)$ принадлежит области притяжения показательного распределения тогда и только тогда, когда суммы $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ (слагаемые ξ_k независимы и имеют распределением функцию $F(x)$) относительно устойчивы.

О выборе нормирующих множителей δ_n. Рассмотрим случай $0\leqslant\alpha<1$. Пусть δ_n выбраны так, что при $n\to\infty$

$$P\{\delta_n S_n<x\}\to\Psi(x). \tag{9}$$

Тогда в силу (2) и (6′) имеем

$$\varphi_n(s)=\frac{1}{1+\dfrac{\{1-f(\delta_n s)\}}{p^n f(\delta_n s)}}\sim\frac{1}{1+\dfrac{\Gamma(1-\alpha)\,\delta_n^{\alpha}\,a(\delta_n^{-1}s^{-1})\,s^{\alpha}}{p^n f(\delta_n s)}}.$$

А так как при больших значениях n асимптотически при любом $s>0$ $f(\delta_n s)\sim$ ~ 1, то

$$\varphi_n(s)\sim\frac{1}{1+p^{-n}\,\Gamma(1-\alpha)\,\delta_n^{\alpha}\,a(\delta_n^{-1}s^{-1})\,s^{\alpha}}.$$

Таким образом, чтобы имело место (9), необходимо асимптотическое равенство

$$p^{-n}\,\Gamma(1-\alpha)\,\delta_n^{\alpha}\,a(\delta_n^{-1})\sim 1.$$

Но мы знаем, что в условиях теоремы 1 обязательно имеет место равенство (6). Это означает, что предыдущее асимптотическое равенство можно заменить на следующее:

$$p^{-n}\,\Gamma(1-\alpha)\,[1-F(\delta_n^{-1})]\sim 1.$$

Если через $F^{(-1)}(x)$ обозначить функцию обратную $F(x)$, то асимптотически

$$\delta_n \sim \frac{1}{F^{(-1)}\left(\frac{1-p^n}{\Gamma(1-\alpha)}\right)}.$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha=1$. При дополнительном предположении

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{x[1-F(x)]}{U(x)} \ln U(x)=0, \qquad (10)$$

нормирующие множители можно выбирать по правилу

$$\delta_n=\frac{p^n}{U(p^{-n})}, \qquad (11)$$

В силу (8) δ_n можно выбирать из асимптотического равенства

$$p^{-n}\delta_n\, U(\delta_n^{-1})\sim 1. \qquad (12)$$

Правомерность выбора (11) будет доказана, если нам удастся показать (как это вытекает из (12)), что асимптотически

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U\left(p^{-n}\, U(p^{-n})\right)}{U(p^{-n})}=1.$$

Так как

$$0\leqslant \ln \frac{U\left(x\, U(x)\right)}{U(x)}=\int\limits_x^{x\,U(x)} \frac{1-F(z)}{U(z)}\,dz,$$

то при достаточно больших n, согласно (10), для любого $\varepsilon>0$

$$\ln \frac{U\left(x\, U(x)\right)}{U(x)}\leqslant \varepsilon \int\limits_x^{x\,U(x)} \frac{dz}{z\ln U(z)}\leqslant \frac{\varepsilon}{\ln U(x)}\int\limits_x^{x\,U(x)} \frac{dz}{z}=\varepsilon.$$

Требуемое доказано.

Два дополнительных замечания. Прежде всего естественно спросить себя относительно изученных нами предельных распределений, относятся ли они к классу безгранично делимых? Ответ, как мы сейчас увидим — положительный. При доказательстве этого факта мы станем опираться на некоторые факты, изложенные в книге [4] и относящиеся к распределениям неотрицательных случайных величин.

Согласно теореме 2 ([4]. стр. 517) функция $\psi(s)$ тогда и только тогда будет характеристической функцией безгранично-делимого распределения, когда производная от $\ln\psi(s)$ вполне монотонна. Но простым вычислением находим, что

$$\frac{d}{ds}\left[\ln\frac{1}{1+s^{\alpha}}\right]=\frac{1}{1+s^{\alpha}}\,\frac{-\alpha}{s^{1-\alpha}}.$$

Первый множитель правой части вполне монотонен, как преобразование Лапласа функции распределения. Второй множитель также вполне монотонная функция, как легко убедиться непосредственным расчетом. Известно, что произведение вполне монотонных функций в конечном числе является вполне монотонной функцией. Наше утверждение доказано.

Несколько сложнее технически можно доказать это утверждение, показав, что при любом n функция $\sqrt[n]{\frac{1}{1+s^{\alpha}}}$ является вполне монотонной.

Заметим, что для всех рассмотренных нами предельных распределений, за исключением показательного, плотности распределения не ограничены. Действительно, чтобы существовала плотность, ограниченная числом C, необходимо чтобы при каждом целом n и произвольном $s>0$ выполнялись неравенства

$$0 \leqslant \frac{(-s)^n \psi^{(n)}(s)}{n!} \leqslant \frac{C}{s}.$$

Простое вычисление показывает, что уже при $n=1$ это неравенство не выполнено.

Функция распределения $F(x)$ называется одновершинной с вершиной в точке $x=a$, если при $x<a$ она выпукла, а при $x>a$ — вогнута. Точку a естественно назвать вершиной распределения. А. Я. Хинчин [7] нашел необходимое и достаточное условие одновершинности с вершиной в заданной точке. Оказывается, что $F(x)$ одновершинна с вершиной в точке $a=0$ тогда и только тогда, когда ее характеристическая функция $f(t)$ представима в виде

$$f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t v(u)\, du,$$

где $v(u)$ — некоторая характеристическая функция.

Повторив дословно доказательство А. Я. Хинчина, можно показать, что распределение $F(x)$ неотрицательной случайной величины одновершинно с вершиной в точке $a=0$ тогда и только тогда, когда ее преобразование Лапласа имеет вид

$$f(s) = \frac{1}{s} \int_0^s v(u)\, du, \tag{13}$$

где $v(u)$ — преобразование Лапласа от некоторой функции распределения $V(x)$, для которой $V(x)=0$ для всех $x \leqslant 0$.

Легко убедиться непосредственным подсчетом, что равенство (13) для всех функций (4) выполнено, если в качестве $o(u)$ выбрать функцию

$$v(u) = \frac{1-\alpha}{1+u^{\alpha}} + \frac{\alpha}{(1+u^{\alpha})^2},$$

очевидно, являющуюся преобразованием Лапласа для функции распределения неотрицательной случайной величины.

Поскольку при $\alpha<1$ плотности распределений (4) неограничены, из одновершинности их мы заключаем, что при $\alpha<1$ все изучаемые плотности при $x=0$ обращаются в бесконечность.

При $\alpha=0{,}5$ можно указать простую явную форму плотности распределения изученных нами распределений. Согласно таблице, приведенной в [8], плотность, породившая преобразование Лапласа $\psi(s) = \frac{1}{1+\sqrt{s}}$, имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} - \frac{2e^x}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-u^2}\, du.$$

3. Leid. Nr. 10895

Все результаты настоящей работы сохраняются, если производить не последовательное разреживание потока каждый раз с одной и той же вероятностью p, а на n-ой стадии производить единственное разреживание, сохраняя каждое событие первоначального потока с вероятностью p_n и если $p_n \to 0$ при $n \to \infty$ (таким образом p^n можно заменить на любую последовательность p_n, стремящуюся к 0).

Московский Государственный
университет

Поступило в редакцию
19.XI.1968

Литература

1. A. Rènyi, A. Poisson-folyamat egy jellemzèse, Magyar tud. akad. Mat, kutató int. közl., 1, 4, 1956, 519–527.
2. Ю. К. Беляев, Предельные теоремы для редеющих потоков, Теория вероятностей и ее применения, 8, 2, 1963, 175–184.
3. И. Н. Коваленко, О классе предельных распределений для редеющих потоков однородных событий, Лит. матем. сб., V, № 4 (1965), 569–573.
4. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее применения, т. 2, Изд. „Мир", 1967.
5. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГТТИ, 1949.
6. A. Chintschin, Su una legge dei grandi numeri generalizzata, Giornale dell Institutto Italiano degli attuari, Anno VII, XIV, 4, 365–377, 1936.
7. А. Я. Хинчин, Об унимодальных распределениях, Изв. НИИ мат. мех. Томского университета, 1938, т. 2, вып. 2, стр. 1–7.
8. В. А. Диткин, А. П. Прудников, Справочник по операционному исчислению, М. – Л., Издательство Наука, 1965.

KELETAS PASTABŲ APIE VIENĄ I. KOVALENKOS DARBĄ

B. Gnedenka, B. Frajeris

(Reziumė)

Parodoma, kad rekurentinio srauto nuoseklus išretinimas, išnagrinėtas A. Renji [1], J. Beliajevo [2] ir I. Kovalenkos [3], yra ekvivalentiškas atsitiktinio skaičiaus nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumavimui. Sumavimo indeksas nepriklauso nuo sumos narių ir turi geometrinį pasiskirstymą.

I. Kovalenkos nustatyta galimų ribinių pasiskirstymų klasė išretinimo uždaviniui. Šiame darbe parodoma, kad visi šios klasės pasiskirstymai yra be galo dalūs, turi tankius ir yra vienaviršūniai su viršūne koordinačių pradžioje. Be to, surastos visų galimų ribinių pasiskirstymų traukos sritys.

EINIGE BEMERKUNGEN ZU EINER ARBEIT VON I. KOWALENKO

B. Gnedenko, B. Freier

(Zusammenfassung)

Es wurde gezeigt, daß die Pausenzeitverteilung eines aufgespaltenen rekurrenten Prozesses, die von A. Renyi [1], J. Beljaew [2], I. Kowalenko [3] untersucht worden ist, äquivalent der Verteilung einer Summe von positiven, gleichverteilten, unabhängigen Zufallsgrößen mit einer zufälligen Anzahl von Summanden ist. Der Summierungsindex ist hierbei unabhängig von den Summanden und geometrisch verteilt.

In dieser Arbeit werden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, wann die Pausenzeitverteilung gegen eine bestimmte Grenzverteilung konvergiert. Weiterhin wird gezeigt, daß die von I. Kowalenko [3] gefundene Klasse der Grenzverilungen unbegrenzt teilbar ist und eingipflige Dichten besitzt.