1969

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СВЯЗАННЫХ В ЦЕПЬ МАРКОВА. II

В. А. Статулявичюс

§ 2. Переходные характеристические функции

Переходной характеристической функцией $f_k(\omega, A)$ случайной величины X_k будем называть функцию

$$f_k(t, \omega, A)=\int_A e^{itX_k(\tilde{\omega})}\cdot P_k(\omega, d\tilde{\omega}), \qquad \omega\in\Omega_{k-1}, \qquad A\in\mathscr{F}_k.$$

Очевидно, что $f_k(t, \omega, A)$ является:

1) равномерно непрерывной на всей прямой функцией t при фиксированных A и ω;

2) комплексной обобщенной мерой на σ-алгебре $\mathscr{F}_k$ при фиксированных t и ω;

3) $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримой функцией от $\omega\in\Omega_{k-1}$ при фиксированных t и $A\in\mathscr{F}_k$ Кроме того,

$$f_k\left(t, \xi(k-1), \Omega_k\right)=f_{X_k}\left(t\,|\,\xi(k-1)\right),$$

$$f_k(0, \omega, A)=P_k(\omega, A).$$

Переходную характеристическую функцию суммы S_{kl} определим как

$$f_{kl}(t, \omega, A)=\int_{\Omega_{k+1}}\cdots\int_{\Omega_{l-1}}\int_A e^{it\left(X_{k+1}(\omega_{k+1})+\cdots+X_l(\omega_l)\right)}\times$$

$$\times P_{k+1}(\omega, d\omega_{k+1})\cdots P_l(\omega_{l-1}, d\omega_l)=$$

$$=\int_A f_{S_{kl}}\left(t\,|\,\xi(k)=\omega, \tilde{\mathscr{F}}_l\right)P_{kl}(\omega, d\omega_l), \quad \omega\in\Omega_{k-1}, \quad A\in\mathscr{F}_l.$$

Отсюда следует основное равенство

$$f_{kl}(t, \omega, A)=\int_{\Omega_s} f_{ks}(t, \omega, d\tilde{\omega})f_{sl}(t. \omega. A), \tag{2.1}$$

справедливое для любых $1\leqslant k<s<l\leqslant n$.

Еще введем

$$f_1(t, A)=\int_A e^{itX_1(\omega)}P_1(d\omega),$$

$$f_l(t, A)=\int f_1(t, d\omega)f_{1l}(t, \omega, A).$$

Очевидно, $f_{S_n}(t)=f_n(t, \Omega)$.

Пусть M_k – линейное пространство обобщенных комплексных мер μ, заданных на $\mathcal{F}_k$ с $\|\mu\|=\operatorname{Var}|\mu|<\infty$. Рассмотрим линейный оператор U_t

$$(U_t\mu)(A)=\int\limits_{\Omega k-1} f_k(t,\ \omega,\ A)\,\mu(d\omega)$$

отображающий M_{k-1} на M_k.

Тогда для нормы оператора $N(U_t\ )=\sup\limits_{\mu}\frac{\|U_t\mu\|}{\|\mu\|}$ справедливо соотношение

$$N(U_t)=\sup_{\omega}\|f(t,\omega,\cdot)\|.$$

Действительно, всегда

$$\|U_t\mu\|\leqslant\sup_{\omega}\|f(t,\ \omega,\cdot)\|\ \ \|\mu\|,$$

а если μ_0 вероятностная мера, сосредоточенная в точке ω, то $\|\mu_0\|=1$ и

$$U_t\mu=f(t,\ \omega,\cdot).$$

Аналогично определяется $U_t^{(k,l)}$, $1\leqslant k<l\leqslant n$. Имеет место равенство

$$U_t^{(k,l)}=U_t^{(k,s)}\cdot U_t^{(s,l)},\qquad 1\leqslant k<s<l\leqslant n,$$

которое следует из (2.1).

На σ -алгебре $\mathcal{F}_k\times\mathcal{F}_l$ рассмотрим обобщенную комплексную меру $\nu_{kl}(t,$ $x,\ y,\cdot)$, обладающую тем свойством, что для любого измеримого прямоугольника $A\times B$, $A\in\mathcal{F}_l$, $B\in\mathcal{F}_l$

$$\nu_{k,l}(t,\ x,\ y,\ A\times B)=f_{kl}(t,\ x,\ A)f_{kl}(t,\ y,\ B)-$$
$$-f_{kl}(t,\ y,\ A)f_{kl}(t,\ x,\ B).\tag{2.2}$$

Ее норму определим как

$$\frac{1}{2}\operatorname{Var}|\nu_{kl}(t,x,y,\cdot)|.$$

Автором доказана следующая лемма [45].

Лемма 1. *Для любых значений параметра t справедлива оценка*

$$\sup_{x,y}\|\nu_{kl}(t,\ x,\ y,\cdot)\|\leqslant\sum_{j=k+1}^{l}(1-\tilde{\alpha}_j),\qquad 1\leqslant k<l\leqslant n,\tag{2.3}$$

где

$$1-\tilde{\alpha}_k=\frac{1}{2}\sup_{x\in\Omega_{k-1},\,y\in\Omega_{k-1}}\int\limits_{\Omega k}\int\limits_{\Omega k}|P_k(x,\ d\omega)P_k(y,\ d\tilde{\omega})-$$
$$-P_k(y,\ d\omega)P_k(x,\ d\tilde{\omega})|\geqslant 1-\alpha_k,\qquad k=2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Мы будем пользоваться следующей лемой.

Лемма 1′. *Если существуют моменты* $\mathbf{M}\,|X_k|^r\ (r\geqslant 1)$, $k=1,\ 2,\ \ldots\ n$, *то в интервале* $|t|\leqslant 3^{-3+\frac{1}{r}}\cdot B_n^{-1}\cdot L_{rn}^{-\frac{1}{r}}$ *для любых* $1\leqslant k<l\leqslant n$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{x,y}\|\nu_{kl}(t,\ x,\ y,\cdot)\|\leqslant e^{-\frac{1}{4}\alpha^{(n)}(l-k)}.\tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $k<s<l$. Из определения ν_{kl} следует, что

$$\nu_{ks}(t,\ x,\ y,\ A\times B)=-\nu_{ks}(t,\ x,\ y,\ B\times A).$$

Следовательно, согласно теореме Хана, пространство $\Omega_s\times\Omega_s$ можно разбить на непересекающиеся измеримые множества E_{xy}, G_{xy} и H_{xy} так, что $\nu_{ks}(t,x,y,A\times B)=0$, если $A\times B\in G_{xy}$, $A\in\mathcal{F}_s$, $B\in\mathcal{F}_s$, а E_{xy} и H_{xy} определяются так, что $(\tilde\omega,\omega)\in H_{xy}$, если только $(\omega,\tilde\omega)\in E_{xy}$. Учитывая это, находим

$$\nu_{kl}(t,\ x,\ y,\ A\times B)=\int\limits_{\Omega_s}\int\limits_{\Omega_s}\nu_{ks}(t,\ x,\ y,\ d\omega,\ d\tilde\omega)\times$$

$$\times f_{sl}(t,\ \omega,\ A)\cdot f_{sl}(t,\ \tilde\omega,\ B)=\int\limits_{E_{xy}}\nu_{ks}(t,\ x,\ y,\ d\omega,\ d\tilde\omega)\times$$

$$\times f_{sl}(t,\ \omega,\ A)\cdot f_{sl}(t,\ \tilde\omega,\ B)-$$

$$-\int\limits_{E_{xy}}\nu_{ks}(t,\ x,\ y,\ d\omega,\ d\tilde\omega)f_{sl}(t,\ \tilde\omega,\ A)f_{sl}(t,\ \omega,\ B)=$$

$$=\int\limits_{E_{xy}}\nu_{ks}(t,\ x,\ y,\ d\omega,\ d\tilde\omega)\nu_{sl}(t,\ \omega,\ \tilde\omega,\ A\times B)$$

или

$$\sup_{x,y}\|\nu_{kl}(t,\ x,\ y,\cdot)\|\leqslant\sup_{x,y}\|\nu_{ks}(t,\ x,\ y,\cdot)\|\sup_{x,y}\|\nu_{sl}(t,\ x,\ y,\cdot)\|,\tag{2.5}$$

так, как

$$\int\limits_{E_{xy}}|\nu_{ks}(t,\ x,\ y,\ d\omega,\ d\tilde\omega)|=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_s}\int\limits_{\Omega_s}|\nu_{ks}(t,\ x,\ y,\ d\omega,\ d\tilde\omega)|,$$

согласно определению E_{xy}.

В случае $s=l-1$ находим

$$\sup_{x,y}\|\nu_{kl}(t,\ x,\ y,\cdot)\|=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_l}\int\limits_{\Omega_l}|e^{it\,(X_l(u)+X_l(v))}\cdot\Big(P_l(x,\ du)P_l(y,\ dv)-$$

$$-P_l(y,\ du)P_l(x,\ dv)\Big)\Big|=1-\tilde\alpha_l,$$

после чего из (2.5) выводим (2.3).

Для доказательства (2.4) положим $s=l-\left[\frac{2}{\alpha^{(n)}}+1\right]$. Имеем

$$\|\nu_{sl}(t,\ x,\ y,\cdot)\|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_l}\int\limits_{\Omega_l}|P_{sl}(x,\ d\omega)P_{sl}(y,\ d\tilde\omega)-$$

$$-P_{sl}(y,\ d\omega)P_{sl}(x,\ d\tilde\omega)|+\Theta\,|\,t\,|\,\mathbf{M}\,|\,S_{kl}\,|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{x,y}\int\limits_{\Omega_l}|P_{sl}(x,\ d\omega)-P_{sl}(y,\ d\omega)|+\Theta\,|\,t\,|\,\mathbf{M}\,|\,S_{kl}\,|\leqslant\frac{5}{12},\tag{2.6}$$

так как

$$\sup_{x,y}\int\limits_{\Omega_l}|P_{sl}(x,\ d\omega)-P_{sl}(y,\ d\omega)|=2(1-\alpha_{sl})\leqslant$$

$$\leqslant 2e^{-\alpha^{(n)}(l-s)}\leqslant 2e^{-2}<\frac{2}{7}$$

и

$$|t|\,\mathbf{M}\,|S_{kl}|\leqslant|t|\,(\mathbf{M}\,|S_{kl}|^r)^{\frac{1}{r}}\leqslant|t|\left(\frac{3^{r-1}}{\alpha^{(n)r-1}}\sum_{j=s+1}^{l}\mathbf{M}\,|X_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant$$

$$\leqslant|t|\,3^{\frac{r-1}{r}}\cdot B_n L_{rn}^{\frac{1}{r}}\leqslant\frac{1}{9}.$$

Разбивая интеграл $[k, l]$ на куски длиною $\left[\frac{2}{\alpha^{(n)}}+1\right]$ и используя для них оценку (2.6), из основного неравенства (2.5) получаем доказательство леммы 1'.

§ 3. Основные леммы

Лемма 2. *Пусть задана цепь Маркова $\xi(t)$ с тремя моментами времени $t=1, 2, 3$, пространствами состояний $(\Omega_t, \mathscr{F}_t)$, начальным распределением вероятностей $\mathbf{P}(A)$ и вероятностями перехода $P_{kl}(\omega, A)$, $k<l$, $k, l=1, 2, 3$.*

Пусть на Ω_2 задана $\mathscr{F}_2$-измеримая случайная величина X, имеющая конечную дисперсию.

Тогда

$$\mathbf{MD}\{X\,|\,\bar{\mathscr{F}}_1\times\bar{\mathscr{F}}_3\}\geqslant\frac{1}{32}\alpha_{12}\alpha_{23}\,\mathbf{D}\,X, \tag{3.1}$$

$$\mathbf{MD}\{X\,|\,\bar{\mathscr{F}}_1\times\bar{\bar{\mathscr{F}}}_3\}\geqslant\frac{\alpha_{23}}{4}\mathbf{MD}\{X\,|\,\bar{\mathscr{F}}_1\}, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{MD}\{X\,|\,\bar{\mathscr{F}}_1\}\geqslant\frac{\alpha_{12}}{8}\mathbf{D}\,X, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{MD}\{X\,|\,\mathscr{F}_3\}\geqslant\frac{\alpha_{23}}{2}\mathbf{D}\,X, \tag{3.4}$$

где α_{kl} — коэффициент эргодичности переходной вероятностной функции $P_{kl}(\omega, A)$.

Доказательство. Оценка (3.4) получена Р. Л. Добрушиным [15]. Нам следует доказать неравенства (3.2) и (3.3), так как (3.1) является следствием последних. Заметим, кроме того, что оценка (3.3) является далеко не простым обобщением (3.4), так как обращенная цепь Маркова может иметь совсем иную эргодичность.

Пусть m_ω-медиана случайной величины X относительно распределения $P_{12}(\omega, .)$ и

$$H_\omega=\{\bar\omega: X(\bar\omega)\leqslant m_\omega\},$$

$$\bar H_\omega=\Omega_2\backslash H_\omega.$$

Пусть $\omega\in\Omega_1$ — такое состояние, что

$$\mathbf{D}\{X\,|\,\xi(1)=\omega\}<\infty.$$

Так как

$$\mathbf{D}\{X\,|\,\xi(1)=\omega\}\leqslant\mathbf{M}\{(X-m_\omega)^2\,|\,\xi(1)=\omega\},$$

то для определенности допустим, что

$$\int_{\bar H_\omega}\left(X(\bar\omega)-m_\omega\right)^2 P_{12}(\omega, d\bar\omega)\geqslant\frac{1}{2}\mathbf{D}\{X\,|\,\xi(1)=\omega\}. \tag{3.5}$$

Положим

$$M_{\omega,\tilde{\omega}}=\mathrm{M}\{X\mid\xi(1)=\omega,\ \xi(3)=\tilde{\omega}\},$$

$$\Omega_3'=\{\tilde{\omega}: M_{\omega,\tilde{\omega}}\geqslant m_\omega\},\qquad \bar{\Omega}_3'=\Omega_3\backslash\Omega_3'.$$

Очевидно, что $M_{\xi(1),\ \xi(3)}$ является $\tilde{\mathscr{F}}_1\times\tilde{\mathscr{F}}_3$ – измеримой и $\Omega_3', \bar{\Omega}_3'\in\mathscr{F}_3$.

Имеем

$$\mathbf{MD}\{X\mid\xi(1)=\omega,\ \xi(3)\}=$$

$$=\mathrm{MM}\{(X-M_{\omega,\xi(3)})^2\mid\xi\ (1)=\ \omega,\xi(3)\}\geqslant I_1+I_2, \tag{3.6}$$

где

$$I_1=\int\limits_{\Omega_2'}\left\{\int\limits_{\bar{H}_\omega}\left(X(\bar{\omega})-M_{\omega,\tilde{\omega}}\right)^2 P_{12}(\omega,\ d\bar{\omega})P_{23}(\bar{\omega},\ d\tilde{\omega})+\right.$$

$$\left.+(M_{\omega,\tilde{\omega}}-m_\omega)^2\int\limits_{H_\omega}P_{12}(\omega,\ d\bar{\omega})P_{23}(\bar{\omega},\ d\tilde{\omega})\right\}$$

и

$$I_2=\int\limits_{\bar{\Omega}_3'}\int\limits_{\Omega_3}\left(X(\bar{\omega})-M_{\omega,\tilde{\omega}}\right)^2 P_{12}(\omega,\ d\bar{\omega})P_{23}(\bar{\omega},\ d\tilde{\omega})\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{\bar{\Omega}_3'}\int\limits_{\bar{H}_\omega}\left(X(\bar{\omega})-m_\omega\right)^2 P_{12}(\omega,\ d\bar{\omega})P_{23}(\bar{\omega},\ d\tilde{\omega})=$$

$$=\int\limits_{\bar{H}_\omega}\left(X(\bar{\omega})-m_\omega\right)^2 P_{23}(\bar{\omega},\ \bar{\Omega}_3')P_{12}(\omega,\ d\bar{\omega}). \tag{3.7}$$

Далее при $A\in\mathscr{F}_3$, согласно определению H_ω имеем

$$\int\limits_{H_\omega}P_{12}(\omega,\ d\bar{\omega})P_{23}(\bar{\omega},\ A)=$$

$$=\mathbf{P}\{\xi(3)\in A\mid\xi(1)=\omega,\ \xi(2)\in H_\omega\}\cdot P_{12}(\omega,\ H_\omega)\geqslant$$

$$\geqslant P_{\xi(3)}\{A\mid\xi(1)=\bar{\omega},\ \xi(2)\in H_\omega\}P_{12}(\omega,\ \bar{H}_\omega).$$

Следовательно,

$$I_1\geqslant\int\limits_{\Omega_3'}\left\{\int\limits_{\bar{H}_\omega}\left(X(\bar{\omega})-M_{\omega,\tilde{\omega}}\right)^2 P_{12}(\omega,\ d\bar{\omega})P_{23}(\bar{\omega},\ d\tilde{\omega})+\right.$$

$$\left.+(M_{\omega,\tilde{\omega}}-m_\omega)^2\int\limits_{\bar{H}_\omega}P_{12}(\omega,\ d\bar{\omega})P_{\xi(3)}\{d\tilde{\omega}\mid\xi(1)=\omega,\ \xi(2)\in H_\omega\}\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\bar{H}_\omega}\left(X(\bar{\omega})-m_\omega\right)^2\left\{\int\limits_{\Omega_3'}\min\left\{P_{23}(\bar{\omega},\ d\tilde{\omega}),\right.\right.$$

$$\left.\left.P_{\xi(3)}\{d\tilde{\omega}\mid\xi(1)=\omega,\ \xi(2)\in H_\omega\}\right\}\right\}P_{12}(\omega,\ d\bar{\omega}), \tag{3.8}$$

так как

$$\left(X(\bar{\omega})-M_{\omega,\tilde{\omega}}\right)^2+(M_{\omega,\tilde{\omega}}-m_\omega)^2\geqslant\frac{1}{2}\left(X(\bar{\omega})-m_\omega\right)^2.$$

Объединяя (3.7) с (3.8), получаем

$$I_1+I_2\geqslant\left(\frac{1}{2}\inf_{\omega',\,\omega''\in\Omega_3}\int_{\Omega_3'}\min\{P_{23}(\omega',\,d\tilde\omega),\ P(\omega'',\,d\tilde\omega)\}\right)\times$$

$$\times\int_{\bar H_\omega}\left(X(\bar\omega)-m_\omega\right)^2P_{12}(\omega,\,d\bar\omega),$$

что вместе с (3.5) и (3.6) дает

$$\mathbf{MD}\{X\,|\,\xi(1)=\omega,\ \xi(3)\}\geqslant\frac{1}{4}\ \alpha_{23}\mathbf{D}\{X\,|\,\xi(1)=\omega\}$$

или

$$\mathbf{MD}\{X\,|\,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3\}\geqslant\frac{1}{4}\ \alpha_{23}\mathbf{MD}\{X\,|\,\mathscr{F}_1\}. \tag{3.9}$$

Пусть m — медиана случайной величины

$$Y=\mathbf{M}\{X\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_1\},\quad H=\{\omega: Y(\omega)\leqslant m\},\quad \bar H=\{\omega: Y(\omega)>m\}.$$

Очевидно, что Y является $\mathscr{F}_1$ – измеримой и H, $\bar H\in\mathscr{F}_1$. Так как $\mathbf{DM}\times\times\{X\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_1\}\leqslant\mathbf{M}\,(Y-m)^2$, то как и раньше, не нарушая общности можно допустить, что

$$\int_{\bar H}\left(Y(\omega)-m\right)^2P(d\omega)\geqslant\frac{1}{2}\,\mathbf{DM}\,\{X\,|\,\mathscr{F}_1\}, \tag{3.10}$$

ибо в противоположном случае доказательство аналогично. Положим

$$\Omega_2'=\{\bar\omega: X(\bar\omega)\geqslant m\},\quad \bar\Omega_2'=\Omega_2\backslash\Omega_2'.$$

Имеем

$$\mathbf{MD}\{X\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_1\}\geqslant J_1+J_2, \tag{3.11}$$

где

$$J_1=\int_{\Omega_2'}\left\{\int_{\bar H}\left(Y(\omega)-X(\bar\omega)\right)^2P(d\omega)P_{12}(\omega,\,d\bar\omega)+\right.$$

$$\left.+\left(X(\bar\omega)-m\right)^2P(H)P_{\xi(2)}\left(d\bar\omega\,|\,\xi(1)\in H\right)\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int_{\bar H}\left(Y(\omega)-m\right)^2\left(\int_{\Omega_2'}\min\left\{P_{12}(\omega,\,d\bar\omega),\ P_{\xi(2)}\left(d\bar\omega\,|\,\xi(1)\in H\right)\right\}P(d\omega)\right),$$

$$J_2=\int_{\bar\Omega_2'}\int_{\Omega_1}\left(Y(\omega)-X(\omega)\right)^2P(d\omega)P_{12}(\omega,\,d\bar\omega)\geqslant$$

$$\geqslant\int_{\bar H}\left(Y(\omega)-m\right)^2P_{12}(\omega,\,\Omega_2')P(d\omega)$$

или

$$J_1+J_2\geqslant\frac{1}{2}\left(\inf_{\omega,\,\omega'}\int_{\Omega_2}\min\{P_{12}(\omega,\,d\bar\omega)P_{12}(\omega',\,d\bar\omega)\}\right)\times$$

$$\times\int_{\bar H}\left(Y(\omega)-m\right)^2P(d\omega).$$

Отсюда, с помощью (3.10) и (3.11) находим

$$\mathbf{MD}\{X\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_1\}\geqslant\frac{1}{4}\,\alpha_{12}\mathbf{DM}\{X\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_1\}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{D}X=\mathbf{DM}\{X|\tilde{\mathscr{F}}_1\}+\mathbf{MD}\{X|\tilde{\mathscr{F}}_1\},$$

следовательно,

$$\mathbf{MD}\{X|\mathscr{F}_1\}\geqslant\frac{1}{8}\alpha_{12}\mathbf{D}X. \tag{3.12}$$

Из (3.9) и (3.12) следует справедливость леммы.

Оценка $f_{Z_n}(t)$ вне интегрального интервала или вне интеграла асимптотического разложения обычно сводится к оценкам условных характеристических функций, вида

$\mathbf{M}|f_Y(t|\tilde{\mathscr{F}}_1\times\tilde{\mathscr{F}}_3)|$, где Y определена на Ω_2 и $\tilde{\mathscr{F}}_2$ — измеримая.

Далее, всегда в $b\leqslant 1-\frac{1}{2}(1-b^2)$, поэтому

$$\mathbf{M}|f_Y(t|\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3)|\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\mathbf{M}|f_Y(t|\tilde{\mathscr{F}}_1\times\tilde{\mathscr{F}}_3)|^2\right)\right\}.$$

Если дисперсию случайной величины, принимающей комплексные значения, определить так:

$$\mathbf{D}Z=\mathbf{M}|Z|^2-|\mathbf{M}Z|^2=\mathbf{D}\{ReZ\}+\mathbf{D}\{JmZ\},$$

то тогда, очевидно, утверждения леммы останутся справедливыми, если вместо X поставить определенную на Ω_2, $\mathscr{F}_2$ — измеримую функцию Z.

Имеем

$$1-\mathbf{M}|f_Y(t|\tilde{\mathscr{F}}_1\times\tilde{\mathscr{F}}_3)|^2=\mathbf{MD}\{e^{itY}|\tilde{\mathscr{F}}_1\times\tilde{\mathscr{F}}_3\},$$

и аналогично

$$\mathbf{MD}\{e^{itY}|\tilde{\mathscr{F}}_1\}=1-\mathbf{M}|f_Y(t|\tilde{\mathscr{F}}_1)|^2,$$

$$\mathbf{D}e^{itY}=1-|f_Y(t)|^2.$$

Следовательно, из леммы 9 мы можем вывести следующее

Следствие. *Имеют место оценки:*

$$1-\mathbf{M}|f_Y(t|\tilde{\mathscr{F}}_1\times\tilde{\mathscr{F}}_3)|^2\geqslant\frac{1}{32}\alpha_{12}\alpha_{23}\left(1-|f(t_Y)|^2\right),$$

$$1-\mathbf{M}|f_Y(t|\tilde{\mathscr{F}}_1\times\tilde{\mathscr{F}}_3)|^2\geqslant\frac{\alpha_{23}}{4}\left(1-\mathbf{M}|f_Y(t|\tilde{\mathscr{F}}_1)|^2\right).$$

Лемма 3. *Имеют место оценки*

$$\mathbf{D}S_{k+1,l-1}\geqslant\mathbf{MD}\{S_{k,l}|\mathscr{F}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{3-2\sqrt{2}}{64}\sum_{j=k+1}^{l-1}\alpha_{kj}\min\{\alpha_j,\alpha_{j+1}\}\mathbf{D}X_j, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{MD}\{S_{kl}|\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}\geqslant\frac{3-2\sqrt{2}}{8}\sum_{j=k+1}^{l-1}\min\{\alpha_j,\alpha_{j+1}\}\mathbf{MD}\{X_j|\tilde{\mathscr{F}}_k\}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Положим

$$m_{kl}=\mathbf{M}\{S_{kl}|\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\},\qquad \delta_{kl}=S_{kl}-m_{kl}.$$

Очевидно,

$$\mathbf{DM}\{S_{kl}|\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}=\mathbf{D}m_{kl},$$

$$\mathbf{MD}\{S_{kl}|\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}=\mathbf{D}\delta_{kl}.$$

Случайные величины δ_{kr} и $m_{kr}+S_{r+1,l}$ условно не коррелированы относительно σ-алгебры $\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l$, так как $M(\delta_{kr}\mid\tilde{\mathscr{F}}_{kl})=0$ с вероятностью 1

$$\mathbf{M}\{\delta_{kr}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_r\}=0,$$

а следовательно, в силу марковости, и

$$\mathbf{M}\{\delta_{kr}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_{r,l}\}=0$$

с вероятностью 1, а $m_{kr}+S_{r+1,l}$ является $\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_{k,l}$-измеримой. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{MD}\{S_{kl}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}&=\mathbf{MD}\{S_{kr}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}+\\&+\mathbf{MD}\{m_{kr}+S_{r,l}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Положим $r=l-2$ и оценим снизу

$$\begin{aligned}&\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}+S_{l-2,l}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}=\\&=\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}+X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}\end{aligned}\tag{3.16}$$

с помощью соотношения (3.2) в случае $X=m_{k,l-2}+X_{l-1}$. Находим

$$\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}+X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}\geqslant\frac{1}{4}\alpha_l\,\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}+X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}.\tag{3.17}$$

Если

$$\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}<a^2\,\mathbf{MD}\{X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\},$$
$$a=\sqrt{2}-1,$$

то в силу неравенства

$$\begin{aligned}&|\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}+X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}-\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}-\\&-\mathbf{MD}\{X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}|\leqslant 2\mathbf{MD}^{\frac{1}{2}}\{m_{k,l-2}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}\,\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\{X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}\leqslant\\&\leqslant 2\sqrt{\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}\,\mathbf{MD}\{X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}}\leqslant\\&\leqslant 2a\mathbf{MD}\{X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\},\end{aligned}$$

находим

$$\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}+X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}\geqslant(1-2a)\,\mathbf{MD}\{X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}$$

или

$$\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}+X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}\geqslant\frac{1-2a}{4}\alpha_l\,\mathbf{MD}\{X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}\tag{3.19}$$

согласно (3.17).

Если же (3.18) не выполнено, то

$$\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}\geqslant a^2\,\mathbf{MD}\{X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}$$

и, действуя так же, как и при выводе (3.17), находим

$$\begin{aligned}&\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}+X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_{l-1}\}=\\&=\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_{l-1}\}\geqslant\frac{1}{4}\alpha_{l-2,l-1}\mathbf{MD}\{m_{k,l-2}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}\geqslant\\&\geqslant\frac{a^2}{4}\alpha_{l-1}\mathbf{MD}\{X_{l-1}\mid\tilde{\mathscr{F}}_k\}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Из оценок (3.19), (3.20) и соотношений (3.15), (3.16) вытекает, что имеет место по крайней мере одно из двух неравенств

$$\mathbf{MD}\{S_{kl}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}-\mathbf{MD}\{S_{k,l-2}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1-2a}{4}\alpha_l\,\mathbf{MD}\{X_{l-1}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\},\tag{3.21}$$

или

$$\mathbf{MD}\{S_{k,l-1}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_{l-1}\}-\mathbf{MD}\{S_{k,l-2}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_{l-1}\}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{a^2}{4}\alpha_{l-1}\,\mathbf{MD}\{X_{l-1}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\}.\tag{3.22}$$

Далее, мы пользовались равенством

$$\mathbf{D}\,\xi=\mathbf{DM}\{\xi\,|\,\mathscr{F}\}+\mathbf{MD}\{\xi\,|\,\mathscr{F}\},\tag{3.23}$$

справедливым для любой $\mathscr{F}(\xi)$ измеримой случайной величины ξ с $\mathbf{D}\xi<\infty$ и для любой σ-алгебры $\mathscr{F}\leqslant\mathscr{F}(\xi)$. Пусть имеется σ-алгебра $G\leqslant\mathscr{F}\leqslant\mathscr{F}(\xi)$. Тогда

$$\mathbf{DM}\{\xi\,|\,G\}=\mathbf{DM}\{\mathbf{M}(\xi\,|\,\mathscr{F})\,|\,G\}\leqslant\mathbf{DM}(\xi\,|\,\mathscr{F}),$$

согласно (3.23), и с помощью того же равенства (3.23) заключаем, что

$$\mathbf{MD}\{\xi\,|\,G\}\geqslant\mathbf{MD}\{\xi\,|\,\mathscr{F}\}.$$

Поэтому

$$\mathbf{MD}\{S_{kl}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}\geqslant\mathbf{MD}\{S_{k,l-1}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_{l-1}\}$$

и из (3.21), (3.22) выводим

$$\mathbf{MD}\{S_{kl}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}-\mathbf{MD}\{S_{k,l-2}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_{l-2}\}\geqslant$$
$$\frac{3-2\sqrt{2}}{4}\min\{\alpha_{l-1},\ \alpha_l\}\,\mathbf{MD}\{X_{l-1}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\}\tag{3.24}$$

или

$$\mathbf{MD}\{S_{kl}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\times\tilde{\mathscr{F}}_l\}\geqslant\frac{3-2\sqrt{2}}{8}\sum_{j=k+1}^{l-1}\min(\alpha_j,\ \alpha_{j+1})\,\mathbf{MD}\{X_j\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\},$$

т.е. имеет место (3.13). С помощью (3.3) находим

$$\mathbf{MD}\{X_j\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_k\}\geqslant\frac{\alpha_{kj}}{8}\mathbf{D}\,X_j$$

после чего из (3.13) получаем (3.14). Лемма доказана.

Лемма (Р. Л. Добрушин). *Имеет место оценка*

$$\mathbf{D}\,S_{kl}\geqslant\frac{1}{32}\sum_{j=k}^{l}\min(\alpha_j,\ \alpha_{j+1})\,\mathbf{D}\,X_j,\qquad \alpha_1=1.\tag{3.25}$$

Она получена Р. Л. Добрушиным ([15], §9).

(У Р. Л. Добрушина множитель $\frac{1}{100}$, однако, если более тщательно рассмотреть доказательство, то легко заметить, что в действительности им доказана оценка (3.25).)

Лемма 4. *Пусть* $\tilde{\mathscr{F}}_{1k}$ *— измеримая случайная величина* X *и* $\tilde{\mathscr{F}}_{ln}$ *— измеримая случайная величина* Y *имеют конечные моменты*

$$|\mathbf{M}\,X|^u, \qquad \mathbf{M}\,|Y|^v, \qquad u>1, \qquad v>1, \qquad \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=1.$$

Тогда для любых $1\leqslant k\leqslant l\leqslant n$, *имеет место неравенство*

$$|\mathbf{M}\,XY-\mathbf{M}\,X\cdot\mathbf{M}\,Y|\leqslant 2\,(1-\alpha_{kl})^{\frac{1}{u}}\,(\mathbf{M}\,|X|^u)^{\frac{1}{u}}\,(\mathbf{M}\,|Y|^v)^{\frac{1}{v}}. \tag{3.26}$$

Аналогичная лемма для стационарной цепи доказана в книге Дж. Дуба [65]. Доказательство для общего случая вполне аналогично и мы его не приводим.

Лемма 5. *Пусть задана совокупность* m *случайных величин* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ *с конечными дисперсиями, связанных в цепь Маркова с* m *моментами времени, коэффициентами эргодичности* $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_{m-1}$ и $\hat{\alpha}=\min\limits_{1\leqslant i<m}\hat{\alpha}_i>0$.

Тогда

$$\left|\mathbf{D}\left\{\sum_{j=1}^{m} Z_j\right\}-\sum_{j=1}^{m}\mathbf{D}\,Z_j\right|\leqslant 4\,\frac{\sqrt{1-\hat{\alpha}}}{1-\sqrt{1-\hat{\alpha}}}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{D}\,Z_j.$$

Доказательство. Имеем

$$R=\left|\mathbf{D}\left\{\sum_{j=1}^{m} Z_j\right\}-\sum_{j=1}^{m}\mathbf{D}\,Z_j\right|\leqslant\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m}|\mathbf{M}\{(Z_i-\mathbf{M}\,Z_i)(Z_j-\mathbf{M}\,Z_j)\}|.$$

Согласно (3.26), при $X=Z_i-\mathbf{M}Z_i$, $Y=Z_j-\mathbf{M}Z_j$, $u=v=2$ имеем

$$|\mathbf{M}\{(Z_i-\mathbf{M}\,Z_i)(Z_j-\mathbf{M}\,Z_j)\}|\leqslant 2\,(1-\hat{\alpha})^{\frac{|j-i|}{2}}\sqrt{\mathbf{D}X\mathbf{D}Y}\leqslant$$

$$\leqslant(1-\hat{\alpha})^{\frac{|j-i|}{2}}(\mathbf{D}\,Z_i+\mathbf{D}\,Z_j)$$

или

$$R\leqslant\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m}(1-\hat{\alpha})^{\frac{|j-i|}{2}}(\mathbf{D}Z_i+\mathbf{D}Z_j)\leqslant 4\,\frac{\sqrt{1-\hat{\alpha}}}{1-\sqrt{1-\hat{\alpha}}}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{D}Z_j.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любых* $1\leqslant k<l\leqslant n$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{D}S_{kl}\leqslant\frac{16}{\min\limits_{k<i\leqslant l}\alpha_i}\sum_{j=k}^{l}\mathbf{D}X_j.$$

Доказательство. Положим

$$K=\left[\frac{2}{\alpha}+1\right],\quad \alpha=\min_{k<i\leqslant l}\alpha_i.$$

Сумму S_{kl} разобьем на две $S_{kl}=S+S'$, где

$$S=\sum_{j=0}^{m} Z_j,\qquad S'=\sum_{j=0}^{m'} Z'_j,$$

$$Z_j=S_{k+2jK,\,k+(2j+1)K},\qquad Z'_j=S_{k+(2j+1)K,\,k+(2j+2)K}.$$

Случайные величины $Z_0, \ldots, Z_{..}$ связаны в цепь Маркова с $m+1$ моментами времени и коэффициентами эргодичности

$$\hat{\alpha}_j = \alpha_{k+(2j+1)K,\, k+(2j+2)K}, \quad j=0,1,\ldots,m-1.$$

Если

$$\hat{\alpha} = \min_{0<j\leqslant m} \hat{\alpha}_j,$$

то

$$1-\hat{\alpha} \leqslant (1-\alpha)^K.$$

Применяя лемму 12, находим

$$\mathbf{D}\{S\} \leqslant \left(1+4\frac{(1-\alpha)^{\frac{K}{2}}}{1-(1-\alpha)^{\frac{K}{2}}}\right)\sum_{j=0}^{m} \mathbf{D}Z_j \tag{3.26}$$

и, аналогично,

$$\mathbf{D}\{S'\} \leqslant \left(1+4\frac{(1-\alpha)^{\frac{K}{2}}}{1-(1-\alpha)^{\frac{K}{2}}}\right)\sum_{j=0}^{m'} \mathbf{D}Z'_j. \tag{3.27}$$

Далее,

$$\mathbf{D}Z_j \leqslant K \sum_{i=k+2jK}^{k+(2j+1)K} \mathbf{D}X_i, \qquad \mathbf{D}Z'_j \leqslant K \sum_{i=k+(2j+1)K}^{k+(2j+2)K} \mathbf{D}X_i, \tag{3.28}$$

и

$$K\left(1+\frac{4(1-\alpha)^{\frac{K}{2}}}{1-(1-\alpha)^{\frac{K}{2}}}\right) \leqslant \frac{8}{\alpha}. \tag{3.29}$$

Из того, что $\mathbf{D}S_{kl} \leqslant 2\,(\mathbf{D}S+\mathbf{D}S')$ и (2.39) – (3.26) следует справедливость леммы.

Лемма 7. *Если с вероятностью* 1

$$|X_k| \leqslant C^{(n)} \; k=1,2,\ldots,n, \qquad \alpha^{(n)}>0,$$

то существуют абсолютные константы $H_1>0$, $H_2>0$, *такие, что*

$$|\Gamma_r\{S_n\}| \leqslant \frac{r!\,H_1H_2^{r-2}C^{(n)r-2}B_n^2}{\alpha^{(n)r-2}} \quad r=2,\ 3,\ \ldots$$

Доказательство леммы разобьем на две части:

а) пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ -случайные величины, имеющие конечные абсолютные моменты целого порядка $s\geqslant 1$ и

$$S = Y_1+Y_2+\cdots+Y_N.$$

Положим

$$\Gamma_r\{\xi,\ t\} = \frac{1}{i^r}\frac{d^r}{dt^r}\ln f_\xi(t),$$

для тех t, r, для которых $f_\xi(t)\neq 0$ и $\mathbf{M}\,|\,\xi\,|^r<\infty$. Очевидно $\Gamma_r\{\xi,0\}=\Gamma_r\{\xi\}$ – семиинварианту порядка r случайной величины ξ.

Для любого $1\leqslant r\leqslant s$ *имеем*

$$\Gamma_r\{S,\ t\} = \sum_{1\leqslant l_1,\ldots,l_r\leqslant N} I_{l_1,\ldots,l_r}(t),$$

$$I_{l_1,\ldots,l_r} = \frac{1}{(f_s(t))^r}\sum_{\nu=1}^{r}(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\sum_{\bigcup_{p=1}^{\nu} I_p = I}\ \prod_{p=1}^{\nu}\mathbf{M}_\nu(I_p,\ t) \tag{3.30}$$

$\sum\limits_{\bigcup\limits_{p=1}^{\nu} I_p = I}$ *означает суммирование по всем разбиениям множества* $I=\{1, \ldots, r\}$ *на подмножества* $I_p \subset I$ *и*

$$\mathbf{M}_\nu(I_p, t) = \left(f_S(t)\right)^{r-\nu} \mathbf{M} Y_{i_{i_1}} \cdots Y_{i_{i_m}} e^{itS}, \tag{3.31}$$

при $I_p = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$.

Например, в случае $r=3$ имеем

$$I_{t_1 t_2 t_3}(t) = \left(f_S(t)\right)^{-3} \{ (\mathbf{M}e^{itS})^2 \mathbf{M}e^{itS} Y_{t_1} Y_{t_2} Y_{t_3} -$$
$$-(\mathbf{M}e^{itS})(\mathbf{M}e^{itS} Y_{t_1} Y_{t_2})(\mathbf{M}e^{itS} Y_{t_3}) -$$
$$-(\mathbf{M}e^{itS})(\mathbf{M}e^{itS} Y_{t_1})(\mathbf{M}e^{itS} Y_{t_2} Y_{t_3}) -$$
$$-(\mathbf{M}e^{itS})(\mathbf{M}e^{itS} Y_{t_1} Y_{t_3})(\mathbf{M}e^{itS} Y_{t_2}) +$$
$$+2(\mathbf{M}e^{itS} Y_{t_1})(\mathbf{M}e^{itS} Y_{t_2})(\mathbf{M}e^{itS} Y_{t_3}) \}. \tag{3.32}$$

Справедливость (3.30) следует из равенства

$$\Gamma_r(S, t) = \frac{1}{\left(f_S(t)\right)^r} = \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{\nu-1} \frac{\left(f_S(t)\right)^{k-\nu}}{\nu} \times$$
$$\times \sum_{\substack{1 \leqslant r_1, \ldots, r_\nu < r \\ r_1 + \cdots + r_\nu = r}} \frac{r!}{r_1! r_2! \cdots r_\nu!} \alpha_{r_1}(S, t) \cdots \alpha_{r_\nu}(S, t),$$

где

$$\alpha_p(S, t) = \frac{1}{i^p} \left(f_S(t)\right)^{(p)} = \mathbf{M} S^p e^{itS} =$$
$$= \sum_{1 \leqslant l_1, \ldots, l_p \leqslant N} \mathbf{M} Y_{l_1} \cdots Y_{l_p} e^{itS}.$$

Выражение $\prod\limits_{p=1}^{\nu} \mathbf{M}_\nu(I_p, t)$ представляет произведение математических ожиданий. Разбиение множества I на подмножества I_p показывает, как случайные величины $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}$ распределяются по множителям произведения $\prod\limits_{p=1}^{\nu} \mathbf{M}_\nu \ (I_p, t)$. Введем числа m_k, $k=0, 1, \ldots, r-1$ следующим образом: положим $m_k = i$, если перед величиной $Y_{t_{k+1}}$ в том множителе $\mathbf{M}_\nu(I_p, t)$, где находится $Y_{t_{k+1}}$ стоит Y_{t_i}. Если же $Y_{t_{k+1}}$ в данном множестве $\mathbf{M}_\nu(I_p, t)$ самая левая, то положим $m_k=0$. Числа m_k, $k=0, 1, \ldots, r-1$ определяются однозначно. Очевидно $m_0=0$. Положим

$$\prod_{p=1}^{\nu} \mathbf{M}_\nu(I_p, t) = W_{\nu-1}(\mathfrak{m}). \tag{3.33}$$

Множество $\mathfrak{m} = \{m_1, \ldots, m_{r-1}\}$ содержит перестановку $r-\nu$ -го порядка чисел $1, 2, \ldots, r-1$, а остальные $\nu-1$ числа равны нулю. Кроме того, $m_k \leqslant k$, $k=$

$=0, 1, \ldots, r-1$. Множество таких множеств обозначим $\mathfrak{M}_{\nu-1}$. Тогда из (3.30) и (3.33) находим

$$I_{i_1, \ldots, i_N}(t) = \frac{1}{(f_S(t))^r} \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \nu! \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_\nu} W_{\nu, t}(\mathfrak{m}). \tag{3.34}$$

Соотношение (3.32) в новых обозначениях выглядит так:

$$I_{i_1 i_2 i_3}(t) = \left(f_S(t)\right)^{-3} \{ W_{0,t}(1, 2) - W_{1,t}(1, 0) -$$
$$- W_{1,t}(0, 2) - W_{1,t}(0, 1) + 2W_{2,t}(0, 0) \}. \tag{3.35}$$

Возьмем какой-нибудь член суммы (3.34)

$$W_{\nu,t}(\overline{\mathfrak{m}}), \ \overline{\mathfrak{m}} = \{ \overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_{r-1} \} \in \mathfrak{M}_\nu. \tag{3.36}$$

Таких членов всего есть $\nu!$ и они входят в сумму (3.34) со знаком $(-1)^\nu$. Среди m_k, $k=1, 2, \ldots, r-1$ имеется ν нулей. Пусть это будут

$$\overline{m}_{k_1} = \overline{m}_{k_2} = \cdots = m_{k_\nu} = 0 \qquad k_1 < k_2 < \cdots < k_\nu.$$

Положим, для краткости, $\mathfrak{m}_i^j = \{ m_i, m_{i+1} \ldots, m_j \}$, $1 \leqslant i < j \leqslant r-1$. Пусть $\mathfrak{m}_k(s)$ обозначает вектор, в котором координата m_k равна s и пусть $q_k(\mathfrak{m})$ равно числу координат вектора $\mathfrak{m}_{k+1}^{r-1}$, равных одному из чисел $1, \ldots, k$. Разумеется, $q_{r-1}(\mathfrak{m}) = 0$.

Среди слагаемых суммы

$$(-1)^{\nu-1}(\nu-1)! \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_\nu} W_{\nu-1,t}(\mathfrak{m}) \tag{3.37}$$

есть слагаемые, отвечающие значениям $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_{\nu-1}$ вида $\mathfrak{m}_{k_i}\{s\}$ $s>0$. Множество таких векторов обозначим $\mathfrak{M}_{\nu-1}\left(\mathfrak{m}_{k_i}\{\cdot\}\right)$. Пусть $N\{A\}$ — число элементов конечного множества A.

Тогда

$$N\left\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\left(\mathfrak{m}_{k_i}\{\cdot\}\right)\right\} = i - q_{k_i}(\overline{\mathfrak{m}}), \tag{3.38}$$

так как s в $\overline{\mathfrak{m}}_{k_i}\{s\}$ может принимать значения $1, 2, \ldots, k_i$ за исключением совпадающих с $\overline{m}_{k_i-1}, \ldots, \overline{m}_{r-1}$ (таких будет $q_{k_i}(\mathfrak{m})$), а также уже принятых координатами $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_{k_i-1}$ (последних найдется $k_i - 1 - (i-1) = k_i - i$, так как среди $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_{k_i-1}$ имеется $i-1$ нуль).

Аналогично, среди слагаемых суммы

$$(-1)^{\nu+1}(\nu+1)! \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_{\nu+1}} W_{\nu+1,t}(\mathfrak{m}) \tag{3.39}$$

имеются слагаемые, отвечающие значениям $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_{\nu+1}$ вида $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}_l\{0\}$, $l = 1, 2, \ldots, r-1$, $l \neq k_1, , \ldots, k_\nu$. Число таких слагаемых, при данном l, равно $(\nu+1)!$ и они входят со знаком $(-1)^{\nu+1}$, противоположным знаку слагаемого (3.36). Обозначим

$$W_{\nu,t}(\mathfrak{m}_1^{r-2}, \hat{m}_{r-1}) = W_{\nu,t}\left(\mathfrak{m}_{r-1}\{\hat{m}_{r-1}\}\right) =$$
$$= W_{\nu,t}(\mathfrak{m}) - W_{\nu+1,t}\left(\mathfrak{m}_{r-1}\{0\}\right),$$

$$W_{\nu,t}(\mathfrak{m}_1^{r-3},\ \hat{m}_{r-2},\ \hat{m}_{r-1}) = W_{\nu,t}\left(\mathfrak{m}_{r-2,r-1}\{\,\hat{m}_{r-2},\ \hat{m}_{r-1}\}\right) =$$

$$= W_{\nu,t}\left(\mathfrak{m}_{r-1}\{\,\hat{m}_{r-1}\}\right) - W_{\nu+1,t}\left(\mathfrak{m}_{r-2,r-1}\{0,\ \hat{m}_{r-1}\}\right)$$

и вообще

$$W_{\nu,t}(\mathfrak{m}_1^{k-1},\ \hat{\mathfrak{m}}_k,\ \hat{\mathfrak{m}}_{k+1}^{r-1}) = W_{\nu,t}(\mathfrak{m}_1^k,\ \hat{\mathfrak{m}}_{k+1}^{r-1}) -$$

$$- W_{\nu+1,t}(\mathfrak{m}_1^{k-1},\ 0,\ \hat{\mathfrak{m}}_{k+1}^{r-1}), \tag{3.3'3}$$

причем знаком $\hat{}$ отмечаются только не равные нулю числа m_k. Знак над вектором $\mathfrak{m}$ ($\hat{\mathfrak{m}}$) означает, что все не равные нулю координаты уже отмечены.

Покажем, что или все ненулевые координаты вектора $\overline{\mathfrak{m}}$ в члене (3.36) после указанных вычитаний будут отмечены знаком $\hat{}$, или сам член (3.36) до этого исчезнет.

Заметим, что для образования

$$W_{\nu,t}(\overline{\mathfrak{m}}_1^{k_\nu-1},\ 0,\ \hat{\overline{\mathfrak{m}}}_{k_\nu+1}^{r-1}) \tag{3.40}$$

нужных слагаемых

$$W_{\nu+1,t}\left(\overline{\mathfrak{m}}_1^{k_\nu},\ \hat{\overline{\mathfrak{m}}}_{k_\nu+1}^{r-1}\{\,\overline{\mathfrak{m}}_l\,\}\right),\quad l=k_\nu+1,\ \ldots,\ r-1 \tag{3.41}$$

нам вполне хватает, так как всего слагаемых (3.41), при данном l в сумме (3.39) имеется $(\nu+1)!$, а в $W_{\nu,t}$ $(\overline{\mathfrak{m}})$ координата m_l может принять не более, тем $(\nu+1)$ положительное значение и слагаемых $W_{\nu,t}$ $(\overline{\mathfrak{m}})$ есть $\nu!$. Несколько слагаемых вида (3.40) нам потребуется для образования членов

$$W_{\nu-1,t}(\overline{\mathfrak{m}}_1^{k_\nu-1},\ \hat{m}_{k_\nu},\ \hat{\overline{\mathfrak{m}}}_{k_\nu+1}^{r-1}),\ m_{k_\nu}>0. \tag{3.42}$$

У нас, согласно (3.38) $N\left\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\left(\overline{\mathfrak{m}}_{k_\nu}\{\cdot\}\right) = \nu - q_{k_\nu}(\mathfrak{m})\right.$. Следовательно, после образования в (3.42) $\hat{m}_{k_\nu}$, число оставшихся членов (3.40) будет равно

$$N_{\nu,k_\nu}(\overline{\mathfrak{m}}) = \nu! - (\nu-1)!\left(\nu - q_{k_\nu}(\overline{\mathfrak{m}})\right) = (\nu-1)!\ q_{k_\nu}(\overline{\mathfrak{m}}). \tag{3.43}$$

Если через $N_{\nu,k_i}(\overline{\mathfrak{m}})$ обозначить число членов (3.40), оставшихся после образования $W_{\nu-1,t}(\overline{\mathfrak{m}}_1^{k_i-1},\ \overline{\mathfrak{m}}_{k_i},\ \mathfrak{m}_{k_i+1}^{r-1})$, то для $N_{\nu,k_i}(\overline{\mathfrak{m}})$ получим рекуррентное соотношение

$$N_{\nu,k_i}(\overline{\mathfrak{m}}) = N_{\nu,k_{i+1}}(\overline{\mathfrak{m}}) -$$

$$- N_{\nu-1,k_{i+1}}\left(\overline{\mathfrak{m}}_{k_i}\{\,m>0\,\}\right) N\left\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\left(\mathfrak{m}_{k_i}\{\cdot\}\right)\right\},$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-1. \tag{3.44}$$

Здесь m — какое-нибудь значение $0<m\leqslant k_i$, с единственным условием $\overline{\mathfrak{m}}_{k_i}\{\,m\,\}\in\mathfrak{M}_{\nu-1}$. Очевидно, что если m и m' два таких значения, то

$$N_{\nu-1,k_i+1}\left(\overline{\mathfrak{m}}_{k_i}\{\,m'\,\}\right) = N_{\nu-1,k_{i+1}}\left(\overline{\mathfrak{m}}_{k_i}\{\,m\,\}\right),$$

поэтому из (3.38), (3.43) и (3.44) выводим

$$N_{\nu,k_i}(\overline{\mathfrak{m}}) = (i-1)!\prod_{j=1}^{\nu} q_{k_j}(\mathfrak{m}). \tag{3.45}$$

Если существует такой номер i_0, что $q_{k_{i_0}}(\overline{\mathfrak{m}})=0$, а $q_{k_i}(\mathfrak{m})>0$ при $i>i_0$, то, как видно из соотношения (3.45) $N_{\nu,k_{i_0}}(\overline{\mathfrak{m}})=0$. Но тогда и слагаемые вида

$$W_{\nu-1,t}\left(\overline{\mathfrak{m}}^{k_{i_0}-1}_{1,k,\ldots,k_{i_0}-1}\{m_{k_1},\ldots,m_{k_{i_0}-1}\},\ \hat{\overline{\mathfrak{m}}}^{r-1}_{k_{i_0}}\right)$$

уже отсутствуют, так как

$$q_{k_{i_0}}\left(\overline{\mathfrak{m}}_{k_1,\ldots,k_{i_0-1}}\{m_{k_1},\ldots,m_{k_{i_0-1}}\}\right)=q_{k_{i_0}}(\overline{\mathfrak{m}})=0$$

будут входить в формулу (3.45) для

$$N_{\nu-1,k_{i_0}}\left(\mathfrak{m}_{k_1,\ldots,k_{i_0-1}}\{m_{k_1},\ldots,m_{k_{i_0-1}}\}\right)$$

в качестве множителя. Таким образом, слагаемые $W_{\nu+1,t}(\mathfrak{m})$, нужные для образования $W_{\nu,t}(\hat{\overline{\mathfrak{m}}})$ не исчезнут до тех пор, пока не исчезнет $W_{\nu,t}(\mathfrak{m})$ или пока все координаты вектора $\mathfrak{m}$ не будут отмечены. Итак, доказано утверждение, что или все ненулевые координаты $\mathfrak{m}$ в члене (3.36) будут отмечены знаком $\hat{}$, или сам член (3.36) до этого исчезнет.

Пусть $N_\nu(\mathfrak{m})$ – число слагаемых $W_{\nu,t}(\mathfrak{m})$, оставшихся после отмечивания знаком $\hat{}$. Пусть $k_{i_0}=k_{i_0}(\mathfrak{m})$ самый левый из нулей вектора $\mathfrak{m}$, использованных для образования $W_{\nu-1,t}(\hat{\mathfrak{m}})$. Тогда, согласно (3.45), имеем

$$N_\nu(\mathfrak{m})=(i_0-1)!\prod_{j=i_0}^{\nu}q_{k_j}(\mathfrak{m}), \tag{3.46}$$

где $k_i=k_i(\mathfrak{m})$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu$ – индексы нулевых координат вектора $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}$.

Если $N_\nu(\mathfrak{m})>0$, то из (3.44) следует, что $N\left\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\left(\mathfrak{m}_{k_{i_0-1}}\{\cdot\}\right)\right\}=0$, или согласно (3.38),

$$q_{k_{i_{0}-1}}(\mathfrak{m})=i_0-1. \tag{3.47}$$

Положим

$$d(\mathfrak{m})=\sum_{k=1}^{r-1}d(m_k),$$

$$d(\mathfrak{m}_k)=\begin{cases} l_{k+1}-l_{m_k}, & \text{если } m_k>0,\\ 0, & \text{если } m_k=0.\end{cases} \tag{3.48}$$

Тогда

$$d(\mathfrak{m})=\max_{1\leqslant i,j\leqslant N}(l_i-l_j)\ \text{при}\ N_\nu(\mathfrak{m})>0. \tag{3.49}$$

Действительно, пусть

$$U_k=\begin{cases} k+1-m_k, & \text{при } m_k>0,\\ 0, & \text{при } m_k=0.\end{cases}$$

Тогда из (3.47) следует, что среди $m_{k_{i_{0}-1}+1},\ldots,m_{r-1}$ имеется i_0-1 число из ряда $1,\ 2,\ \ldots,\ k_{i_{0}-1}$. В силу

$$N_\nu(\mathfrak{m})>0,$$

из (3.46) следует, что $q_{k_j}(\mathfrak{m}) \geqslant 1, j=i_0, \ldots, \nu$. Среди U_k, $k=1, 2, \ldots, r-1$ имеется ν нулей. Значит,

$$\sum_{k=1}^{r-1} U_k \geqslant \sum_{k=2}^{i_0} k+2(\nu+1-i_0)+(r-1-2\nu)=$$

$$=r-1+(i_0-1)\left(\frac{i_0+2}{2}-2\right)\geqslant r-1.$$

Отсюда следует справедливость соотношения (3.49).

Итак, *получаем*:

$$\Gamma_r\{S, t\}=\sum_{1\leqslant l_1,\ldots,l_r\leqslant N} I_{l_1,\ldots,l_N}(t)$$

$$I_{l_1,\ldots,l_N}(t)=\left(f_S(t)\right)^{-r}\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_\nu} N_\nu(\mathfrak{m})\,W_{\nu,t}(\hat{\mathfrak{m}}), \tag{3.50}$$

где $\mathfrak{M}_\nu$ *есть множество всех векторов* $\mathfrak{m}=\{m_1, \ldots m_{r-1}\}$ *таких, что* $\{m_1, \ldots m_{r-1}\}$ *является перестановкой порядка* $r-1-\nu$ *из чисел* $1, 2, \ldots, r$, *а остальные* ν *чисел* m_i *равны нулю, и, кроме того,* $m_k\leqslant k$, $k=1, 2, \ldots, r-1$. *Число* $N_\nu(\mathfrak{m})$ *определяется соотношением* (3.46), *а* $W_{\nu,t}(\mathfrak{m})$, $W_{\nu,t}(\hat{\mathfrak{m}})$ — (3.33), (3.31) *и* (3.33) *соответственно. Если* $N_\nu(\mathfrak{m})>0$, *то* $d(\mathfrak{m})$ *из* (3.48) *равно* $\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant N}(l_i-l_j)$;

б) приступим теперь к непосредственному доказательству леммы. Пусть

$$r_i=i\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right], \qquad i=0,1,\ldots,N-1,$$

где число N определяется из неравенства

$$r_{N-2}<n\leqslant r_{N-2}+\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right],$$

а $[x]$ означает целую часть числа x.

Пусть

$$\gamma_i=\mathbf{M}\{S_{r_i}\mid\mathcal{F}_{r_i}\},$$

$$\tilde{\gamma}_i=\begin{cases}\min\left\{\gamma_i,\ 2C^{(n)}\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right]\right\}, & \text{если } \gamma_i\geqslant 0,\\ \max\left\{\gamma_i,\ -2C^{(n)}\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right]\right\}, & \text{если } \gamma_i<0,\end{cases} \tag{3.51}$$

$$\varphi_i=\tilde{\gamma}_{i-1}+S_{r_{i-1},r_i}-\tilde{\gamma}_i, \qquad i=1, 2, \ldots, N-1, \qquad \gamma_0=0,$$

где

$$S_{kl}=\sum_{j=k+1}^{l} X_j, \qquad 0\leqslant k<l\leqslant n.$$

Положим

$$\varphi_i=\tilde{\varphi}_i-\mathbf{M}\tilde{\varphi}_i, \qquad i=1, 2, \ldots, N-1.$$

$$\varphi_N=\tilde{\gamma}_{N-1}$$

Тогда

$$S_n=\sum_{k=1}^{N}\varphi_k$$

и, как показал Р. Л. Добрушин ([22], соотношение (6.16), и § 8)

$$\mathbf{D}S_n\geqslant\beta\sum_{k=1}^{N}\mathbf{D}\varphi_k$$

где β — абсолютная константа $\geqslant\frac{1}{10^4}$.

Случайные величины $\varphi_1,\ldots,\varphi_N$ связаны в такую цепь Маркова с N моментами времени, вероятностями перехода $\overline{P}_k(x, A)$ из состояния $x\in\mathcal{X}_{k-1}$ в k-й момент времени в измеримое множество состояний A в момент времени k, что коэффициент эргодичности между k-ым и l-ым моментами времени β_{kl}, $k=1, 2, \ldots, N$, удовлетворяет неравенство

$$(1-\alpha^{(n)})^{\frac{l-k}{\alpha^{(n)}}}\leqslant e^{-(l-k)}\qquad\text{при } l-k\leqslant 2,\tag{3,54}$$

$$1-\alpha^{(n)}\leqslant e^{-\alpha^{(n)}}\ \text{при } l-k=1,\qquad 1\leqslant k<l\leqslant N.$$

Положим

$$Y_k=\varphi_k,\ k=1, 2, \ldots, N\tag{3.55}$$

и воспользуемся результатами части а) для вычисления

$$\Gamma_r\{S_n\}=\Gamma_r\{S, 0\}.$$

Обозначим $W_{\nu,0}=W_\nu$, $\nu=1, 2, \ldots, r-1$. Тогда, согласно (3.50)

$$\Gamma_r\{S_n\}=\sum_{1\leqslant l_1,\ldots,l_r\leqslant N}\ \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_\nu}N_\nu(\mathfrak{m})\,W_\nu(\hat{\mathfrak{m}}).\tag{3.56}$$

В случае $t=0$ имеем

$$\mathbf{M}_\nu(I_p)=\mathbf{M}\,Y_{i_1}\cdots Y_{i_m}$$

при

$$I_p=\{i_1,\ldots,i_m\},$$

и из (3.33) и (3.33′) выводим

$$W_\nu(\hat{\mathfrak{m}})=\int\limits_{X_{l_{j_1}}}\cdots\int\limits_{X_{l_{j_2}}}Y_{l_{j_1}}(x_1)\overline{P}_{l_{j_1}}(dx_1)\prod_{p=2}^{r}Y_{l_{j_p}}(x_p)\times$$

$$\times\left(P_{l_{j_{p-1}}l_{j_p}}(x_{p-1}, dx_p)-\overline{P}_{l_{j_p}}(dx_p)\right),\tag{3.57}$$

если $j_1, \ldots, j_r$ такие, что

$$l_{j_1}\leqslant l_{j_2}\leqslant\cdots\leqslant l_{j_r}\tag{3.58}$$

и если в соотношении (3.57) считать

$$P_{ll}(x, dy)-P_l(dy)=\begin{cases}1, & \text{при } y=x\\ 0 & \text{при } y\neq x\end{cases}$$

и

$$P_{l_{j_0}l_{j_p}}(x_{p-1},\ dx_p)-\overline{P}_{l_{j_p}}(dx_p)=\overline{P}_{l_{j_p}}(dx_p).$$

При вычислении $\Gamma_r\{S_n\}$, не нарушая общности, можно считать $\mathbf{M}X_k=0$, $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда и

$$\mathbf{M}Y_k=0,\ k=1, 2, \ldots, N. \tag{3.59}$$

Согласно (3.49)–(3.52), (3.55), (3.54), (3.57), (3.58) и лемме 4 при $u=\nu=2$, находим

$$|W_\nu(\hat{\mathfrak{m}})|\leqslant\left(\frac{10C^{(n)}}{\alpha^{(n)}}\right)^{r-2}e^{r-2}e^{-(l_{j_r}-l_{j_2})}\mathbf{M}|Y_{l_{j_1}}Y_{l_{j_2}}|$$

при

$$l_{j_2}-l_{j_1},<2,$$

$$|W_\nu(\hat{\mathfrak{m}})|\leqslant\left(\frac{10C^{(n)}}{\alpha^{(n)}}\right)^{r-2}e^{\frac{r-2}{2}}\times e^{-\frac{1}{2}(l_{j_2}-l_{j_1})}e^{-\frac{1}{2}(l_{j_2}-l_{j_1})}\sqrt{\mathbf{M}Y^2_{l_{j_1}}\mathbf{M}Y^2_{l_{j_2}}}$$

при

$$l_{j_2}-l_{j_1}\geqslant 2 \tag{3.59}$$

или, учитывая (3.46) и (3.59) из (3.56), находим

$$|\Gamma_r\{S_n\}|\leqslant\sum_{1\leqslant l_1,\ldots,l_r\leqslant N}\ \sum_{\nu=0}^{r-1}\ \sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_\nu}N_\nu(\mathfrak{m})|W_\nu(\mathfrak{m})|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{r!\,H_0H_2^{r-2}C^{(n)r-2}}{\alpha^{(n)r-2}}\left(\sum_{\substack{1\leqslant l_1,<l_2\leqslant N\\ l_2-l_1<2}}\mathbf{M}|Y_{l_1}Y_{l_2}|+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{1\leqslant l_1<l_2\leqslant N\\ l_2-l_1\geqslant 2}}e^{-\frac{1}{2}(l_2-l_1)}\sqrt{\mathbf{M}Y^2_{l_1}\mathbf{M}Y^2_{l_2}}\right), \tag{3.60}$$

где H_0 и H_2 — абсолютные константы.

Так как

$$\sum_{1\leqslant l_1<l_2\leqslant N}\mathbf{M}|Y_{l_1}Y_{l_2}|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant l_1<l_2\leqslant N}(\mathbf{D}Y_{l_1}+\mathbf{D}Y_{l_2})\leqslant\sum_{l=1}^{N}\mathbf{D}Y_l, \tag{3.61}$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant l_1<l_2\leqslant N\\ l_2-l_1\geqslant 2}}e^{-\frac{1}{2}(l_2-l_1)}\sqrt{\mathbf{M}Y^2_{l_1}\mathbf{M}Y^2_{l_2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant l_1<l_2\leqslant N}e^{-\frac{1}{2}(l_2-l_1)}(\mathbf{D}Y_{l_1}+\mathbf{D}Y_{l_2})\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}\sum_{l=1}^{N}\mathbf{D}\varphi_l \tag{3.62}$$

и

$$\sum_{l=1}^{N} \mathbf{D}\varphi_l \leqslant \frac{1}{\beta}\, \mathbf{D}S_n, \tag{3.63}$$

согласно (3.53), (3.55), то из (3.60) – (3.63) окончательно выводим

$$|\Gamma_r\{S_n\}| \leqslant \frac{r!\, H_1 H_2^{r-2} C^{(n)r-2} \mathbf{D}S_n}{\alpha^{(n)r-2}},$$

где

$$H_1 = \left(1 + 2^{-1}\left(-e^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right)\beta^{-1} H_0.$$

Лемма доказана. Она играет основную роль при исследовании вероятностей больших уклонений для S_n. Из нее легко следует следующий аналог неравенства С. Н. Бернштейна:

Лемма 8. *В условиях леммы* 7 *имеют место неравенства*

$$\mathbf{P}\{Z_n \geqslant x\} \leqslant e^{-\frac{x^2}{2(1+2H_1)}},$$

$$\mathbf{P}\{Z_n \leqslant -x\} \leqslant e^{-\frac{x^2}{2(1+2H_1)}},$$

если только

$$0 < x \leqslant \frac{1+2H_1}{2H_2}\; \frac{\alpha^{(n)} B_n}{C^{(n)}}.$$

Доказательство. Согласно лемме 7 функция

$$\ln \varphi_{Z_n}(z), \quad \varphi_{Z_n}(z) = \mathbf{M}\, e^{zZ_n}$$

аналитична в круге

$$|z| < \Delta_n = \frac{\alpha^{(n)} B_n}{C^{(n)} H_2},$$

и при $|z| < \Delta_n$ имеем

$$\ln \varphi_{Z_n}(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma_k\{S_n\}}{B_n^k\, k!}\, z^k = \frac{z^2}{2}\left(1 + \Theta\, \frac{2|z| H_1}{\Delta_n\left(1 - \frac{|z|}{\Delta_n}\right)}\right). \tag{3.63}$$

Следовательно, при

$$0 < u < \frac{1}{2}\, \frac{\Delta_n}{B_n} \tag{3.64}$$

имеет место оценка

$$\ln \varphi_{S_n}(u) \leqslant \frac{u^2 B_n^2}{2}\,(1 + 2H_1). \tag{3.65}$$

Поэтому, пользуясь неравенством Чебышева, находим

$$\mathbf{P}\{uS_n \geqslant y^2 + \ln \varphi_{S_n}(u)\} \leqslant e^{-y^2} \tag{3.66}$$

при любом y. Положим

$$y = \frac{x}{\sqrt{2(1+2H_1)}}, \quad u = \frac{x}{(1+2H_1) B_n}.$$

Тогда из (3.64) – (3.66) следует, что

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant xB_n\} \leqslant e^{-\frac{x^2}{2(1+2H_1)}}$$

при

$$0 < x \leqslant \frac{1+2H_1}{2}\, \Delta_n.$$

Аналогично оценивается

$$\mathbf{P}\{S_n \leqslant -xB_n\}.$$

Лемма доказана. Заметим еще, что при

$$x \geqslant \frac{1+2H_1}{2H_2} \frac{\alpha^{(n)} B_n}{C^{(n)}},$$

как и в теореме С. Н. Бернштейна, будут выполняться неравенства

$$\mathbf{P}\{Z_n \geqslant x\} \leqslant e^{-\frac{\alpha^{(n)} B_n}{4H_2 C_n^{(n)}} x},$$

$$\mathbf{P}\{Z_n \leqslant -x\} \leqslant e^{-\frac{\alpha^{(n)} B_n}{4H_2 C^{(n)}} x}. \tag{3.67}$$

Лемма 9. *Если с вероятностью* 1

$$|X_k| \leqslant C^{(n)}, \qquad k=1, 2, \ldots, n, \quad \alpha^{(n)}>0,$$

то для любого $s \geqslant 3$ *в интервале*

$$|t| \leqslant \frac{1}{2H_2} \bar{L}_{3n}^{-1}$$

имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$f_{Z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} \bar{P}_{\nu n}(it) \bar{L}_{\nu+2,n} + \bar{\Theta}_s (|t|^s + |t|^{3(s-2)} \bar{L}_{sn})\right).$$

Здесь

$$\bar{L}_{kn} = \left(\frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)} B_n}\right)^{k-2}, \qquad k=3, 4, \ldots,$$

$H_2>0$ *абсолютная константа из леммы* 7,

$$\bar{P}_{\nu n}(it) = \sum_{m=1}^{\nu} \bar{c}_{m\nu n} (it)^{\nu+2m}$$

является многочленом степени 3ν *с равномерно относительно* n *ограниченным коэффициентами* $\bar{c}_{m\nu n}$, *причем*

$$\bar{c}_{m\nu n} \bar{L}_{\nu+2,n} = P_{m\nu n} = \frac{1}{m!\, B_n^{j+\nu 2}} \sum_{\substack{\nu_1, \ldots, \nu_m \geqslant 3 \\ \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_m = \nu+2m}} \frac{\Gamma_{\nu_j}\{S_n\}}{\nu_j!}. \tag{3.68}$$

Величина Θ_s *ограничена константой, зависимой только от* s.

Доказательство. Пусть $\mathbf{M}X_k=0$, $k=1, \ldots, n$ и, как и в лемме 8

$$\Delta_n = \frac{\alpha^{(n)} B_n}{C^{(n)} H_2}.$$

Из соотношения

$$\frac{d^s}{dz^s} \ln \varphi_{Z_n}(z) = \sum_{k=s}^{\infty} \frac{\Gamma_k\{S_n\} z^{k-s}}{B_n^k (k-s)!} =$$

$$= \Theta \frac{H_1}{\Delta_n^{s-2}} \sum_{k=s}^{\infty} \left(k-(s-1)\right) \ldots k \left(\frac{|z|}{\Delta_n}\right)^{k-s} = \frac{s!\, \Theta H_1}{\Delta_n^{s-2} \left(1-\frac{|z|}{\Delta_n}\right)^{s+1}}$$

при

$$|z| \leqslant \frac{1}{2} \Delta_n \tag{3.70}$$

находим

$$\left| \frac{d^s}{dz^s} \ln \varphi_{Z_n}(z) \right| \leqslant \frac{s!\, 2^{s+1} H_1}{\Delta_n^{s-2}}. \tag{3.71}$$

Из (3.69) – (3.71) выводим

$$\left| \frac{d^s \ln f_{Z_n}(t)}{dt^s} \right| = |\Gamma_s\{Z_n, t\}| \leqslant$$

$$\leqslant s!\, 2^{s+1} H_1 H^{s-2} \left(\frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)} B_n} \right)^{s-2} = s!\, 2^{s+1} H_1 H_2^{s-2} \bar{L}_{sn} \tag{3.72}$$

при

$$|t| \leqslant \frac{1}{2H_2} \frac{\alpha^{(n)} B_n}{C^{(n)}}.$$

Следовательно, в интервале

$$|t| \leqslant \frac{1}{2H_2} \bar{L}_{3n}^{-1}$$

имеем

$$\ln f_{Z_n}(t) = \sum_{k=3}^{s-1} \frac{\Gamma_k\{S_n\}}{k!} \left(\frac{it}{B_n} \right)^k + \vartheta_s \bar{L}_{sn} |t|^s,$$

$$|\vartheta_s| \leqslant 2^{s+1} H_1 H_2^{s-2}. \tag{3.73}$$

Имея (3.73), учитывая определение $\bar{L}_{kn}$, оценку

$$\frac{\Gamma_k\{S_n\}}{B_n^k} \leqslant k!\, H_1 H_2^{k-2} \bar{L}_{kn}$$

и дословно повторяя выкладки леммы из [43], получаем доказательство леммы 9.

Лемма 10. *Если*

$$\alpha^{(n)} B_n \geqslant \delta \ln \frac{1}{\alpha^{(n)}}, \quad \delta > 0, \quad \mathbf{M}|X_1|^s < \infty$$

и

$$\mathbf{M}\{|X_k|^s \,|\, \tilde{\mathscr{F}}_{k-1}\} < \infty$$

с вероятностью 1, *для какого-нибудь целого* $s \geqslant 3$, $k = 2, 3, \ldots, n$, *то при любом* $0 < a < \infty$ *в интервале*

$$|t| \leqslant \min \left\{ a \ln^{\frac{1}{2}} \left(1 + \bar{L}_{sn}^{-\frac{1}{s-2}} \right), \quad \bar{L}_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}} \right\} \tag{3.74}$$

имеет место соотношение

$$f_{Z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_{\nu n}(it) \bar{L}_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}} + \Theta_{s, a, \delta} \left(|t|^s + |t|^{3(s-2)} \bar{L}_{sn} \right) \right). \tag{3.75}$$

Здесь

$$L_{sn}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\{|X_k^s|\}}{\alpha^{(n)s-1}B_n^s},\quad \tilde{L}_{sn}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\sup\mathbf{M}\{|X_k^s|\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{k-1}\}}{\alpha^{(n)s-1}B_n^s},$$

$$P_{\nu n}(it)=\sum_{m=1}^{\nu}c_{m\nu n}(it)^{\nu+2m},$$

$c_{m\nu n}L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}}=p_{m\nu n}$ *из* (3.68), $c_{m\nu n}$ *ограничены константой, зависящей только от* ν*).

Заметим, что условие

$$\alpha^{(n)}B_n\geqslant C\ln\frac{1}{\alpha^{(n)}},\qquad c>0,$$

принято нами лишь потому, что при нем имеет место оценка (3.78), а это намного упрощает доказательство леммы. Лемма верна и без этого условия.

Доказательство леммы. Будем пользоваться результатми и обозначениями части а) доказательства леммы 7. Пусть в нашем случае $N=n$, $Y_k=X_k$, $k=1,\ \dots,\ n$, $S=S_n$. Величину $M_\nu(I_p,\ t)$ из (3.32) с помощью функций $f_{kl}(t,\ \omega,\ A)$ можем представить так:

$$M_\nu(I_p,\ t)=\left(f_{s_n}(t)\right)^{r-\nu}\int\limits_{\Omega_{l_{i_1}}}\dots\int\limits_{\Omega_{l_{i_m}}}X_{l_{i_1}}\dots X_{l_{i_m}}\times$$

$$\times f_{0l_{i_1}}(t,\ d\omega_1)\cdot f_{l_{i_1}l_{i_2}}(t,\ \omega_1,\ d\omega_2)\dots f_{l_{i_{m-1}}l_{i_m}}(t,\ \omega_{m-1},\ d\omega_m),$$

если $I_p=\{i_1,\ \dots,\ i_m\}$. Следовательно, соотношение (3.50) для любого $r\leqslant s$ примет следующий вид:

$$\Gamma_r\{S_n,\ t\}=\sum_{1\leqslant l_1,\ \dots,\ l_r\leqslant n}I_{l_1,\dots,l_r}(t),$$

где при $l_1\leqslant l_2\leqslant\dots\leqslant l_r$

$$I_{l_1,\dots,l_r}(t)=\left(f_{S_n}(t)\right)^{-r}\sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu\times$$

$$\times\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_\nu}N_\nu(\mathfrak{m})\int\limits_{\Omega_{l_1}}\dots\int\limits_{\Omega_{l_r}}X_{l_1}(\omega_1)\dots X_{l_r}(\omega)\times$$

$$\times\Bigg\{\prod_{\substack{k=1\\ \{m_{k-1}=0\}}}^{r-1}f_{0l_k}(t,\ d\omega_k)\Bigg\}\cdot\Bigg\{\prod_{\substack{k=2\\ \{m_k\neq 0\}}}^{r}[f_{l_{m_{k-1}}l_k}(t,\ \omega_{m_{k-1}},d\omega_k)f_{S_n}(t)-$$

$$-f_{0l_k}(t,\ d\omega_k)f_{l_{m_{k-1}}n}(t,\ \omega_{m_{k-1}},\ \Omega_n)]\Bigg\}\Bigg\{\prod_{k\in\mathfrak{M}}f_{l_kn}(t,\ \omega_k,\ \Omega_n)\Bigg\},$$

---

*) Вместо vrai sup, vrai inf мы в дальнейшем везде будем писать просто sup, inf. Читатель легко поймет, где sup или inf нужно нонимать с vrai.

где

$$\mathfrak{M}=\{1, \ldots, r\}\setminus\{m_1, \ldots, m_{r-1}\},$$

причем, согласно (21) и (22),

$$f_{l_{m_{k-1}} l_k}(t, \omega_{m_{k-1}}, d\omega_k) f_{S_n}(t) - f_{0l_k}(t, d\omega_k) f_{l_{m_{k-1}} n}(t, \omega_{m_{k-1}}, \Omega_n) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{l_{m_{k-1}}}} \cdots \int\limits_{\Omega_{l_k}} f_{0l_{m_{k-1}}}(t, dx) \nu_{l_{m_{k-1}} l_k}(t, \omega_{m_{k-1}}, x, d\omega_k, dy) f_{l_k n}(t, y, \Omega_n),$$

$$x\in\Omega_{l_{m_{k-1}}}, \quad y\in\Omega_{l_k}.$$

Итак,

$$|I_{l_1, \ldots, l_r}| \leqslant \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_\nu} N_\nu(\mathfrak{m}) \frac{1}{|f_{S_n}(t)|^r} \cdot \int\limits_{\Omega_{l_1}} \cdots \int\limits_{\Omega_{l_r}} \left(\prod_{k=1}^{r} |f_{0l_k}(t, d\omega_k)| \right) \times$$

$$\times \Bigg(\prod_{\substack{k=2 \\ \{m_{k-1}\neq 0\}}}^{r} \int\limits_{\Omega_{l_{m_{k-1}}}} \cdots \int\limits_{\Omega_{l_k}} |f_{0l_{m_{k-1}}}(t, dx) \nu_{l_{m_{k-1}} l_k} \times$$

$$\times (t, \omega_{m_{k-1}}, x, d\omega_k dy) f_{l_k n}(t, y, \Omega_n)| \Bigg) \cdot \left(\prod_{k\in\mathfrak{M}} |f_{l_k n}(t, \omega_k, \Omega_n)| \right). \quad (3.76)$$

В условиях нашей леммы имеют место следующие соотношения:

$$f_{Z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \vartheta_{\cdot, a, \delta} \frac{|t|^3}{\ln^3 (T_{s,n}+1)} \right), \quad (3.77)$$

$$\frac{\mathbf{M} \left| f_{S_n}\left(\frac{t}{B_n} \,\Big|\, \tilde{\mathscr{F}}_u\right) \right| \sup \left| f_{S_{\nu n}}\left(\frac{t}{B_n} \,\Big|\, \tilde{\mathscr{F}}_\nu\right) \right|}{\left| f_{S_n}\left(\frac{t}{B_n}\right) \right|} = \Theta_{s, a, \delta}, \quad (3.78)$$

если только

$$0 \leqslant v - u \leqslant a^2 s \frac{\ln T_{sn}}{\alpha^{(n)}}. \quad (3.79)$$

Здесь

$$f_\xi(t \mid \mathscr{F}) = \mathbf{M}(e^{it\xi} \mid \mathscr{F}),$$

$$T_{sn} = \tilde{L}_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}.$$

Доказательство соотношений (3.77) и (3.78) при $s=3$ и $0<c\leqslant DX_j<C<\infty$, $j=1, 2, \ldots, n$ дано в работе автора [45] (стр. 254, лемма 7). Доказательство для общего случая представляет тривиальное обобщение, но, так как само доказательство довольно грамоздкое, то мы его здесь не приводим. Рассмотрим 2 случая.

1. Пусть

$$l_k - l_m \leqslant a^2 \frac{\ln (T_{sn}+1)}{\alpha^{(n)}}, \qquad k=2, \ldots, r. \quad (3.80)$$

Тогда

$$|I_{l_1,\ldots,l_r}(t)|\leqslant\sum_{\nu=0}^{r-1}\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_\nu}N_\nu(\mathfrak{m})\left(\prod_{j=1}^{r}\sup \mathbf{M}^*\{|X_{l_j}||\tilde{\mathscr{F}}_{l_j-1}\}\right)\times$$

$$\times\frac{2^{r-\nu-1}}{|f^r_{S_n}(t)|}\left\{\prod_{\substack{k=1\\ \{m_{k-1}=0\}}}^{r-1}\mathbf{M}\left|f_{S_{l_k-1}}(t|\tilde{\mathscr{F}}_{l_k-1})\right|\right\}\times$$

$$\times\left(\prod_{\substack{k=1\\ \{m_k\neq 0\}}}^{r-1}\mathbf{M}\left|f_{S_{l_{m_k-1}}}(t|\tilde{\mathscr{F}}_{l_{m_k-1}})\right|\sup_{x,\,\omega}\|\nu_{l_{m_k-1}\,l_k-1}(t,\ \omega,\ x,\ \cdot)\|\times\right.$$

$$\left.\times\sup\left|f_{S_{l_k n}}(t|\tilde{\mathscr{F}}_{l_k})\right|\left(\prod_{k\in\mathfrak{M}}\sup\left|f_{S_{l_k n}}(t|\tilde{\mathscr{F}}_{l_k})\right|\right),\right. \tag{3.81}$$

так как

$$\int_{\Omega_l}\left|X_l^p(\omega)|f_{0l}(t,d\omega)\right|\leqslant\mathbf{M}\left|f_{S_{l-1}}(t|\tilde{\mathscr{F}}_{l-1})\sup\mathbf{M}\{|X_l^p||\tilde{\mathscr{F}}_{l-1}\}\right|,$$

$$|\nu_{l-1,l}(t,\ \bar{\omega},\ y,\ A\times B)|\leqslant P_l(\omega,\ A)P_l(y,\ B)+P_l(y,\ A)P_l(\omega,\ B),$$
$$A\in\tilde{\mathscr{F}}_l,\quad B\in\tilde{\mathscr{F}}_l$$

и

$$\int|X_l^p(\omega)|\,|\nu_{kl}(t,\ \omega,\ x,\ d\bar{\omega},\ dy)|\leqslant$$
$$\leqslant 2\sup_{x,\,\omega}\|\nu_{kl-1}(t,\ \omega,\ x,\ \cdot)\|\sup\mathbf{M}\{|X_l^p||\tilde{\mathscr{F}}_{l-1}\},\qquad p=0,\ \ldots,\ r.$$

Звездочка над $\mathbf{M}$ означает, что

$$\prod_{p=1}^{m}\sup\mathbf{M}^*\{|X_{l_{i_p}}|\,|\tilde{F}_{l_{i_p}-1}\}=\sup\mathbf{M}\{|X_l^m|\tilde{\mathscr{F}}_{l-1}\},$$

если $l_{i_1}=\ldots=l_{i_p}=l$.

Учитывая (3.77)–(3.80), (3.49) и лемму 1′ из (3.81), выводим

$$|I_{l_1,\ldots,l_r}(t)|=\Theta_s e^{-\alpha^{(n)}(l_r-l_1)}\left(\prod_{j=1}^{r}\sup\mathbf{M}^*\{|X_{l_j}|\,|\tilde{F}_{l_j-1}\}\right) \tag{3.82}$$

при $l_1\leqslant l_2\leqslant\ldots\leqslant l_r$.

2. Пусть хоть для одной пары $l_{m_{k_0}-1}, l_k$ выполнено неравенство

$$l_{k_0}-l_{m_{k_0}-1}-1>a^2 s\,\frac{\ln(T_{sn}-1)}{\alpha^{(n)}}.$$

Пусть $0<A_{s,a}<\infty$ такое, что для $\vartheta_{s,a}$ из (3.77) имеем

$$|\vartheta_{s,a}|\leqslant\frac{A_{s,a}^{s}}{2}.$$

Тогда при

$$|t|\leqslant\tau=\frac{\ln(1+T_{sn})}{A_{s,a}}$$

из (3.77) находим, что

$$|f_{Z_n}(t)|\geqslant\frac{1}{2}\,e^{-\frac{t^2}{2}}\geqslant\frac{1}{2}\,e^{-\frac{a^2}{2}\ln(1+T_{sn})},$$

поскольку нам достаточно брать a таким, чтобы

$$a\sqrt{\ln(1+T_{sn})}\leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}.$$

Мы можем считать, что

$$\tau\geqslant a\sqrt{\ln(1+T_{sn})},$$

так как в противоположном случае

$$T_{sn}\leqslant\Theta_a,$$

и утверждение леммы является тривиальным. Итак, при

$$|t|\leqslant\frac{a\sqrt{\ln(1+T_{sn})}}{B_n}$$

имеем

$$\frac{\sup\limits_{\omega,x}\|\nu_{l_{mk_0-1}l_{k_0-1}}(t,\omega,x,\cdot)\|}{|f_{S_n}^r(t)|}\leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left\{-\alpha^{(n)}(l_{k_0}-1-l_{mk_0-1})+\frac{ra^2}{2}\ln(T_{sn}+1)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left\{1-\frac{\alpha^{(n)}}{2}(l_{k_0}-l_{mk_0-1})\right\},$$

потому, что

$$-\frac{\alpha^{(n)}}{2}(l_{k_0}-1-l_{mk_0-1})\leqslant-\frac{sa^2}{2}\ln(1+T_{sn}).$$

Поэтому и в этом случае из (3.81) находим

$$|I_{l_1,\ldots,l_s}(t)|\leqslant\Theta_s e^{-\frac{\alpha^{(n)}}{2}(l_r-l_1)}\left(\prod_{j=1}^{r}\sup\mathbf{M}^*\{|X_{l_j}|\,|\mathscr{F}_{l_j-1}\}\right)\tag{3.83}$$

при $l_1\leqslant l_2\leqslant\ldots\leqslant l_r$.

Из (3.82) и (3.83) без труда получаем

$$|\Gamma_r\{S_n,\ t\}|=\Theta_s\sum_{1\leqslant l_1\leqslant\ldots\leqslant l_r\leqslant n}|I_{l_1,\ldots,l_r}(t)|\leqslant$$

$$\leqslant\Theta_{s,a}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sup\mathbf{M}\{|X_j|^r\,|\bar{\mathscr{F}}_{j-1}\}}{\alpha^{(n)(r-1)}}$$

при

$$|t|\leqslant\frac{a\sqrt{\ln(1+T_{sn})}}{B_n},$$

или

$$|\Gamma_s\{Z_n,\ t\}|=\Theta_{s,a}\tilde{L}_{sn}\tag{3.84}$$

при

$$|t|\leqslant a\sqrt{\ln(1+T_{sn})}.$$

Оценка (3.84) позволяет нам в интервале (3.74) получить разложение

$$\ln f_{Z_n}(t)=\sum_{r=3}^{s-1}\frac{\Gamma_r\{S_n\}}{r!\,B_n^r}(it)^r+\Theta_{s,a}\tilde{L}_{sn}|t|^s.\tag{3.85}$$

Оценим

$$\lambda_{rn}=\frac{\Gamma_r\{S_n\}}{B_n^r}$$

положим

$$L_{sn}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\,|X_k^s|}{B_n^s}, \qquad C^{(n)}=64^{\frac{1}{s-2}}\cdot\alpha^{(n)}B_nL_{sn}^{\frac{1}{s-2}}, \tag{3.86}$$

$$X_k'=\begin{cases} X_k, & \text{если } |X_k|\leqslant c^{(n)},\\ 0, & \text{при } |X_k|>C^{(n)},\end{cases}$$

$$X_k''=X_k-X_k'.$$

Тогда $S_n=S_n'+S_n''$, где $S_n'=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k'$,

$$S_n''=\sum_{k=1}^{n}X_k''.$$

Так как слагаемые суммы S_n' ограничены числом $C^{(n)}$, то для S_n' мы можем пользоваться построением (3.52)–(3.53). Получим, что

$$S_n'=\sum_{k=1}^{N}\varphi_k \text{ и } DS_n'\geqslant\beta\sum_{k=1}^{N}D\varphi_k, \tag{3.87}$$

где $\beta>0$ – абсолютная константа, величина φ_k является $\tilde{\mathscr{F}}_{r_{k-1},\,r_k}$ – измеримой,

$$r_k=k\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right],\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$

определяется из неравенства

$$r_{N-2}<n\leqslant r_{N-2}+\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}}+1\right],$$

и

$$|\varphi_k|\leqslant\frac{10\,C^{(n)}}{\alpha^{(n)}}. \tag{3.88}$$

Пусть

$$\psi_k=\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k}X_j'' \text{ и } Y_k=\varphi_k+\psi_k,\ k=1,\ \ldots,\ N.$$

Тогда

$$S_n=\sum_{k=1}^{N}Y_k. \tag{3.89}$$

Применяя лемму 6 и учитывая (3.86), получаем

$$\mathbf{D}S_n''\leqslant\frac{16}{\alpha^{(n)}}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}X_k''\leqslant\frac{16}{\alpha^{(n)}}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>C^{(n)}}x^2\,dF_{X_k}(x)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{16}{\alpha^{(n)}\,C^{(n)s-2}}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\,|X_k^s|=\frac{1}{4}B_n^2.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\,B_n^2 \leqslant \mathbf{D}S_n' \leqslant \frac{3}{2}\,B_n^2,$$

что вместе с (3.87) дает

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{D}\varphi_k \leqslant \frac{3}{2\beta}\,B_n^2. \tag{3.90}$$

Случайные величины Y_k, $k=1, 2, \ldots, N$, как и в случае леммы 7, связаны в цепь Маркова с N моментами времени, вероятностями перехода $\bar{P}_{kl}(x, A)$ и с коэффициентами эргодичности между k-ым и l-ым моментами времени β_{kl}, удовлетворяющим неравенству

$$1-\beta_{kl} \leqslant \begin{cases} (1-\alpha^{(n)})^{\frac{l-k}{\alpha^{(n)}}} \leqslant e^{-(l-k)} & \text{при} \quad l-k \geqslant 2 \\ 1-\alpha^{(n)} \leqslant e^{-\alpha^{(n)}} & \text{при} \quad l-k=1. \end{cases}$$

Поэтому мы можем пользоваться равенствами (3.56), (3.57). При $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_r$ для $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_\nu$ с $N_\nu(\mathfrak{m})>0$ будем иметь

$$|W_\nu(\hat{\mathfrak{m}})| = \Bigl| \int\limits_{X_{l_r}} \cdots \int\limits_{X_{l_r}} Y_{l_1}(x_1)\bar{P}_{l_1}(dx_1) \times$$

$$\times \prod_{p=2}^{r} Y_{l_p}(x_p)\Bigl(P_{l_{m_{p-1}}l_p}(x_{p-1}, dx_p) - P_{l_p}(dx_p)\Bigr)\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant e^r e^{-(l_r-l_1)} \cdot \left(\prod_{p=1}^{r} \mathbf{M}^*\{|Y_{l_p}^r|\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

или

$$|\Gamma_r\{S_n\}| = \Theta_r \sum_{1\leqslant l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_r \leqslant N} \sup_{\nu} \sup_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_\nu} |W_\nu(\hat{\mathfrak{m}})| =$$

$$= \Theta_r \sum_{l=1}^{N} \mathbf{M}\{|Y_l^r|\}. \tag{3.92}$$

Имеем

$$\sum_{l=1}^{N} \mathbf{M}\{|Y_l^r|\} \leqslant 2^{r-1}\left(\sum_{l=1}^{N} \mathbf{M}\{|\varphi_l|^r\} + \sum_{l=1}^{N} \mathbf{M}\{|\psi_l|^r\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{r-1}\left(\frac{10\,C^{(n)}}{\alpha^{(n)}}\right)^{r-2} \sum_{l=1}^{N} \mathbf{D}\varphi_l + \frac{4^{r-1}}{\alpha^{(n)r-1}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\{|X_k''|^r\}, \tag{3.93}$$

так как

$$\mathbf{M}\{|\psi_l|^r\} \leqslant \frac{2^{r-1}}{\alpha^{(n)r-1}} \sum_{j=r_{l-1}+1}^{r_l} \mathbf{M}\{|X_j''|^r\}.$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\{|X_k''|^r\} \leqslant \frac{1}{C^{(n)s-r}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(|X_k|^s) = \frac{\alpha^{(n)s-1}B_n^s}{C^{(n)s-r}}\,L_{sn},$$

и, с помощью (3.86) и (3.90) из (3.93) получаем

$$\sum_{l=1}^{N} \mathrm{M}\{|Y_l|^r\} = \Theta_r L_{sn}^{\frac{r-2}{s-2}} B_n^r.$$

Вспомнив (3.92), находим оценку

$$|\lambda_{rn}| = \frac{|\Gamma_r\{S_n\}|}{B_n^r} = \Theta_r L_{sn}^{\frac{r-2}{s-2}}, \quad |\Theta_r| \leqslant r!\, H_0^{r-2}, \quad r=3, \ldots, s. \tag{3.94}$$

Очевидно, $L_{sn} \leqslant \tilde{L}_{sn}$. Имея разложение (3.85) и оценки (3.94), действуя так же, как и при доказательстве леммы из [43] (там ведь независимость величин использовалась только для получения разложения (3.85) и оценок (3.94)) получаем доказательство леммы.

Если требовать существования только абсолютных моментов $\mathbf{M}\,|X_k|^s < \infty$, $k=1, \ldots, n$ и пытаться выразить остаточный член в асимптотическом разложении для $f_{Z_n}(t)$ через L_{sn}, то получим следующую лемму:

Лемма 11. *Если* $\alpha^{(n)} > 0$ *и для какого-нибудь целого* $s \geqslant 3$ *существуют моменты* $\mathbf{M}\,|X_k|^s < \infty$, *то при любом* $0 \leqslant a < \infty$ *в интервале*

$$|t| \leqslant \min\{a \ln^{\frac{1}{2}}(1+L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}),\ L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}\}$$

имеет место разложение

$$f_{Z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_{\nu n}(it)\, L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}} + \Theta_{s,a}(|t|^s + |t|^{3(s-2)})\, L_{sn} + \right.$$

$$\left. + \vartheta_{s,a}|t|\, L_{sn} \ln^{\frac{s-1}{2}}(1+L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}})\right)$$

и для $P_{\nu n}(it)$ *и* L_{sn} *сохраняют силу обозначения и оценки леммы* 10.

Доказательство леммы проще всего получить путем урезания случайных величин X_k, $k=1, 2, \ldots, n$, хотя мы убеждены в том, что уточнив рассуждения доказательства леммы 10 в (3.75), вместо $\tilde{L}_{sn}$ можно поставить просто L_{sn}, без множителя $\left(\ln(1+L_{sn}^{-1})\right)(1+|\ln\ln L_{sn}|)$.

Пусть

$$X_k' = \begin{cases} X_k, & \text{если } |X_k| \leqslant C^{(n)}, \\ 0, & \text{если } |X_k| > C^{(n)}, \end{cases}$$

$$X_k = X_k' + X_k'', \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

$$S_n' = \sum_{k=1}^{n} X_k', \quad S_n'' = \sum_{k=1}^{n} X_k'',$$

где

$$C^{(n)} = \frac{\alpha^{(n)} B_n}{\rho^{(n)}}, \quad \rho^{(n)} = 2\sqrt{2}\, H_6\, a \sqrt{\ln(1+L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}})},$$

$H_6 > 0$ — абсолютная константа, которую определим позже в (3.100).

Для $X'_1, X'_2, \ldots, X'_n$ и S'_n верны выводы леммы 9. Следовательно, при любом целом $\mu \geqslant 3$ в интервале

$$|t| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2H_6}} \frac{\alpha^{(n)} B_n}{C^{(n)}} \tag{3.95}$$

для

$$\ln f_{Z'_n}(t), \quad Z'_n = \frac{S'_n}{B_n}$$

имеет место разложение, аналогичное разложению (3.73):

$$\ln f_{Z'_n}(t) = \sum_{r=3}^{\mu-1} \frac{\Gamma_r\{S'_n\}}{r!} \left(\frac{it}{B_n}\right)^r + \vartheta_\mu \left(\frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)} B_n}\right)^{\mu-2} |t|^\mu, \quad |V_\mu| \leqslant H_7^\mu, \tag{3.96}$$

где $H_7 > 0$ — абсолютная константа потому, что

$$\frac{3}{2} B_n^2 \geqslant \mathbf{D}S'_n \geqslant \frac{1}{2} B_n^2, \tag{3.97}$$

вследствие оценки

$$\mathbf{D}S''_n \leqslant \frac{16}{\alpha^{(n)}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}X''_k = \frac{16}{\alpha^{(n)}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>C^{(n)}} x^2\, dF_{X_k}(x) \leqslant 16 B_n^2 \rho^{(n)k-2} L_{sn} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Ведь мы, не нарушая общности, можем считать, что

$$L_{sn} \leqslant \frac{1}{64\rho^{(n)s-2}},$$

иначе утверждение леммы становится тривиальным.

Далее, при $3 \leqslant r \leqslant s$ для $\Gamma_r\{S'_n\}$ мы можем использовать оценку (3.94):

$$\frac{|\Gamma_r\{S'_n\}|}{(\sqrt{\mathbf{D}S'_n})^r} \leqslant \Theta_r \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}|X'_n|^r}{(\sqrt{\mathbf{D}S'_n})^r}\right)^{\frac{r-2}{s-2}},$$

или, учитывая (3.97), оценку

$$\frac{|\Gamma_r\{S'_n\}|}{B_n^r} \leqslant \Theta_r L_{sn}^{\frac{r-2}{s-2}}, \quad |\Theta_r| \leqslant r!\, H_0^{r-2}, \quad 3 \leqslant r \leqslant s. \tag{3.98}$$

Если $s < r \leqslant \mu$, то сумму S'_n представим в виде

$$S'_n = \sum_{k=1}^{N} Y'_k,$$

где

$$Y'_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} X'_j,$$

а r_k, $k=1, \ldots, N$, определим так же, как и в лемме 10. Очевидно $Y_1, \ldots, Y'_N$ — случайные величины, связанные в цепь Маркова с коэффициентами эргодичности, удовлетворяющими условиям (3.91). Как и в случае (3.92), будем иметь

$$\frac{\Gamma_r |\{S'_n\}|}{B_n^r} = \Theta_r \frac{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{M}\{|Y_k'^r|\}}{B_n^r} = \left[\frac{2C^{(n)}}{\alpha^{(n)}}\right]^{r-s} \frac{1}{B_n^{r-s}} \frac{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{M}\{|Y_k'^s|\}}{B_n^s} \Theta_r =$$

$$= r!\, H_4 H_5^r \frac{L_{sn}}{\rho^{(n)r-s}},$$

потому, что

$$\frac{1}{B_n^s} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{M}\{|Y_k'^s|\} \leqslant \left(\frac{2}{\alpha^{(n)}}\right)^{s-1} \frac{1}{B_n^s} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{M}\{|X'_k|^s\} \leqslant 2^{s-1} L_{sn},$$

а $\Theta_r| \leqslant r!\, H_4 H_5^r$, где $H_4>0$, $H_5>0$ — абсолютные константы.

Значит

$$\sum_{r=s+1}^{\mu} \frac{|t|^r \Gamma_r\{S'_n\}}{B_n^r\, r!} \leqslant H_4 H_5^{s+1} |t|^{s+1} \cdot \frac{L_{sn}}{\rho^{(n)}} \sum_{r=s+1}^{\mu} \left(\frac{|t|\, H_5}{\rho^{(n)}}\right)^{r-s-1} \leqslant$$

$$\leqslant H_4 H_5^{s+1} \frac{|t|^{s+1} L_{sn}}{\rho^{(n)}\left(1-\frac{|t|\, H_5}{\rho^{(n)}}\right)} \leqslant 2 H_4 H_5^{s-1} |t|^{s+1} \rho^{(n)-1} L_{sn}, \tag{3.99}$$

при

$$|t| \leqslant \frac{\rho^{(n)}}{2H_5}.$$

Объединяя (3.95), (3.96), (3.98) и (3.99) находим, что в интервале

$$|t| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}\max\{H_4, H_5\}} \rho^{(n)}$$

при любом целом $\mu \geqslant s$ имеет место разложение

$$\ln f_{Z'_n}(t) = \sum_{r=2}^{s} \frac{\Gamma_r\{S'_n\}}{r!} \left(\frac{it}{B_n}\right)^r + 2\Theta H_4 H_5^{s+1} |t|^{s+1} L_{sn} \rho^{(n)-1} + \Theta H_3^{\mu} |t|^{\mu} \rho^{(n)2-\mu}.$$

Если

$$H_6 = \max\{H_2, H_3, H_4, H_5\}, \tag{3.100}$$

то, очевидно, μ можем выбрать так, чтобы в интервале

$$|t| \leqslant \frac{\rho^{(n)}}{2\sqrt{2}\, H_6} \tag{3.101}$$

выполнялось соотношение

$$\ln f_{Z'_n}(t) = \sum_{r=2}^{s} \frac{\Gamma_r\{S'_n\}}{r!} \left(\frac{it}{B_n}\right)^r + 4\Theta H_6^s |t|^{s+1} L_{sn} \rho^{(n)-1}. \tag{3.101'}$$

(Для этого μ следует выбрать таким, чтобы

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{\mu-2} \leqslant 2H_6^{s-2} L_{sn} \rho^{(n)-1}.\Big)$$

Кроме того, имеем

$$\lambda'_{kn} = \frac{\Gamma_r\{S'_n\}}{B_n^r} = L_{sn}^{\frac{r-2}{s-2}} \Theta_r, \quad 3 \leqslant r \leqslant s,$$

$$\frac{\Gamma_2\{S'_n\}}{B_n^2} = 1 + 24\Theta\rho^{(n)(s-2)} L_{sn}. \tag{3.102}$$

Значит, для $f_{Z'_n}(t)$ в интервале (3.101) имеем место асимптотическое разложение

$$f_{Z'_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-2} P_{\nu n}(it) L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}} + \Theta_s(|t|^{s+1} + |t|^{3(s-1)}) \frac{L_{sn}}{\rho^{(n)}}\right), \tag{3.103}$$

и, как следует из (3.102), коэффициенты многочленов $P_{\nu n}(it)$ равномерно ограничены относительно n.

У нас $S_n = S'_n + S''_n$ и

$$\mathbf{M}|S''_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>C^{(n)}} |x|\, dF_{X_k}(x) \leqslant \frac{\alpha^{(n)s-1} B_n^s}{C^{(n)s-1}} L_{sn} = L_{sn} B_n \rho^{(n)s-1}.$$

Поэтому

$$f_{Z_n}(t) = f_{Z'_n}(t) + \frac{\Theta|t|\mathbf{M}|S''_n|}{B_n} =$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_{\nu n}(it) L_{sn}^{\frac{\nu-2}{s-2}} + \Theta_s(|t|^s + |t|^{3(s-2)}) L_{sn}\right) +$$

$$+ \Theta|t|\rho^{(n)s-1} L_{sn}, \tag{3.103'}$$

при

$$|t| \leqslant \frac{\rho^{(n)}}{2\sqrt{2}H_6}.$$

Для завершения доказательства леммы 11, достаточно вспомнить определение $\rho^{(n)}$.

Лемма 12. *Если при некотором целом $s \geqslant 3$ существуют абсолютные моменты $\mathbf{M}|X_k|^s < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то существует абсолютная константа $c > 0$, такая что в интервале*

$$|t| \leqslant c L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}$$

имеет место оценка

$$|f_{Z_n}(t)| \leqslant e^{-\frac{t^2}{12\pi^2}}.$$

Если $|X_k| \leqslant C^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ с вероятностью 1, то, согласно (3.63), имеем

$$|f_{Z_n}(t)| \leqslant e^{-\frac{t^2}{4}} \tag{3.103''}$$

при

$$|t| \leqslant \frac{1}{H_2} \min\left\{1, \frac{1}{4H_1}\right\} \frac{\alpha^{(n)} B_n}{C^{(n)}}.$$

Заметим, что в этом случае

$$L_{sn}^{-\frac{1}{s-1}} \geqslant \frac{B_n \alpha^{(n)\frac{s-1}{s-2}}}{C^{(n)}}$$

и, так как s можно выбрать любым, то даваемая леммой оценка будет справедливой в интервале

$$|t| \leqslant c \frac{\alpha^{(n)} B_n}{C^{(n)}}.$$

Доказательство. Для любого набора целых чисел

$$1 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_N = n$$

справедливо неравенство

$$|f_{S_n}(t)| \leqslant \|f_{l l_1}(t, \cdot)\| \prod_{p=1}^{N} \sup_{\omega_p} \|f_{l_p l_{p+1}}(t, \omega_p, \cdot)\|. \tag{3.104}$$

Для любого множителя $\|f_{sl}(t, \omega, \cdot)\|$ произведения (3.104) и любого целого r $(r<k<l)$ имеем

$$\|f_{rl}(t, \omega, \cdot)\| = \int_{\Omega_l} \left| \int_{\Omega_k} f_{rk}(t, \omega, d\bar{\omega}) \cdot f_{kl}(t, \bar{\omega}, d\tilde{\omega}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega_l} \int_{\Omega_k} P_k(d\bar{\omega}) |f_{kl}(t, \bar{\omega}, d\tilde{\omega})| + \sup_{A \in F_k} |P_{rk}(\omega, A) - P_k(A)| \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M} |f_{S_{kl}}(t | \tilde{\mathscr{F}}_k \times \tilde{\mathscr{F}}_l) + 1 - \alpha_{rk}.$$

Всегда

$$b \leqslant 1 - \frac{1}{2}(1 - b^2),$$

поэтому находим

$$\mathbf{M} |f_{S_{kl}}(t | \tilde{\mathscr{F}}_k \times \tilde{\mathscr{F}}_l)| \leqslant 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \mathbf{M} |f_{S_{kl}}(t | \tilde{\mathscr{F}}_k \times \tilde{\mathscr{F}}_l)|^2\right)$$

или

$$\sup_{\omega} \|f_{rl}(t, \omega, \cdot)\| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1 - \mathbf{M} |f_{\bar{S}_{kl}}(t | \tilde{\mathscr{F}}_k \times \tilde{\mathscr{F}}_l)|^2\right) + 1 - \alpha_{rk}\right\}.$$

Таким образом, при любом наборе

$$k_1 = 0 < l_1 < k_2 < l_2 \ldots < k_N < l_N = n \tag{3.105}$$

имеем

$$|f_{S_n}(t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \mathbf{M} |f_{S_{k_i l_i}}(t | \tilde{\mathscr{F}}_{k_i} \times \tilde{\mathscr{F}}_{l_i})|^2\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} (1 - \alpha_{l_i k_{i+1}}) \right\}. \tag{3.106}$$

Далее,

$$1-\mathbf{M}\,|f_{S_{k_i l_i}}(t\,|\tilde{\mathscr{F}}_{k_i}\times\tilde{\mathscr{F}}_{l_i})|^2=2\mathbf{M}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{(x-y)}{2}\,t\,dF_{S_{k_i l_i}}\left(x|\tilde{\mathscr{F}}_{k_i}\times\tilde{\mathscr{F}}_{l_i}\right)\times$$

$$\times\, dF_{S_{k_i l_i}}(y\,|\tilde{\mathscr{F}}_{k_i}\times\tilde{\mathscr{F}}_{l_i})\geqslant\frac{t^2}{2}\,\mathbf{M}\iint\limits_{|x-y|\leqslant\frac{\pi}{|t|}}(x-y)^2\,dF_{S_{k_i l_i}}(x\,|\tilde{\mathscr{F}}_{k_i}\times\tilde{\mathscr{F}}_{l_i})\times$$

$$\times\, dF_{S_{k_i}}(y\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{ki}\times\tilde{\mathscr{F}}_{li})\tag{3.107}$$

и

$$R_{k_i l_i}(t)=\mathbf{M}\iint\limits_{|x-y|>\frac{\pi}{|t|}}(x-y)^2\,dF_{S_{k_i l_i}}(x\,|\tilde{\mathscr{F}}_{k_i}\times\tilde{\mathscr{F}}_{li})\times$$

$$\times\, dF_{S_{k_i l_i}}(y|\tilde{\mathscr{F}}_{k_i}\times\tilde{\mathscr{F}}_{l_i})\leqslant 8\,\mathbf{M}\int\limits_{|x|>\frac{\pi}{2|t|}}x^2\,dF_{S_{k_i l_i}}(x|\tilde{\mathscr{F}}_{k_i}\times\tilde{\mathscr{F}}_{li})=$$

$$=8\int\limits_{|x|>\frac{\pi}{2|t|}}x^2\,dF_{S_{k_i l_i}}(x).\tag{3.108}$$

Положим

$$C^{(n)}=d\,\alpha^{(n)}B_n L_{sn}^{\frac{1}{s-2}},$$

$$X'_k=\begin{cases}X_k, & \text{при } |X_k|\leqslant C^{(n)},\\ 0, & \text{если } |X_k|>C^{(n)},\end{cases}$$

$$X''_k=X_k-X'_k,\qquad k=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

$$S'_n=\sum_{k=1}^{n}X'_k,\quad S''_n=\sum_{k=1}^{n}X''_k,\quad B'^2_n=\mathbf{D}\,S'_n.$$

$B''^2_n=\mathbf{D}\,S''_n$, аналогично выводится S_{kl}, S'_{kl}, S''_{kl}. Число d определим позднее.

Мы воспользуемся следующим фактом:

Пусть на пространстве $(\Omega,\,F)$ *с вероятностной мерой* $P\,(A)$ *заданы случайные величины* $Y_1,\,\ldots,\,Y_r$, $S=Y_1+,\ldots,+Y_r$.

Тогда для любого $a>0$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{|x|>a}x^2\,dF_S(x)\leqslant r^2\sum_{k=1}^{r}\int\limits_{|x|>\frac{a}{r}}x^2\,dF_{Y_k}(x).\tag{3.109}$$

Действительно, имеем

$$I=\int\limits_{|x|>a}x^2\,dF_S(x)=\int\limits_{\{\omega:\,|s|>a\}}S^2\,d\mathbf{P}\leqslant r\sum_{k=1}^{r}\int\limits_{\{\omega:\,|S|>a\}}Y_k^2\,d\mathbf{P}.$$

Пусть

$$B_k=\left\{\omega:|Y_k(\omega)|>\frac{a}{r},\quad |Y_\nu(\omega)|<\infty,\quad \nu=1,\ \ldots,\ r,\quad \nu\neq k\right\},$$

$$C_k=\left\{\omega:|Y_k(\omega)|\leqslant\frac{a}{r}\right\}\cap\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq 1}}^{r}\left\{\omega:|Y_\nu(\omega)|>\frac{a}{r}\right\}.$$

Очевидно, что при любом

$$\{\omega:|S|>a\}\subset B_k\,UC_k.$$

Поэтому

$$I\leqslant r\sum_{k=1}^{r}\left(\int_{B_k}Y_k\,d\mathbf{P}+\int_{C_k}\left(\frac{a}{r}\right)^2 d\mathbf{P}\right)\leqslant r\sum_{k=1}^{r}\Bigg(\int_{|x|>\frac{a}{r}}x^2\,dF_{y_k}(x)+$$

$$+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq 1}}^{r}\int_{|x|>\frac{a}{r}}x^2\,dF_{Y_\nu}(x)\Bigg)=r^2\sum_{\nu=1}^{r}\int_{|x|>\frac{a}{r}}x^2\,dF_{Y_\nu}(x).$$

Соотношение (3.109) доказано. С его помощью из (3.108) находим

$$R_{k_i l_i}(t)\leqslant 32\,(R_i'+R_i''),\tag{3.110}$$

$$R_i'=\int_{|x|>\frac{\pi}{4|t|}}x^2\,dF_{S_{k_i l_i}}(x),\quad R_i''=\int_{|x|>\frac{\pi}{4|t|}}x^2\,dF_{S_{k_i l_i}''}(x).$$

Для оценки R_i' воспользуемся леммой 8 и неравенствами (3.67):

$$1-F_{S_{k_i l_i}'}(x)\leqslant\max\left\{e^{-\frac{x^2}{2(1+2H_1)\,\mathbf{D}\,S_{k_i l_i}'}},\ e^{\frac{\alpha^{(n)}}{4H_1C^{(n)}}x}\right\},$$

если

$$0<x<\infty$$

и

$$F_{S_{k_i l_i}'}(x)\leqslant\max\left\{e^{-\frac{x^2}{2(1+2H_1)\,\mathbf{D}\,S_{k_i l_i}'}},\ e^{\frac{\alpha^{(n)}x}{4H_1C^{(n)}}}\right\},$$

при

$$-\infty<x<0.$$

Отсюда легко находим

$$R_i'\leqslant\left(\frac{\pi^2}{8t^2}+2(1+2H_1)\,\mathbf{D}\,S_{k_i l_i}'\right)\exp\left\{-\frac{\pi^2}{32t^2(1+2H_1)\,\mathbf{D}\,S_{k_i l_i}}\right\}+$$

$$+\frac{1}{t^2}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{b}+\frac{8}{b^2}\right)\exp\left\{-\frac{\pi b}{8}\right\},\qquad i=1,\ \ldots,\ N,\tag{3.111}$$

если только

$$|t|\leqslant\frac{\alpha^{(n)}}{4bH_1C^{(n)}}.\tag{3.112}$$

Число $b>0$ также подберем позднее.

Далее, учитывая лемму 6 и определение $C^{(n)}$, находим

$$\sum_{i=1}^{N} R_i'' \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}\, S''_{k_i l_i} \leqslant \frac{16}{\alpha^{(n)}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\, X''_k \leqslant \frac{16}{\alpha^{(n)}} \frac{1}{C^{(n)\, s-2}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\, |X_k|^s \leqslant$$

$$\leqslant 16\, \frac{\alpha^{(n)\, s-2} B_n^s}{C^{(n)\, s-2}}\, L_{sn} = \frac{16 B_n^2}{d^{s-2}}\,. \qquad (3.113)$$

Набор (3.105) мы подберем следующим образом. Пусть l_1 наименьшее из чисел $l \leqslant n$, удовлетворяющих условию $\mathbf{D}\, S_l' \geqslant \frac{1}{a^2 t^2}$, где $0 < a \leqslant \frac{b}{4 H_2}$ также нодберем позднее. Если среди чисел $1, \ldots, n$ такого l найти нельзя, то положим $l = n$. После определения l_i число k_{i+1} определяется равенством

$$k_{i+1} - l_i = \left[\frac{m}{\alpha^{(n)}} + 1\right], \qquad i = 1, \ldots, N-1, \qquad (3.114)$$

где $m > 0$ — некоторое положительное число.

Если же k_i уже определено, то l_i определяется как не превосходящее n целое число, удовлетворяющее условию

$$\mathbf{D}\, S'_{k_i l_i} \geqslant \frac{1}{a^2 t^2}\,, \qquad i = 1, \ldots, N \qquad (3.115)$$

(если такое l_i отсутствует, то считаем $l_i = n$). В интервале (3.112) имеет место неравенство

$$\frac{1}{a^2 t^2} \leqslant \mathbf{D}\, S'_{k_i l_i} \leqslant \frac{4}{a^2 t^2}\,. \qquad (3.116)$$

Действительно, по определению l_i, всегда

$$\mathbf{D}\, S'_{k_i l_i} < \frac{1}{a^2 t^2}\,,$$

значит

$$\mathbf{D}\, S'_{k_i l_i} \leqslant \mathbf{D}\, S'_{k_i l_i - 1} + \mathbf{D}\, X'_{l_i} + 2 \sqrt{\mathbf{D}\, S'_{k_i l_i - 1} \mathbf{D}\, X'_{l_i}} \leqslant \frac{1}{a^2 t^2} +$$

$$+ C^{(n)\,2} + 2\, \frac{C^{(n)}}{a\, |t|} \leqslant \frac{4}{a^2 t^2}\,.$$

Из (3.111) и (3.116) выводим

$$\sum_{i=1}^{N} R_i' \leqslant \left\{ a^2 \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{b} + \frac{8}{b^2} \right) e^{-\frac{\pi}{8} b} + \right.$$

$$\left. + a^2 \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{[8(1+2H_2)}{a^2} \right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{128 (1+2H_2)}} \right\} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}\, S'_{k_i l_i}\,. \qquad (3.114')$$

Из (3.107) и (3.108) находим

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \mathbf{M}\, | f_{S_{k_i l_i}}(t \,|\, \bar{\mathscr{F}}_{k_i}) |^2 \right) = \frac{t^2}{\pi^2} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}\mathbf{D} \{ S_{k_i l_i} \,\bar{\mathscr{F}}_{k_i} \times \bar{\mathscr{F}}_{l_i} \} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{N} R_{k_i l_i}(t) \right\} = \frac{t^2}{\pi^2} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}\, S_{k_i l_i} - \sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}\mathbf{M} \{ S_{k_i l_i} | \bar{\mathscr{F}}_{k_i} \times \bar{\mathscr{F}}_{l_i} \} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{N} R_{k_i l_i}(t) \right\}. \qquad (3.115')$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}\,\mathbf{M}\{S_{k_i l_i} \mid \bar{\mathscr{F}}_{k_i} \times \bar{\mathscr{F}}_{l_i}\} \leqslant 2 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}\,\mathbf{M}\{S'_{k_i l_i} \mid \bar{F}_{k_i} \times \bar{F}_{l_i}\} + 2 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}\, S''_{k_i l_i} \leqslant$$

$$\leqslant 8\, \frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)2}}\, N + \frac{32}{d^{s-2}}\, B_n^2 \leqslant \frac{N}{2 b^2 H_2^2 t^2} + \frac{32}{d^{s-2}}\, B_n^2, \tag{3.116'}$$

так как

$$\mathbf{M}\,\{\, S'_{k_i l_i} - \mathbf{M}\, S_{k_i l_i} \mid \bar{\mathscr{F}}_{k_i} \times \bar{\mathscr{F}}_{l_i} \} \leqslant \frac{2\, C^{(n)}}{\alpha^{(n)}}$$

с вероятностью 1, и $\frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)}} \leqslant \frac{1}{4\, b H_2 \,|t|}$ в силу (3.112).

При $m \geqslant 4$ с помощью леммы 5, находим

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}\, S_{k_i l_i} = \mathbf{D} \left\{ \sum_{i=1}^{N} S_{k_i l_i} \right\} \left(1 + \frac{2\Theta}{3}\right), \tag{3.117}$$

так как в нашем случае

$$1 - \hat{\alpha} \leqslant e^{-4}.$$

Пусть

$$\frac{bH_2}{a} \geqslant 2. \tag{3.118}$$

У нас, согласно лемме 6,

$$\frac{1}{a^2 t^2} \leqslant \mathbf{D}\, S_{k_i l_i} \leqslant \frac{16}{\alpha^{(n)}}\, C^{(n)2}\, (l_i - k_i),$$

поэтому, учитывая (3.112) и (3.118), получаем

$$l_i - k_i \geqslant \frac{b^2 H_2^2}{a^2\, \alpha^{(n)}} \geqslant \frac{4}{\alpha^{(n)}},$$

следовательно, как и в случае (3.117), находим

$$\mathbf{D} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} S_{l_i k_{i+1}} \right\} = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{D}\, S_{l_i k_{i+1}} \left(1 + \frac{2}{3}\, \Theta\right) \leqslant \frac{5}{3} \left(2 \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{D}\, S'_{l_i k_{i+1}} + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{D}\, S''_{l_i k_{i+1}} \right) \leqslant \frac{5\,(m+1)^2}{3\, \alpha^{(n)2}}\, C^{(n)2} N + \frac{5 \cdot 32}{3}\, \frac{B_n^2}{d^{s-2}} \leqslant \frac{B_n^2}{36}, \tag{3.119}$$

если

$$\frac{5\,(m+1)^2 N}{16\, b^2 H_2^2 B_n^2 t^2} + \frac{160}{3\, d^{s-2}} \leqslant \frac{1}{36}. \tag{3.120}$$

Мы покажем, что a, b, d и m можно выбрать так, чтобы неравенство (3.120) выполнилось.

В силу (3.119) имеем

$$B_n^2 = \mathbf{D} \left\{ \sum_{i=1}^{N} S_{k_i l_i} + \sum_{i+1}^{N} S_{l_i k_{i+1}} \right\} = \mathbf{D} \left\{ \sum_{i=1}^{N} S_{k_i l_i} \right\} \left(1 + \frac{\Theta}{2}\right), \tag{3.121}$$

или, согласно (3.117)

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}\, S_{k_i l_i} = B_n^2 \left(1 + \frac{\Theta}{2}\right) \left(1 + \frac{2}{3}\, \Theta'\right). \tag{3.122}$$

Из (3.122) находим оценку для N:

$$\frac{N}{a^2 t^2} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}\, S_{k_i l_i} \leqslant \frac{5}{2} B_n^2$$

или

$$N \leqslant \frac{5a^2}{2} t^2 B_n^2, \tag{3.123}$$

поэтому для выполнения (3.120) достаточно, чтобы

$$\frac{25(m+1)^2 a^2}{32 b^2 H_2^2} + \frac{160}{3 d^{s-2}} \leqslant \frac{1}{36}. \tag{3.124}$$

Далее, если

$$\frac{160 a^2}{2} \left\{ \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{b} + \frac{8}{b^2} \right) e^{-\frac{\pi}{8} b} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{8(1+2H_1)}{a^2} \right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{128(1+2H_1)}} + \frac{2^9}{d^{s-2}} \right\} \leqslant \frac{1}{36}, \tag{3.125}$$

то из (3.110), (3.113), (3.114) и (3.122) получаем

$$\sum_{i=1}^{N} R_{k_i l_i}(t) \leqslant \frac{B_n^2}{36}. \tag{3.126}$$

Учитывая (3.116), (3.123), (3.124), получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}\,\mathbf{M} \{ S_{k_i l_i} | \tilde{\mathscr{F}}_{k_i} \times \bar{\mathscr{F}}_{l_i} \} \leqslant \frac{1}{36} B_n^2. \tag{3.127}$$

Осталось оценить $\sum\limits_{i=1}^{N} (1-\alpha_{l_i k_{i+1}})$, но это легко сделать, зная $k_{i+1}-l_i$ и оценку для N. Получим

$$\sum_{i=1}^{N-1} (1-\alpha_{l_i k_{i+1}}) \leqslant N e^{-m} \leqslant \frac{5}{2} a^2 e^{-m} t^2 B_n^2 \leqslant \frac{1}{36\pi^2} t^2 B_n^2 \tag{3.128}$$

при условии, что

$$a^2 e^{-m} \leqslant \frac{1}{90\pi^2}. \tag{3.129}$$

Нам осталось подобрать a, b, d, m так, чтобы выполнялись неравенства (3.118), (3.124), (3.125), (3.129) и $0 < a \leqslant \frac{b}{4H_2}$. Легко заметить, что такие a, b, d и m подобрать возможно. Достаточно, например, положить

$$a = 2^5(1+2H_1), \quad b = \frac{2^6(1+4H_2)}{\min\{1, H_2\}},$$

$$d = 2^{\frac{12}{s-2}}, \quad m = 2\ln a + \ln 90\pi^2.$$

Следует вспомнить, что H_1 и H_2—абсолютные константы из леммы 13. Предложенные значения для a, b, d и m, очевидно, очень грубые. К сожалению, нахождение оптимальных констант требует сложных, грамоздких выкладок, и мы их здесь не приводим.

После всего сказанного, из (3.106), (3.115), (3.122), (3.126), (3.127), (3.128) и (3.112), вспомнив определение $C^{(n)}$, находим

$$|f_{S_n}(t)| \leqslant e^{\frac{t^2}{12\pi^2} B_n^2}$$

при

$$|t| \leqslant \frac{L_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}}{4\, b d H_3 B_n}.$$

Лемма доказана.