1969

УДК–519.21

ДОСТАТОЧНОСТЬ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ

Б. Григелионис

1. Введение

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ задана последовательность $\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$, где σ-алгебры $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}$, $n \geqslant 0$, и $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \ldots$, а случайные величины Z_n принимают действительные значения и при каждом $n \geqslant 0$ $\mathscr{F}_n$-измеримы. Обозначим $\mathfrak{M}$ класс случайных величин τ, называемых моментами остановки (м.о.), принимающих целые неотрицательные значения, такие, что $\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathscr{F}_n$ для всех $n \geqslant 0$ и $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$. Мы далее всюду будем предполагать, что $\mathbf{M}|Z_n| < \infty$ при каждом $n \geqslant 0$ и $\mathbf{M}(\sup\limits_{n \geqslant 0} Z_n^+) < \infty$, где $Z_n^+ = \max(0, Z_n)$.

Основными задачами оптимальной остановки являются находжения условий существования и эффективное построение ε-оптимальных м. о. ($\varepsilon \geqslant 0$), т. е. м. о. τ_ε, таких, что

$$\mathbf{M}Z_{\tau_\varepsilon} \geqslant \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}Z_\tau - \varepsilon.$$

Задачу оптимальной остановки можно интерпретировать как последовательную игру одного игрока, где стратегия игрока заключается в выборе м.о. игры τ, $\tau \in \mathfrak{M}$, так, чтобы максимизировать средний выигрыш $\mathbf{M}Z_\tau$. При этом Z_n является выигрышем, когда $\tau = n$, а σ-алгебры $\mathscr{F}_n$ представляют собой информацию игрока о прошлом и настоящем в момент времени n.

Мы будем говорить, что задача оптимальной остановки последовательности $\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ редуцируется к задаче оптимальной остановки последовательности $\{Z'_n, \mathscr{F}'_n, n \geqslant 0\}$, если каждый ε-оптимальный м. о. ($\varepsilon \geqslant 0$) последней задачи является ε-оптимальным м. о. для первой задачи. Таким образом, редукция возможна по двум направлениям. Во-первых, иногда можно заменить случайные величины Z_n, $n \geqslant 0$, более простыми случайными величинами Z'_n, $n \geqslant 0$, и первоначальную задачу редуцировать к задаче оптимальной остановки последовательности $\{Z'_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$. Во-вторых, в некоторых случаях можно сузить σ-алгебры $\mathscr{F}_n$, заменяя их σ-алгебрами $\mathscr{F}'_n \subset \mathscr{F}_n$, т.е. без ущерба часть информации сразу исключить из рассмотрения и тем самым существенно упростить задачу, редуцировав ее к задаче оптимальной остановки последовательности $\{Z'_n, \mathscr{F}'_n, n \geqslant 0\}$.

В наших определениях достаточности мы будем требовать, чтобы система σ-алгебр $\mathscr{F}'_n$, $n \geqslant 0$, была монотонно возрастающей, а случайные величины Z'_n были при каждом $n \geqslant 0$ $\mathscr{F}'_n$-измеримыми для того, чтобы к сследованию редуцированной задачи можно было снова применить известную общую теорию оптимальной остановки случайных последовательностей (см. [1–4]).

Этим они отличаются от известных определений достаточных σ-алгебр в статистическом последовательном анализе (см., например, [5—13]), где система σ-алгебр $\{\mathscr{F}'_n, n\geqslant 0\}$ называется достаточной, если для класса $\mathfrak{M}'$ м. о. τ, таких, что $\{\omega : \tau(\omega)=n\}\in\mathscr{F}'_n$ при каждом $n\geqslant 0$, $\sup\limits_{\tau\in\mathfrak{M}} MZ_\tau=\sup\limits_{\tau\in\mathfrak{M}'} MZ_\tau$. Например, если $\mathscr{F}_n=\sigma(X_0, \ldots, X_n)$, где $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$ — наименьшая σ-алгебра, порожденная случайными величинами $X_0, \ldots, X_n$, и

$$Z_n=g(X_n)+\sum_{k=0}^{n-1} c(X_k, X_{k+1}), \tag{1}$$

где $\{X_n, n\geqslant 0\}$ — однородный марковский процесс, принимающий значения в некотором измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$, то при весьма общих условиях известно (см. [14—15], [2],[4]), что система σ-алгебр $\mathscr{F}_n=\sigma(X_n)$ является достаточной в прежднем смысле, хотя эти σ-алгебры немонотонны, и Z_n не является $\mathscr{F}_n$-измеримой. Но в тех случаях, когда мы доказываем, что некоторая система σ-алгебр $\mathscr{F}'_n=\sigma(X_0, \ldots, X_n)$ является достаточной, а случайные величины Z_n имеют вид (1), где $\{X_n, n\geqslant 0)$ — однородный марковский процесс, то из вышеделанного замечания следует, что система статистик $\{X_n, n\geqslant 0\}$ является достаточной и в прежднем смысле. Обратное очевидно. Таким образом, в таких случаях результаты эквивалентны.

§ 1. Определения. Критерий достаточности

Определение 1. *Супермартингал (мартингал) $\{Y_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$ называется регулярным, если для каждого $\tau\in\mathfrak{M}$, такого, что* MY_τ *существует,* $M(Y_\tau \mid \mathscr{F}_n)\leqslant Y_n$ *почти всюду (п.в.)* $\big(M(Y_\tau\mid\mathscr{F}_n)=Y_n$ *п. в.*$\big)$ *на множестве* $\{\omega : \tau(\omega)\geqslant n\}$ *для всех* $n\geqslant 0$.

Имеет место следующее простое, но полезное утверждение.

Теорема 1. *Пусть $Z_n=Z'_n+Z''_n$, где последовательность $\{Z''_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$ является регулярным мартингалом, таким, что MZ''_τ существует для всех $\tau\in\mathfrak{M}$. Тогда задача оптимальной остановки $\{Z_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$ редуцируется к задаче оптимальной остановки последовательности $\{Z'_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$.*

Доказательство. В силу регулярности мартингала $\{Z''_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$ для всех $\tau\in\mathfrak{M}$ $M(Z''_\tau\mid\mathscr{F}_0)=Z''_0$ п. в. и поэтому $MZ''_\tau=MZ''_0$. Отсюда

$$\sup_{\tau\in\mathfrak{M}} MZ_\tau=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}}[MZ'_\tau+MZ''_0]=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}} MZ'_\tau+MZ''_0.$$

Теорема доказана.

Определение 2. *Монотонная последовательность σ-алгебр $\mathscr{F}'_0<F'_1<\ldots$ называется системой достаточных σ-алгебр, если $\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_n$ —, случайные величины Z'_n* $\mathscr{F}'_n$-измеримы и $\sup\limits_{\tau\in\mathfrak{M}} MZ_\tau=\sup\limits_{\tau\in\mathfrak{M}'} MZ'_\tau+MZ''_0$, где $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$, —класс м. о. τ, таких, что $\{\omega : \tau(\omega)=n\}\in\mathscr{F}'_n$ при каждом $n\geqslant 0$.*

Определение 3. *Случайная последовательность $\{X_n, n\geqslant 0\}$, где X_n принимает значения в некотором измеримом пространстве $(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{A}_n)$, называется системой статистик относительно σ-алгебр $\mathscr{F}_n$, $n\geqslant 0$, если при каждом n X_n является $\mathscr{F}_n$-измеримой.*

*) Мы далее всюду полагаем фиксированным некоторое разложение $Z_n=Z'_n+Z''_n$, удовлетворяющее условиям теоремы 1. В частности, можно выбрать $Z''_n\equiv 0$.

Определение 4. *Система статистик* $\{X_n, \ n\geqslant 0\}$ *относительно* σ*-алгебр* $\mathscr{F}_n$ *называется системой достаточных статистик, если* σ*-алгебры* $\mathscr{F}'_n=\sigma(X_0, \ldots, X_n)$ *составляют систему достаточных* σ*-алгебр.*

Определение 5. *Система достаточных статистик* $\{X_n, \ n\geqslant 0\}$ *называется системой марковских достаточных статистик, если процесс* $\{X_n, \ n\geqslant 0\}$ *является марковским, т. е.*

$$\mathbf{P}\{X_{n+1}\in A \mid \mathscr{F}'_n\}=\mathbf{P}\{X_{n+1}\in A \mid X_n\}$$

п. в. для всех $A\in\mathfrak{A}_{n+1}$ *и* $n\geqslant 0$.

Имеет место следующий общий критерий достаточности.

Теорема 2. *Монотонная система* σ*-алгебр* $\mathscr{F}'_0\subset\mathscr{F}'_1\subset\ldots, \mathscr{F}'_n\subset\mathscr{F}_n$, *является системой достаточных* σ*-алгебр, если для любого* $n\geqslant 0$ Z'_n $\mathscr{F}'_n$*-измеримы и для произвольной* $\mathscr{F}'_{n+1}$*-измеримой суммируемой случайной величины* Z

$$\mathbf{M}(Z \mid \mathscr{F}_n)=\mathbf{M}(Z \mid \mathscr{F}'_n) \text{ п. в.} \tag{2}$$

При доказательстве этого утверждения будем пользоваться следующими известными результатами.

Обозначим

$$\mathfrak{M}_n=\left\{\tau:\tau\in\mathfrak{M}, \ \mathbf{P}\{\tau\geqslant n\}=1\right\},$$

$$\mathfrak{M}_n^N=\left\{\tau:\tau\in\mathfrak{M}, \ \mathbf{P}\{n\leqslant\tau\leqslant N\}=1\right\}, Y_n=\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}}\mathbf{M}(Z_\tau \mid \mathscr{F}_n),$$

где для произвольного семейства случайных величин $\{W_\alpha, \ \alpha\in I\}$ $\operatorname*{ess\,sup}_{\alpha\in I} W_\alpha$ определяется как случайная величина W, такая, что $W\geqslant W_\alpha$ п. в. для каждого $\alpha\in I$ и $W\leqslant W'$ п. в., где W' – любая случайная величина, такая, что $W'\geqslant W_\alpha$ п. в. для всех $\alpha\in I$ (см. [1], [16]).

Определим

$$\tau_\varepsilon(\omega)=\begin{cases} 0 & \text{при } \ Y_0(\omega)=-\infty, \\ k & \text{при } \ Y_j(\omega)>Z_j(\omega)+\varepsilon, \ 0\leqslant j<k, \\ & \quad\ \ Y_k(\omega)\leqslant Z_k(\omega)+\varepsilon, \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Теорема А [1–3]. *При* $\varepsilon>0$ τ_ε *является* ε*-оптимальным м. о. последовательности* $\{Z_n, \mathscr{F}_n, \ n\geqslant 0\}$.

Пусть далее

$$Z_n(a)=\max(a, \ Z_n), \ \ Y_n^N(a)=\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_n^N}\mathbf{M}(Z_\tau(a) \mid \mathscr{F}_n).$$

Теорема В [2–4]. $Y_N^N(a)=Z_N(a)$,

$$Y_n^N(a)=\max\{Z_n(a), \ \mathbf{M}(Y_{n+1}^N(a) \mid \mathscr{F}_n\}$$

п. в. для

$$0\leqslant n<N$$

и

$$\lim_{a\to-\infty}\ \lim_{N\to\infty} Y_n^N(a)=Y_n$$

п. в. для всех $n\geqslant 0$.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Поскольку

$$Y_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{W}_n} \mathbf{M}\,(Z'_\tau + Z''_\tau \mid \mathcal{F}_n) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{W}_n} \mathbf{M}\,(Z'_\tau \mid \mathcal{F}_n) + Z''_n \tag{4}$$

и Z'_n $\mathcal{F}'_n$-измеримы при каждом $n \geqslant 0$, то в силу теоремы А и формул (3) и (4) достаточно доказать, что случайные величины $Y'_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{W}_n} \mathbf{M}\,(Z'_\tau \mid \mathcal{F}_n)$ являются $\mathcal{F}'_n$-измеримыми для всех $n \geqslant 0$. Действительно, тогда

$$\{\,\omega : \tau_\varepsilon(\omega) = n\,\} = \bigcap_{j=0}^{n=1} \{\,Y'_j > Z'_j + \varepsilon\,\} \bigcap \{\,Y'_n \leqslant Z'_n + \varepsilon\,\} \in \mathcal{F}'_n, \quad n \geqslant 0,$$

т. е. $\tau_\varepsilon \in \mathfrak{M}'$ при каждом $\varepsilon > 0$ и $\sup_{\tau\in\mathfrak{W}} \mathbf{M}Z_\tau = \sup_{\tau\in\mathfrak{W}'} \mathbf{M}Z'_\tau + \mathbf{M}Z''_0$.

Установим сначала, что для всех $n \geqslant 0$ и $N \geqslant n$ $Y'^N_n(a) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{W}^N_n} \mathbf{M}\,(Z'_\tau(a) \mid \mathcal{F}_n)$, где $Z'_n(a) = \max\,(a, Z'_n)$, является $\mathcal{F}'_n$-измеримой случайной величиной. Доказательство будем вести по индукции. При $n = N$ $Y'^N_N(a) = Z'_N(a) = \max\,(a, Z'_N)$ в силу предположения теоремы является $\mathcal{F}'_N$-измеримой. Пусть теперь $Y'^N_{n+1}(a)$, $0 \leqslant n < N$, — $\mathcal{F}'_{n+1}$-измерима. Поскольку $Y'^N_n(a) = \max\,\{\,Z'_n(a), \mathbf{M}\,(Y'^N_{n+1}(a) \mid F_n)\,\}$ п. в., а $Y'^N_{n+1}(a)$ суммируема и $\mathcal{F}'_{n+1}$-измерима, то $Y'^N_n(a)$ будет $\mathcal{F}_n$-измеримой.

Так как по теореме В

$$Y'_n = \lim_{a\to-\infty} \lim_{N\to\infty} Y'^N_n(a) \text{ п. в.},$$

то Y'_n будет $\mathcal{F}'_n$-измеримой при всех $n \geqslant 0$.

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Если выполнены условия теоремы 2, то задача оптимальной остановки последовательности $\{Z_n, \mathcal{F}_n, n \geqslant 0\}$ редуцируется к задаче оптимальной остановки последовательности $\{Z'_n, \mathcal{F}'_n, n \geqslant 0\}$, которая часто бывает существенно проще первоначальной.

Предположим теперь, что имеется случайный процесс $X_n = (X'_n, X''_n)$, $n \geqslant 0$, такой, что X_n принимает значения в измеримом пространстве $(\mathcal{X}'_n \times \mathcal{X}''_n, \mathfrak{A}'_n \times \mathfrak{A}''_n)$, $\mathcal{F}_n = \sigma\,(X_0, \ldots, X_n)$, $Z'_n = g_n\,(X'_0, \ldots, X'_n)$, где $g_n\,(X_0, \ldots, X_n)$ — $\mathfrak{A}'_0 \times \ldots \times \mathfrak{A}'_n$-измеримая функция. Обозначим $\mathcal{F}'_n = \sigma\,(X'_0, \ldots, X'_n)$.

Следствие 1. *Если при каждом* $n \geqslant 0$ *и* $A \in \mathfrak{A}'_{n+1}$

$$\mathbf{P}\,\{X'_{n+1} \in A \mid \mathcal{F}_n\} = \mathbf{P}\,\{X'_{n+1} \in A \mid \mathcal{F}'_n\} \text{ п. в.}, \tag{5}$$

то последовательность $\{X'_n, n \geqslant 0\}$ *является системой достаточных статистик.*

Доказательство. Если Z — $\mathcal{F}'_{n+1}$-измеримая суммируемая случайная величина, то существует $\mathfrak{A}'_0 \times \ldots \times \mathfrak{A}'_{n+1}$ — измеримая функция $f_{n+1}\,(x_0, \ldots, x_{n+1})$, такая, что $Z = f_{n+1}\,(X'_0, \ldots, X'_{n+1})$. Если

$$f_{n+1}\,(X_0, \ldots, X_{n+1}) = \sum_{k=1}^{N} f^{(k)}_n\,(x_0, \ldots, x_n)\,\chi_{A_k}(x_{n+1}), \tag{6}$$

где $A_k \in \mathfrak{A}'_{n+1}$, а $f^{(k)}_n\,(x_0, \ldots, x_n)$ — $\mathfrak{A}'_0 \times \ldots \times \mathfrak{A}'_n$-измеримые функции, $k = 1, \ldots, N$, то равенство (2) следует из (5). Для функций f_{n+1} общего вида всегда можно найти монотонную последовательность функций вида (5), сходящуюся к f_{n+1}, и равенство (2) получается предельным переходом под знаком условного математического ожидания. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Если при каждом $n\geqslant 0$ и $A\in\mathfrak{A}'_{n+1}$ п. в.*

$$\mathbf{P}\{X'_{n+1}\in A\mid\mathscr{F}_n\}=\mathbf{P}\{X'_{n+1}\in A\mid X'_n\},\tag{7}$$

то последовательность $\{X'_n,\ n\geqslant 0\}$ является системой марковских достаточных статистик.

В самом деле, в силу следствия 1 $\{X'_n,\ n\geqslant 0\}$ является системой достаточных статистик. Но из (7) находим, что для всех $n\geqslant 0$ и $A\in\mathfrak{A}'_{n+1}$ п. в.

$$\mathbf{P}\{X'_{n+1}\in A\mid\mathscr{F}'_n\}=\mathbf{M}\left(\mathbf{P}\{X'_{n+1}\in A\mid\mathscr{F}_n\}\mid\mathscr{F}'_n\right)=\mathbf{P}\{X'_{n+1}\in A\mid X'_n\}.$$

§ 2. Транзитивность и марковость достаточных статистик

В случае, когда $\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,\ \ldots,\ X_n)$, где $\{X_n,\ n\geqslant 0\}$ — некоторая случайная последовательность, такая, что X_n принимает значения в измеримом пространстве $(\mathscr{X}_n,\ \mathfrak{A}_n)$, $n\geqslant 0$, важным является понятие транзитивности статистик.

Определение 6. *Система статистик $\{X'_n,\ n\geqslant 0\}$ относительно σ-алгебр $\mathscr{F}_n$, такая, что X'_n принимает значения в измеримом пространстве $(\mathscr{X}'_n,\ \mathfrak{A}'_n)$, называется системой транзитивных статистик, если при каждом $n\geqslant 0$ существует $\mathfrak{A}'_n\times\mathfrak{A}_{n+1}$-измеримая функция $\varphi_n(x',\ x)$, такая, что*

$$X'_{n+1}=\varphi_n(X'_n,\ X_{n+1}).\tag{8}$$

Теорема 3. *Система транзитивных статистик $\{X'_n,\ n\geqslant 0\}$ является системой транзитивных марковских достаточных статистик, если для всех $n\geqslant 0$ и $A\in\mathfrak{A}_{n+1}$ п. в.*

$$\mathbf{P}\{X_{n+1}\in A\mid\mathscr{F}_n\}=\mathbf{P}\{X_{n+1}\in A\mid X'_n\}\tag{9}$$

и $Z'_n=f_n(X'_0,\ \ldots,\ X'_n)$, где $f_n(x_0,\ \ldots,\ x_n)$ — некоторая $\mathfrak{A}'_0\times\ \ldots\ \times\mathfrak{A}'_n$-измеримая функция.

Доказательство. Пусть $\hat{X}_n=(X'_n,\ X_n)$, $n\geqslant 0$. Поскольку X'_n $\mathscr{F}_n$-измеримы для всех $n\geqslant 0$, то $\sigma(\hat{X}_0,\ \ldots,\ \hat{X}_n)=\mathscr{F}_n$ и в силу следствий 1 и 2 нам достаточно доказать, что для всех $n\geqslant 0$ и $A\in\mathfrak{A}'_{n+1}$ п. в.

$$\mathbf{P}\{X'_{n+1}\in A\mid\mathscr{F}_n\}=\mathbf{P}\{X'_{n+1}\in A\mid X'_n\}.\tag{10}$$

Покажем, что для любой ограниченной $\mathfrak{A}'_{n+1}$-измеримой функции $\psi(x')$ п. в.

$$\mathbf{M}\left(\psi(X'_{n+1})\mid\mathscr{F}_n\right)=\mathbf{M}\left(\psi(X'_{n+1})\mid X'_n\right).\tag{11}$$

Из (11) при $\psi(x')=\chi_A(x')$, $A\in\mathfrak{A}'_{n+1}$ будет следовать (10).

В силу (8) $\psi(X'_{n+1})=\psi\left(\varphi_n(X'_n,\ X_{n+1})\right)=\psi_n(X'_n,\ X_{n+1})$, где $\psi_n(x',\ x)$ — при каждом $n\geqslant 0$ ограниченная $\mathfrak{A}'_n\times\mathfrak{A}_{n+1}$-измеримая функция. Таким образом, мы должны доказать, что для таких функций п. в.

$$\mathbf{M}\left(\psi_n(X'_n,\ X_{n+1})\mid\mathscr{F}_n\right)=\mathbf{M}\left(\psi_n(X'_n,\ X_{n+1})\mid X'_n\right).\tag{12}$$

Если

$$\psi_n(x', x) = \sum_{k=1}^{N} \psi_n^{(k)}(x^1)\chi_{A_k}(x), \tag{13}$$

где $A_k \in \mathfrak{A}_{n+1}$, $\psi_n^{(k)}(x')$ — любые ограниченные $\mathfrak{A}_n'$-измеримые функции, $k=1, \ldots, N$, равенство (12) следует из (10). Общий случай получаем предельным переходом под знаком условного математического ожидания, монотонно приближая функцию $\psi_n^*(x', x)$ к функциям вида (13). Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Определения и результаты §§ 2 и 3 с очевидными изменениями остаются в силе в случае оптимальной остановки конечной случайной последовательности $\{Z_n, \mathcal{F}_n, 0 \leqslant n \leqslant N\}$, $N < \infty$.

§ 4. Примеры

В качестве иллюстраций рассмотрим некоторые частные случаи следующей общей схемы, к которой можно свести многие задачи статистического последовательного анализа (см. [8—13]).

Пусть имеется двумерный случайный процесс (Θ_n, η_n), $n \geqslant 0$, с известными своими конечномерными распределениями, принимающий значения в некотором измеримом пространстве $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)$, и заданы $\mathfrak{A}_1^{n+1} \times \mathfrak{A}_2^{n+1}$-измеримые функции $g_n(x_0', \ldots, x_n', x_0'', \ldots, x_n'')$, $n \geqslant 0$. Рассматривается задача оптимальной остановки при выборе $\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_0, \ldots, \eta_n)$ и $Z_n = \mathbf{M}[g_n(\Theta_0, \ldots, \Theta_n, \eta_0, \ldots, \eta_n) \mid \mathcal{F}_n]$.

Последовательность (Θ_n, η_n), $n \geqslant 0$, называется частично наблюдаемой последовательностью. Ненаблюдаемая компонента Θ_n играет роль неизвестных параметров, которые предполагаются случайными и вообще меняющимися во времени, с априори известными распределениями вероятностей (байесовский подход). При некоторых более специальных предположениях о структуре процесса (Θ_n, η_n), $n \geqslant 0$ и функций g_n можно исследовать условия существования и структуру ε-оптимальных м. о., существование тех или иных систем достаточных статистик и др.

Пусть $\{\Theta_n, n \geqslant 0\}$ — марковская цепь со множеством состояний $\{0, 1, \ldots, N\}$, начальным распределением $\pi_0(k) = P\{\Theta_0 = k\}$, $k = 0, 1, \ldots, N$, и переходными вероятностями $p_{ij}(n) = \mathbf{P}\{\Theta_{n+1} = j \mid \Theta_n = i\}$, $i, j = 0, 1, \ldots, N$.

Предположим, что $\{\eta_n, n \geqslant 0\}$ — последовательность случайных величин, принимающих значения в некотором измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathfrak{A})$, таких, что $P\{\eta_0 = 0\} = 1$, $\eta_1, \eta_2, \ldots$ при фиксированной траектории цепи $\{\Theta_n, n \geqslant 0\}$ независимы и η_n при $\Theta_n = k$ имеет плотность $p_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, относительно некоторой σ-конечной меры μ.

Обозначим

$$\pi_k^n(j) = \mathbf{P}\{\Theta_k = j \mid \mathcal{F}_n\}, \quad k, n \geqslant 0,$$

$$\pi_n(j) = \pi_n^n(j), \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

Пусть

$$g_n = g_n(\Theta_0, \ldots, \Theta_n) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(\Theta_k) + g_n(\Theta_n).$$

Тогда

$$Z_n = \mathbf{M}\Big[\Big(\sum_{k=0}^{n-1} c_k(\Theta_k) + g_n(\Theta_n)\Big)\Big|\mathscr{F}_n\Big] = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{N} c_k(j)\,\pi_k^n(j) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{N} g_n(j)\,\pi_n(j).$$

Обозначим

$$Z_n' = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{N} c_k(j)\,\pi_k(j) + \sum_{j=0}^{N} g_n(j)\,\pi_n(j)$$

и

$$Z_n'' = Z_n - Z_n' = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{N} c_k(j)\,\Big(\pi_k^n(j) - \pi_k(j)\Big).$$

Заметим, что последовательность $\{Z_n'', \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$ является мартингалом. Действительно,

$$\mathbf{M}(Z_{n+1}''|\mathscr{F}_n) = \mathbf{M}\Big[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{N} c_k(j)\Big(\pi_k^{n+1}(j) - \pi_k(j)\Big)\Big|\mathscr{F}_n\Big] =$$

$$= \mathbf{M}\Big[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{N} c_k(j)(\mathbf{P}\{\Theta_k = j|\mathscr{F}_{n+1}\} - \mathbf{P}\{\Theta_k = j|\mathscr{F}_k\})|\mathscr{F}_n\Big] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{N} c_k(j)(\mathbf{P}\{\Theta_k = j|\mathscr{F}_n\} - \mathbf{P}\{\Theta_k = j|\mathscr{F}_k\}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{N} c_k(j)(\mathbf{P}\{\Theta_k = j|\mathscr{F}_n\} - \mathbf{P}\{\Theta_k = j|\mathscr{F}_k\}) = Z_n''.$$

Теорема 4. *Если мартингал* $\{Z_n'', \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$ *регулярен, то*

$$\pi_n = \Big(\pi_n(1), \ldots, \pi_n(N)\Big),\ n\geqslant 0,$$

является системой транзитивных марковских достаточных статистик.

Доказательство. Будем пользоваться теоремой 3. Достаточно доказать, что статистики π_n, $n\geqslant 0$, транзитивны и что $\mathbf{P}\{\eta_{n+1}\in A\,|\,\mathscr{F}_n\} = \mathbf{P}\{\eta_{n+1}\in A\,|\,\pi_n\}$ п. в. для всех $n\geqslant 0$ и $A\in\mathfrak{A}_2$.

По формуле Байеса

$$\pi_{n+1}(j) = \frac{p_j(\eta_{n+1})\sum\limits_{i=0}^{n}\pi_n(i)\,p_{ij}(n)}{\sum\limits_{i,j=0}^{N} p_j(\eta_{n+1})\pi_n(i)\,p_{ij}(n)}. \qquad (14)$$

Поскольку $\pi_n(0) = 1 - \sum\limits_{i=1}^{N}\pi_n(i)$, то из формулы (14) следует транзитивность статистик π_n, $n\geqslant 0$.

Для всех $n \geqslant 0$ и $A \in \mathfrak{A}_2$, очевидно, п. в.

$$\mathbf{P}\{\eta_{n+1} \in A \mid \mathcal{F}_n\} = \sum_{i,j=0}^{N} p_{ij}(n)\, \pi_i(n) \int_A p_j(x)\, \mu(dx) \tag{15}$$

и поэтому

$$\mathbf{P}\{\eta_{n+1} \in A \mid \mathcal{F}_n\} = \mathbf{P}\{\eta_{n+1} \in A \mid \pi_n\}.$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 3. Если марковская цепь $\{\Theta_n, n \geqslant 0\}$ однородна, то из формул (14) и (15) следует, что и последовательность $\{\pi_n, n \geqslant 0\}$ будет однородным марковским процессом.

Замечание 4. Теорема 4 даже в случае $c_k(\Theta) \equiv c(\Theta)$ не следует из результатов работы [8], так как Z_n не является аддитивным функционалом от $\{\pi_n, n \geqslant 0\}$.

Пример 1 (задача о „разладке" (см. [9])). Пусть $\Theta_n = 0$ при $n < \varkappa$ и $\Theta_n = 1$ при $n \geqslant \varkappa$, где $\varkappa$ – случайная величина, принимающая лишь целые неотрицательные значения, такая, что $\mathbf{P}\{\varkappa = 0\} = \pi_0$, $\mathbf{P}\{\varkappa = n \mid \varkappa > 0\} = r_n$, $n \geqslant 1$. Это соответствует случаю, когда $N = 1$, $p_{00}(n) = \frac{q_{n+1}}{q_n}$, $p_{01}(n) = 1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}$, $p_{10}(n) = 0$, $p_{11}(n) = 1$, где $q_n = \mathbf{P}\{\varkappa > n \mid \varkappa > 0\}$.

Пусть $c_k(\Theta) = -c\Theta$, $g_k(\Theta) = -g(1-\Theta)$, c, g – некоторые положительные константы, $\pi_n = \pi_n(1)$ и $\pi_k^n = \pi_k^n(1)$. Тогда

$$Z_n^n = -c \sum_{k=0}^{n-1} (\pi_k^n - \pi_k) = \sum_{k=0}^{n-1} [(1-\pi_k) - (1-\pi_k^n)] =$$

$$= -c \sum_{k=0}^{n-1} [\mathbf{P}\{\varkappa > k \mid \mathcal{F}_k\} - \mathbf{P}\{\varkappa > k \mid \mathcal{F}_n\}].$$

Поскольку

$$[Z_n^n]^- \leqslant c \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\varkappa > k \mid \mathcal{F}_k\} \leqslant c \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\varkappa > k \mid \mathcal{F}_k\},$$

$$[Z_n^n]^+ = \max(0, -Z_n^n) \leqslant c \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\varkappa > k \mid \mathcal{F}_n\} =$$

$$= c\mathbf{M}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{\{\varkappa > k\}} \mid \mathcal{F}_n\right) \leqslant c\mathbf{M}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{\{\varkappa > k\}} \mid \mathcal{F}_n\right),$$

где χ_A – характеристическая функция множества A,

$$\mathbf{M}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\varkappa > k \mid \mathcal{F}_k\}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\varkappa > k\} = \mathbf{M}\varkappa$$

и

$$\mathbf{M}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{\{\varkappa > k\}}\right) = \mathbf{M}\varkappa,$$

то в случае, когда $\mathbf{M}\varkappa<\infty$, в силу известных свойств мартингалов (см. [17]) мартингал $\{Z_n'', \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$ регулярен. Итак, если $\mathbf{M}\varkappa<\infty$, то по теореме 4 $\{\pi_n, n\geqslant 0\}$ является системой транзитивных марковских достаточных статистик.

Заметим, что в случае, когда $r_n=p(1-p)^{n-1}$, $n\geqslant 1$, марковский процесс $\{\pi_n, n\geqslant 0\}$ будет однородным, поскольку $q_n=(1-p)^n$, и тогда цепь $\{\theta_n, n\geqslant 0)$ является однородной.

Пример 2 (задача Вальда о различении $N+1$ простых гипотез (см., например, [18–21], [9])).

Рассмотрим случай, когда $\theta_n\equiv\theta_0$, т. е. $p_{ij}(n)=\delta_{ij}$, $i, j=0, 1, \ldots, N$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Задача заключается в выборе решающей функции $\delta=(\tau, d)$, где τ – м. о., а $d=d(\omega)-\mathscr{F}_\tau$-измеримая функция, принимающая значения di, являющиеся решениями принять гипотезу H_i: $p(x)=p_i(x)$, $i=0, 1, \ldots, N$, причем максимизируется функция

$$R(\delta)=-c\sum_{j=0}^{N}\pi_0(j)\mathbf{M}_j\tau-\sum_{i,j=0}^{N}a_{ij}\mathbf{P}_j\{d=d_i\},$$

где $\mathscr{F}_\tau$ – σ-алгебра событий $\Lambda\in\mathscr{F}$, таких, что $\Lambda\cap\{\tau\leqslant n\}\in\mathscr{F}_n$ при всех $n\geqslant 0$, $a_{ii}=0$, $a'_{ij}\geqslant 0$, $i, j=0, 1, \ldots, N$, $i\neq j$, c – положительная константа, а символами $\mathbf{M}_j$ и $\mathbf{P}_j$, $j=0, 1, \ldots, N$, обозначаются условные математические ожидания и вероятности при условии, что $\theta_0=j$.

Легко проверить, что для всех $\delta=(\tau, d)$ $R(\delta)\leqslant R(\tilde\delta)$, где $\tilde\delta=(\tau, \tilde d)$, а $\tilde d(\omega)=$ $=d_j$, если

$$\sum_{i=0}^{N}\pi_n(i)a_{ij}=\min_{0\leqslant k\leqslant N}\left(\sum_{i=0}^{N}\pi_n(i)a_{ik}\right),$$

при этом $R(\tilde\delta)=\mathbf{M}Z_\tau$, где

$$Z_n=-cn-\min_{0\leqslant k\leqslant N}\left(\sum_{i=0}^{N}\pi_n(i)a_{ik}\right).$$

Поскольку в силу (14) и (15)

$$\pi_{n+1}(j)=\frac{p_j(\eta_{n+1})\pi_n(j)}{\sum_{i=0}^{N}p_i(\eta_{n+1})\pi_n(i)}$$

и

$$\mathbf{P}\{\eta_{n+1}\in A\mid\mathscr{F}_n\}=\sum_{i=0}^{N}\pi_n(i)\int_A p_i(x)\,\mu(dx),$$

то по теореме 3 $\{\pi_n, n\geqslant 0\}$ является системой транзитивных однородных марковских достаточных статистик.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
20.XII.1968

Литература

1. J. L. Snell, Applications of martingale system theorems, Trans. Amer. Math. Soc., 73 (1953), 293–312.
2. Y. S. Chow, H. Robbins, On values associated with a stochastic sequence, Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., 1 (1967), 427–440, Univ. Calif. Press.

3. G. W. Haggstrom, Optimal stopping and experimental design, Ann. Math. Satist., 37 (1966), 7–29.
4. D. O. Siegmund, Some problems in the theory of optimal stopping rules, Ann. Math. Statist., 38, 6(1967), 1627–1640.
5. R. R. Bahadur, Sufficiency and statistical decision functions, Ann. Math. Statist., 25, 3(1954), 423–462.
6. Р. Л. Стратонович, К теории оптимального управления. Достаточные координаты, Автоматика и телемеханика, XXIII, 7(1962), 910–917.
7. D. Blackwell, Memoryless strategies in finite stage dynamic programming, Ann. Math. Statist., 35,2 (1964), 863–865.
8. А. Н. Ширяев, К теории решающих функций и управление процессом наблюдения по неполным данным, Trans. III Prague Conference Inform. Theory..., Prague, 1964, 657–681.
9. А. Н. Ширяев, О марковских достаточных статистиках в неаддитивных байесовских задачах последовательного анализа, Теория вероятн. и ее примен., IX, 4(1964), 670–686.
10. В. С. Михалевич, Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение, 1, Кибернетика, 1(1965), 85–89.
11. Е. Б. Дынкин, Управляемые случайные последовательности, Теория вероятн. и ее примен., X, 1(1965), 3–18.
12. А. Н. Ширяев, Последовательный анализ и управляемые случайные процессы (дискретное время), Кибернетика, 3(1965), 1–24.
13. А. Н. Ширяев, Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов. Trans. IV Prague Conference Inform. Theory..., Prague, 1967, 131–203.
14. Е. Б. Дынкин, Оптимальный выбор момента остановки марковского процесса, ДАН СССР, 150, 2(1963), 238–240.
15. Б. И. Григелионис, А. Н. Ширяев, О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процессов, Теория вероятн. и ее примен., XI, 4(1966), 612–631.
16. J. Neveu, Mathematical fundations of the calculus of probability, Holden Day, San Francisco, 1965.
17. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
18. A. Wald, J. Wolfowitz, Bayes solutions of sequential decision problems, Ann. Math. Statist., 21, 1(1950), 82–99.
19. K. J. Arrow, D. Blackwell and M. A. Girshick, Bayes and minimax solutions of sequential decision problems, Econometrica, 17 (1949), 213–244.
20. Y. S. Chow, H. Robbins, On optimal stopping rules, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 2(1963), 33–49.
21. P. Whittle, Some general results in sequential analysis, Biometrika, 51, 1–2(1964), 129–141.

PAKANKAMUMAS OPTIMALAUS SUSTABDYMO UŽDAVINIUOSE

B. Grigelionis

(Reziumė)

Šiame darbe apibrėžiamos pakankamų σ-algebrų, pakankamų statistikų bei pakankamų Markovo statistikų sistemos ir gauti bendri pakankamumo kriterijai optimalaus atsitiktinių sekų sustabdymo uždaviniams.

SUFFICIENCY IN THE OPTIMAL STOPPING PROBLEMS

B. Grigelionis

(Summary)

In the paper systems of sufficient σ-algebras, sufficient statistics and Markov sufficient statistics are defined and general criteria of sufficiency are given in the optimal stopping problems for stochastic sequences.