X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1970

УДК–518.9

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЛАНЧЕСТЕРА

А. Н. ЛЯПУНОВ

§ 1. Постановка задачи

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \alpha u x - \beta (1-v) y,$$
$$\dot{y} = -\gamma (1-u) x + \delta v y \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

где α, β, γ, δ – неотрицательные коэффициенты.

Пара функций $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, заданных в области

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad t \geqslant 0,$$

называется допустимой, если эти функции кусочно непрерывны, удовлетворяют условию

$$0 \leqslant u(x, y, t) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant v(x, y, t) \leqslant 1, \tag{3}$$

и задача (1), (2) имеет единственное решение. Так, например, функции u' и v', зависящие только от t и имеющие вид

$$u'(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant t < t_1, \\ 0, & \text{если } t_1 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

$$v'(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant t < t_2, \\ 0, & \text{если } t_2 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

образуют допустимую пару для любых t_1, t_2, где $T > 0$ – заданное число. Классы таких функций u', v' обозначим соответственно через U', V'.

В качестве множеств стратегий игроков I и II мы берем любые такие множества U и V, что множество $U \times V$ состоит из допустимых пар и, кроме того, $U \supset U'$, $V \supset V'$. Ниже мы увидим, что этот произвол в выборе множеств U и V не влияет на решение игры.

В качестве функции выигрыша берется функционал

$$I(u, v) = \varphi_0 x(T) - \psi_0 y(T), \tag{4}$$

где $\varphi_0 \geqslant 0$, $\psi_0 \geqslant 0$ – заданные числа. Построенную игру обозначим через Γ.

Эта игра имеет следующую интерпретацию. $x(t)$ и $y(t)$ – ресурсы в момент t соответственно игроков I и II, u – доля ресурсов игрока I, выделенная для воспроизводства своих ресурсов; соответственно, $1-u$ есть доля ресурсов, выделенная для уничтожения ресурсов противника. Аналогичный смысл имеет стратегия v игрока II. Если предположить, что скорость изменения ресурсов x и y пропорциональна как количеству ресурсов, выделенных на их воспроизводство, так и количеству ресурсов, выделенных на их уничтожение, то получим, что изменение ресурсов во времени описывается системой (1). В качестве выигрыша игрока I выбирается взвешенная разность ресурсов в конечный момент времени.

Если следовать данной интерпретации, то мы должны предполагать, что для всех $0 \leqslant t \leqslant T$

$$x(t) \geqslant 0, \quad y(t) \geqslant 0. \tag{5}$$

Однако, во многих случаях ресурсы могут оказаться отрицательными. Поэтому мы отказываемся от условия (5), отвлекаясь от физического смысла величин x и y.

В заключение мы укажем на такую модификацию функции выигрыша, при которой в ситуации равновесия отрицательных значений ресурсов не появляется.

§ 2. Необходимые условия оптимальности

Приводимые ниже условия оптимальности получаются в результате распространения на дифференциальные игры принципа максимума Понтрягина [1]. Формулировка и вывод этих условий для дифференциальных игр, основанный на вариационном исчислении, содержится в [2].

Для рассматриваемой игры Г необходимые условия оптимальности состоят в следующем. Составим функцию

$$\bar{H}(x, y, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, u, v) = \left(\alpha u x - \beta(1-v)y\right)\bar{\varphi} + \left(-\gamma(1-u)x + \delta v y\right)\bar{\psi},$$

где $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ удовлетворяют системе, сопряженной к (1):

$$\dot{\bar{\varphi}} = -\alpha u\bar{\varphi} + \gamma(1-u)\bar{\psi},$$

$$\dot{\bar{\psi}} = \beta(1-v)\bar{\varphi} - \delta v\bar{\psi},$$

и начальным условиям

$$\bar{\varphi}(T) = \varphi_0, \quad \bar{\psi}(T) = -\psi_0.$$

Положим

$$\varphi(t) = \bar{\varphi}(T-t), \quad \psi(t) = -\bar{\psi}(T-t).$$

Тогда φ и ψ удовлетворяют системе

$$\dot{\varphi} = \alpha u\varphi + \gamma(1-u)\psi,$$

$$\dot{\psi} = \beta(1-v)\varphi + \delta v\psi \tag{6}$$

и начальным условиям

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \psi(0) = \psi_0. \tag{7}$$

Положим

$$H(x, y, \varphi, \psi, u, v) = \ddot{H}(x, y, \varphi, -\psi, u, v) =$$
$$= (\alpha u\varphi + \gamma(1-u)\psi)x - (\beta(1-v)\varphi + \delta v\psi)y. \tag{8}$$

Оптимальные стратегии u^*, v^* должны быть таковы, что при фиксированных x, y, φ, ψ достигается величина

$$H(x, y, \varphi, \psi, u^*, v^*) = \max_{0\leq u\leq 1}\min_{0\leq v\leq 1} H = \min_{0\leq v\leq 1}\max_{0\leq u\leq 1} H. \tag{9}$$

Из вида (8) функции H следует, что вдоль оптимальной траектории $x^*(t)$, $y^*(t)$, $\varphi^*(t)$, $\psi^*(t)$ оптимальные стратегии $u^*(t)$, $v^*(t)$ удовлетворяют условиям:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha\varphi^*(T-t)x^*(t) < \gamma\psi^*(T-t)x^*(t), \\ 1, & \text{если } \alpha\varphi^*(T-t)x^*(t) > \gamma\psi^*(T-t)x^*(t), \end{cases}$$

$$v^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta\varphi^*(T-t)y^*(t) > \delta\psi^*(T-t)y^*(t), \\ 1, & \text{если } \beta\varphi^*(T-t)y^*(t) < \delta\psi^*(T-t)y^*(t). \end{cases} \tag{10}$$

Из этих условий следует, что φ^*, ψ^* удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\varphi}^*(t) = \begin{cases} \min\left(\alpha\varphi^*(t), \gamma\psi^*(t)\right), & \text{если } x^*(T-t) < 0, \\ \max\left(\alpha\varphi^*(t), \gamma\psi^*(t)\right), & \text{если } x^*(T-t) > 0, \end{cases}$$

$$\dot{\psi}^*(t) = \begin{cases} \min\left(\beta\varphi^*(t), \delta\psi^*(t)\right), & \text{если } y^*(T-t) < 0, \\ \max\left(\beta\varphi^*(t), \delta\psi^*(t)\right), & \text{если } y^*(T-t) > 0. \end{cases} \tag{11}$$

Обозначим через $W(x, y, t)$ значение игры Γ, начинающейся в точке (x, y) и имеющей продолжительность t. Как показано в [2], $W(x, y, t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$W_t = \max_{0\leq u\leq 1}\min_{0\leq v\leq 1}\left[\left(\alpha ux - \beta(1-v)y\right)W_x + \left(-\gamma(1-u)x + \delta vy\right)W_y\right], \tag{12}$$

$$W(x, y, 0) = \varphi_0 x - \psi_0 y. \tag{13}$$

Уравнение (12) можно записать следующим образом:

$$W_t = \max(\alpha xW_x, -\gamma xW_y) - \max(\beta yW_x, -\delta yW_y). \tag{12'}$$

§ 3. Доказательство существования решения в игре Г

Существование решения в игре Γ будет доказано сведением ее к некоторой более простой игре Γ' Для этого нам потребуется несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть* $(u, v)\in U\times V$ – *произвольная ситуация,* $x(t)$, $y(t)$ – *соответствующее решение задачи* (1), (2), *а* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – *решение задачи* (6), (7). *Тогда*

$$I(u, v) = \varphi_0 x(T) - \psi_0 y(T) = \varphi(T)x_0 - \psi(T)y_0. \tag{14}$$

Доказательство. Дифференцируя по t выражение

$$z(t)=\varphi(t)\,x(T-t)-\psi(t)\,y(T-t)$$

и учитывая уравнения (1) и (6), убеждаемся, что в точках непрерывности его производная равна нулю. Отсюда следует, что $z(t)$ постоянна и, в частности, $z(0)=z(T)$.

Лемма 2. *Пусть $(u, v)\in U\times V$ — произвольная ситуация, а $x(t)$, $y(t)$ — соответствующее решение задачи* (1), (2). *Тогда, если $x_0\leqslant 0$, $y_0>0$, то для всех $t\geqslant 0$ $x(t)\leqslant x_0$, $y(t)\geqslant y_0$. Если $x_0>0$, $y_0\leqslant 0$, то для всех $t\geqslant 0$ $x(t)\geqslant x_0$, $y(t)\leqslant y_0$.*

Доказательство. Пусть $x_0\leqslant 0$, $y_0>0$. Тогда из системы (1) видно, что для всех $t\geqslant 0$ $\dot x\leqslant 0$, $\dot y\geqslant 0$. Аналогично доказывается вторая часть леммы.

Следствие. *Пусть $x_0>0$, $y_0>0$* и *$T>0$. Тогда возможны лишь следующие случаи*:

1) *для всех $0\leqslant t\leqslant T$ $x(t)\geqslant 0$, $y(t)\geqslant 0$;*

2) *для всех $0\leqslant t\leqslant T$ $x(t)>0$ и существует такая точка t_0, $0<t_0<T$, что*

$$y(t)\begin{cases}\geqslant 0, & \text{если } 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ <0, & \text{если } t_0<t\leqslant T;\end{cases}$$

3) *для всех $0\leqslant t\leqslant T$ $y(t)>0$ и существует такая точка t_0, $0<t_0<T$, что*

$$x(t)\begin{cases}\geqslant 0, & \text{если } 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ <0, & \text{если } t_0<t\leqslant T.\end{cases}$$

Определим игру Γ' следующим образом. Стратегиями игроков I и II являются точки промежутка $[0, T]$. Функция выигрыша $K(t_1, t_2)$ определяется следующим образом. Рассмотрим систему:

$$\dot\varphi=\begin{cases}\min(\alpha\varphi,\gamma\psi), & \text{если } 0\leqslant t<t_1,\\ \max(\alpha\varphi,\gamma\psi), & \text{если } t_1\leqslant t\leqslant T,\end{cases}$$

$$\dot\psi=\begin{cases}\min(\beta\varphi,\delta\psi), & \text{если } 0\leqslant t<t_2,\\ \max(\beta\varphi,\delta\psi), & \text{если } t_2\leqslant t\leqslant T,\end{cases}\tag{15}$$

с начальными условиями (7). Тогда

$$K(t_1, t_2)=x_0\varphi(T)-y_0\psi(T).\tag{16}$$

Теорема 1. *Игра Γ имеет решение в чистых стратегиях тогда и только тогда, когда имеет решение в чистых стратегиях игра Γ', при этом*

$$\mathrm{val}\,\Gamma=\mathrm{val}\,\Gamma'.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что ввиду леммы 1 игра Γ эквивалентна игре с функцией выигрыша

$$I(u, v)=x_0\,\varphi(T)-y_0\,\psi(T),$$

где φ и ψ — решение задачи (6), (7) в ситуации (u, v).

Каждой ситуации $(u, v)\in U\times V$ поставим в соответствие ситуацию (u', v'), определяемую равенствами

$$\dot\varphi=u'\min(\alpha\varphi,\gamma\psi)+(1-u')\max(\alpha\varphi,\gamma\psi),$$

$$\dot\psi=v'\min(\beta\varphi,\delta\psi)+(1-v')\max(\beta\varphi,\delta\psi),\tag{17}$$

причем

$$0 \leqslant u' \leqslant 1, \quad 0 \leqslant v' \leqslant 1.$$

Пусть $\bar{u}'$, $\bar{v}'$ — оптимальные стратегии. Тогда из (11) следует, что вдоль оптимальной траектории $\bar{u}'$, $\bar{v}'$ удовлетворяют условиям:

$$\bar{u}'(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x^*(T-t) < 0, \\ 0, & \text{если } x^*(T-t) > 0, \end{cases}$$

$$\bar{v}'(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } y^*(T-t) < 0, \\ 0, & \text{если } y^*(T-t) > 0. \end{cases} \tag{18}$$

На основании следствия из леммы 2 заключаем, что оптимальные стратегии имеют вид:

$$u'(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant t < t_1, \\ 0, & \text{если } t_1 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

$$v'(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant t < t_2, \\ 0, & \text{если } t_2 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{19}$$

для некоторых t_1, t_2, причем либо $t_1 = 0$, либо $t_2 = 0$. Классы стратегий вида (19) мы обозначили через U', V'. Очевидно, для любой ситуации $(u', v') \in U' \times V'$ φ и ψ удовлетворяют системе (15).

Пусть теперь $u \in U$ — произвольная стратегия игрока I и

$$I(u, \bar{v}) \min_{v \in V} I(u, v).$$

Применяя к этой задаче минимизации необходимые условия оптимальности и повторяя рассуждения, в результате которых были получены равенства (19), убеждаемся, что $\bar{v} \in V'$. Аналогично, если $v \in V$ — произвольная стратегия игрока II и

$$I(\bar{u}, v) = \max_{u \in U} I(u, v),$$

то $\bar{u} \in U'$. Теорема теперь вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть $I(u, v)$ — функционал, определенный на $U \times V$, где U и V — произвольные множества, а $U' \subset U$, $V' \subset V$ — их подмножества. Пусть для любого $v \in V$*

$$\{u \mid I(u, v) = \max_{u \in U} I(u, v)\} \subset U', \tag{20}$$

и для любого $u \in U$

$$\{v \mid I(u, v) = \min_{v \in V} I(u, v)\} \subset V'. \tag{21}$$

Тогда, для того чтобы функционал I имел седловую точку в $U \times V$, необходимо и достаточно, чтобы он имел седловую точку в $U' \times V'$.

Доказательство. Пусть

$$\max_{u \in U} \min_{v \in V} I(u, v) = \min_{v \in V} \max_{u \in U} I(u, v) = I(u^*, v^*).$$

Из (20) и (21) следует, что $u^* \in U'$, $v^* \in V'$ и при этом

$$\max_{u \in U} I(u, v^*) = \max_{u \in U'} I(u, v^*) = I(u^*, v^*),$$

$$\min_{v \in V} I(u^*, v) = \min_{v \in V'} I(u^*, v) = I(u^*, v^*),$$

т. е. (u^*, v^*) — седловая точка I в $U' \times V'$ Аналогично доказывается достаточность.

Теорема 2. *Функция $K(t_1, t_2)$ имеет седловую точку.* Для доказательства нам потребуется несколько лемм.

Пусть дана система

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), \text{ если } 0 \leqslant t < t_1, \\ f_2(x), \text{ если } t_1 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{22}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x^0, \tag{23}$$

где x — n-мерный вектор, $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывные, кусочно-дифференцируемые функции, в каждой точке имеющие производные по любому направлению и удовлетворяющие условию Липшица. При этих условиях задача (22), (23) имеет единственное решение. Обозначим его через $x(t_1, T)$ $(t_1 \leqslant T)$ и положим

$$y(t_1, T) = \frac{\partial x(t_1, T)}{\partial t_1} \tag{24}$$

Лемма 4. *При указанных условиях и при фиксированном t_1 и $T \geqslant t_1$ y есть решение следующей задачи:*

$$\frac{dy}{dT} = \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}\right]_{x(t_1, T)} \cdot y, \tag{25}$$

$$y(t_1, t_1) = f_1\Big(x(t_1, t_1)\Big) - f_2\Big(x(t_1, t_1)\Big), \tag{26}$$

где $\left[\frac{\partial f_2}{\partial x}\right]_{x(t_1, T)}$ — матрица частных производных f_2 по x, вычисленных в точке $x(t_1, T)$.

Доказательство. Имеем

$$x(t_1, T) = x^0 + \int_0^{t_1} f_1\Big(x(t)\Big)dt + \int_{t_1}^{T} f_2\Big(x(t_1, t)\Big)dt. \tag{27}$$

Дифференцируя по t_1, получим

$$y(t_1, T) = f_1\Big(x(t_1, t_1)\Big) - f_2\Big(x(t_1, t_1)\Big) + \int^{T} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}\right]_{x(t_1, t)} \cdot y(t_1, t)\,dt.$$

Полагая в этом равенстве $T = t_1$, получим (26), а дифференцируя его по T, получим (25).

Лемма 5. *Пусть z^0 — n-мерный вектор, а*

$$F(t_1, T) = \Big(z^0, x(t_1, T)\Big) \tag{28}$$

Тогда

$$\frac{\partial F(t_1, T)}{\partial t_1} = \left(z(T-t_1),\ f_1\left(x(t_1, t_1)\right) - f_2\left(x(t_1, t_1)\right)\right), \tag{29}$$

где $z(t)$ — *решение задачи*:

$$\dot z(t) = \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}\right]_{x(t_1, T-t)} \cdot z(t),$$

$$z(0) = z^0. \tag{30}$$

Доказательство. Ввиду (24)

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \left(z^0, y(t_1, T)\right)$$

Мы покажем, что для любого $t_1 \leqslant t \leqslant T$

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \left(z(T-t), y(t_1, t)\right) \tag{31}$$

Полагая в этом тождестве $t = t_1$ и учитывая (26), получим (29).

Правая часть (31) как функция t непрерывна и кусочно-дифференцируема. Дифференцируя ее по t и используя уравнения (25) и (30), получим, что в точках непрерывности ее производная равна нулю.

Доказательство теоремы 2. Функция $K(t_1, t_2)$ очевидно непрерывна. Вычислим $\frac{\partial K}{\partial t_1}$. Для этого применим лемму 5, в которой положим

$$z^0 = (x_0, -y_0),\quad x = (\varphi, \psi),\quad z(t) = \left(x(t), -y(t)\right),$$

$$f_1^1(\varphi, \psi) = \min(\alpha\varphi, \gamma\psi),\quad f_2^1(\varphi, \psi) = \max(\alpha\varphi, \gamma\psi),$$

$$f_1^2(\varphi, \psi) = f_2^2(\varphi, \psi) = \begin{cases} \min(\beta\varphi, \delta\psi), & \text{если } 0 \leqslant t < t_2, \\ \max(\beta\varphi, \delta\psi), & \text{если } t_2 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Здесь функции f_1^2 и f_2^2 разрывны в точке t_2. Однако лемма 4, а следовательно, и лемма 5 применимы и в этом случае, что можно установить, рассматривая тот из промежутков $[0, t_2]$ или $[t_2, T]$, который содержит точку t_1.

Пусть $t_1 \neq t_2$. Тогда, согласно (29)

$$\frac{\partial K}{\partial t_1} = x(T-t_1)\left[\min\left(\alpha\varphi(t_1), \gamma\psi(t_1)\right) - \max\left(\alpha\varphi(t_1), \gamma\psi(t_1)\right)\right], \tag{32}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — решение задачи (1), (2) при некоторых $(u, v) \in U \times V$ По следствию из леммы 2 $x(T-t_1)$, при изменении t_1 от 0 до T, меняет знак не более одного раза, причем с минуса на плюс. Так как выражение в квадратных скобках в правой части (32) неположительно, $\max\limits_{0 \leqslant t_1 \leqslant T} K(t_1, t_2)$ при любом t_2 достигается на выпуклом множестве.

Аналогично, $\min\limits_{0 \leqslant t_2 \leqslant T} K(t_1, t_2)$ при любом t_1 достигается на выпуклом множестве. По теореме Какутани о неподвижной точке отсюда следует наличие седловой точки у функции $K(t_1, t_2)$ *).

---

*) По поводу применения теоремы Какутани к доказательству существования седловой точки см., напр., [3], стр. 42.

§ 4. Пример

Мы рассмотрим случай, когда коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\alpha > \lambda = \sqrt{\beta\gamma} > \delta, \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma > 0, \tag{33}$$

а φ_0, ψ_0 находятся в области

$$\beta\varphi_0 - \delta\psi_0 \geqslant 0. \tag{34}$$

Ввиду (33) отсюда следует, что

$$\alpha\varphi_0 - \gamma\psi_0 > 0. \tag{35}$$

Решая систему

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \max(\alpha\varphi, \gamma\psi), \\ \dot{\psi} &= \max(\beta\varphi, \delta\psi), \end{aligned} \tag{36}$$

получим

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 e^{\alpha t}, \\ \psi &= \frac{\beta\varphi_0}{\alpha} e^{\alpha t} + \frac{\alpha\psi_0 - \beta\varphi_0}{\alpha}, \end{aligned} \tag{37}$$

или

$$\beta\varphi - \alpha\psi = \beta\varphi_0 - \alpha\psi_0. \tag{38}$$

В силу неравенства $\alpha > \delta$ (33) эта траектория не выходит из области (34), так что в этой области система (36) переключений не имеет.

Пусть $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Тогда при малых T $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ для $0 \leqslant t \leqslant T$. В этом случае из необходимых условий оптимальности следует, что для всех $0 \leqslant t \leqslant T$

$$u^* = 1, \quad v^* = 0. \tag{39}$$

Для этих u^* и v^* решение задачи (1), (2) следующее:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha x_0 - \beta y_0}{\alpha} e^{\alpha t} + \frac{\beta y_0}{\alpha}, \\ y &= y_0. \end{aligned} \tag{40}$$

Поэтому, если

$$\alpha x_0 - \beta y_0 \geqslant 0, \tag{41}$$

то для всех T $x(T) > 0$, $y(T) > 0$ и, следовательно, задача решена для всех T.

Пусть теперь

$$\alpha x_0 - \beta y_0 < 0. \tag{42}$$

Тогда x обращается в нуль в точке

$$T(x_0, y_0) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\beta y_0}{\beta y_0 - \alpha x_0} \tag{43}$$

Следовательно, решение сохраняет прежний вид лишь для

$$T \leqslant T(x_0, y_0). \tag{44}$$

Рассмотрим случай

$$T > T(x_0, y_0). \tag{45}$$

В этом случае $x(T)<0$, $y(T)>0$. Решая систему

$$\dot{\varphi}=\min(\alpha\varphi, \gamma\psi),$$
$$\dot{\psi}=\max(\beta\varphi, \delta\psi), \tag{46}$$

получим

$$\varphi=\frac{1}{2\lambda}\left[(\lambda\varphi_0+\gamma\psi_0)e^{\lambda t}+(\lambda\varphi_0-\gamma\psi_0)e^{-\lambda t}\right],$$
$$\psi=\frac{1}{2\lambda}\left[(\lambda\psi_0+\beta\varphi_0)e^{\lambda t}+(\lambda\psi_0-\beta\varphi_0)e^{-\lambda t}\right], \tag{47}$$

откуда

$$\beta\varphi^2-\gamma\psi^2=\beta\varphi_0^2-\gamma\psi_0^2. \tag{48}$$

Ветвь этой гиперболы, проходящая через точку (φ_0, ψ_0), имеет асимптотой прямую

$$\lambda\varphi-\gamma\psi=0, \tag{49}$$

которая, ввиду неравенства $\lambda>\delta$ (33), лежит в области (34). Следовательно, решение системы (46) также не выходит из этой области.

Итак, в случае одновременного выполнения неравенств (42) и (45) оптимальные стратегии таковы:

$$u^*(t)=\begin{cases}1, \text{ если } 0\leqslant t<T(x_0, y_0),\\ 0, \text{ если } T(x_0, y_0)\leqslant t\leqslant T,\end{cases} \tag{50}$$
$$v^*(t)=0 \text{ для всех } 0\leqslant t\leqslant T,$$

а оптимальная траектория такова:

$$x^*(t)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x_0-\beta y_0}{\alpha}e^{\alpha t}+\dfrac{\beta y_0}{\alpha}, & \text{если } t\leqslant T(x_0, y_0),\\ \dfrac{\beta y_0}{2\lambda}\left[e^{-\lambda(t-T(x_0, y_0))}-e^{\lambda(t-T(x_0, y_0))}\right], & \text{если } t\geqslant T(x_0, y_0),\end{cases}$$

$$y^*(t)=\begin{cases}y_0, & \text{если } t\leqslant T(x_0, y_0),\\ \dfrac{y_0}{2}\left[e^{-\lambda(t-T(x_0, y_0))}+e^{\lambda(t-T(x_0, y_0))}\right], & \text{если } t\geqslant T(x_0, y_0).\end{cases}$$

Объединяя все случаи, получаем:

$$u^*(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x>0,\\ 0, \text{ если } x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$v^*(y)=\begin{cases}0, \text{ если } y>0,\\ 1, \text{ если } y\leqslant 0.\end{cases}$$

§ 5. Другие постановки задачи

1. Момент окончания игры T определяется следующим образом:

$$T=\min\{t \mid x(t)\,y(t)=0\}. \tag{51}$$

Если $T<\infty$, то функция выигрыша определяется формулой (4), если же $T=\infty$, то полагаем

$$I(u, v)=0. \tag{52}$$

Легко видеть, что оптимальных стратегий в этой игре не существует, а значение игры равно либо $+\infty$, либо $-\infty$.

Действительно, пусть существует ситуация равновесия (u^*, v^*), для которой $T<\infty$. Пусть для определенности

$$x(T)>0, \quad y(T)=0.$$

Тогда

$$I(u^*, v^*)=\varphi_0 x(T).$$

Возьмем $\delta>0$ и $T_1>T-\delta$ и определим стратегию $\bar{u}$ игрока I следующим образом:

$$\bar{u}=\begin{cases} u^*, & \text{если } 0\leqslant t<T-\delta, \\ 1, & \text{если } T-\delta\leqslant t<T_1, \\ 0, & \text{если } T_1\leqslant t\leqslant T', \end{cases}$$

где T' — момент окончания игры в ситуации $(\bar{u}, v^*)$.

Ввиду непрерывной зависимости решения системы (1) от начальных данных для любого $\varepsilon>0$ δ можно выбрать так, что для $T-\delta\leqslant t\leqslant T'$ будет выполнено неравенство

$$y(t)\leqslant\varepsilon.$$

Поэтому $x(T')$ будет сколь угодно мало отличаться от величины

$$x(T)\,e^{\alpha(T'-T)}, \tag{53}$$

где $x(T)$ — решение системы (1), соответствующее ситуации (u^*, v^*). Следовательно, $I(\bar{u}, v^*)$ будет сколь угодно мало отличаться от величины (53). Значит, если T_1 достаточно велико, то

$$I(\bar{u}, v^*)>I(u^*, v^*).$$

2. Игра Γ_1. Момент окончания игры T определяется следующим образом:

$$T=\min\left\{\min\{t \mid x(t)\,y(t)=0\},\ T_1\right\}, \tag{54}$$

где T_1 — заданное число, а $I(u, v)$ определяется формулой (4).

Теорема 3. *В игре Γ_1 в ситуации равновесия $T=T_1$.*

Доказывается этот факт аналогично утверждению из п. 1.

В некоторых случаях в игре Γ_1 могут существовать лишь ε-оптимальные стратегии.

3. Игра Γ_2. Момент окончания игры T задан, а функция выигрыша такова:

$$\bar{I}(u, v)=\varphi_0 x^+(T)-\psi_0 y^+(T), \tag{55}$$

где x^+ — положительная часть x.

Теорема 4. 1. *В игре Γ_2, если $x_0\geqslant 0$, $y_0\geqslant 0$, то в ситуации равновесия для всех $0\leqslant t\leqslant T$ $x^*(t)\geqslant 0$, $y^*(t)\geqslant 0$.*

2. *Если существует* $\operatorname{val}\Gamma_2$, *то существуют и оптимальные стратегии.*

3. *Если существует* $\operatorname{val}\Gamma_1$, *то существует и* $\operatorname{val}\Gamma_2$, *и обратно; при этом* $\operatorname{val}\Gamma_1=\operatorname{val}\Gamma_2$.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 6. *Если либо* $x_0 \leqslant 0$, $y_0 > 0$, *либо* $x_0 > 0$, $y_0 \leqslant 0$, *то ситуация*

$$u^* \equiv v^* \equiv 1$$

является ситуацией равновесия в игре Γ_2.

Доказательство. Пусть для определенности $x_0 \leqslant 0$, $y_0 > 0$. Покажем, что для любых стратегий $u \in U$, $v \in V$

$$\bar{I}(u^*, v) \geqslant \bar{I}(u, v). \tag{56}$$

По лемме 2 в любой ситуации $(u, v) \in U \times V$ для всех t

$$x(t) \leqslant 0, \quad y(t) > 0, \tag{57}$$

поэтому

$$\bar{I}(u^*, v) = -\psi_0 \bar{y}(T), \quad \bar{I}(u, v) = -\psi_0 y(T),$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ – решение задачи (1), (2) в ситуации (u^*, v), а x, y – решение той же задачи в ситуации (u, v). Поэтому (56) эквивалентно неравенству

$$\bar{y}(T) \leqslant y(T). \tag{58}$$

Так как

$$\dot{\bar{y}} = \delta v \bar{y},$$

$$\dot{y} = -\gamma(1-u)x + \delta v y,$$

и при $x \leqslant 0$, $y > 0$

$$-\gamma(1-u)x + \delta v y \geqslant \delta v y,$$

неравенство (58) следует из теоремы о сравнении решений для дифференциальных уравнений.

Покажем теперь, что для любой стратегии $v \in V$

$$\bar{I}(u^*, v^*) \leqslant \bar{I}(u^*, v), \tag{59}$$

или, что эквивалентно,

$$y^*(T) \geqslant \bar{y}(T), \tag{60}$$

где x^*, y^* и $\bar{x}$, $\bar{y}$ – решения задачи (1), (2) соответственно в ситуациях (u^*, v^*) и (u^*, v). Имеем

$$\dot{y}^* = \delta y^*, \quad \dot{\bar{y}} = \delta v \bar{y},$$

и при $y \geqslant 0$

$$\delta y \geqslant \delta v y.$$

Как и выше, неравенство (60) следует из теоремы о сравнении.

Из (59) и (56) следует, что (u^*, v^*) – седловая точка. Аналогично рассматривается второй случай.

Доказательство теоремы 4. 1. Сразу следует из леммы 6.

2. Пусть x_ε, y_ε – ε-оптимальная траектория. Ввиду компактности множества ε-оптимальных траекторий для $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon > 0$, при $\varepsilon \to 0$ существует предельная траектория x^*, y^*. Из п. 1 следует, что для всех $0 \leqslant t \leqslant T$ $x^* \geqslant 0$, $y^* \geqslant 0$. Если для $0 \leqslant t \leqslant T$ $x^* > 0$, $y^* > 0$, то стратегии (10), оптимальные в игре Γ, яв-

ляются оптимальными и в игре Γ_2. Этот факт следует из существования val Γ_2 и равенства

$$I(u^*, v^*) = \bar{I}(u^*, v^*).$$

Пусть, например,

$$x^*(t) \begin{cases} >0, \text{ если } 0 \leqslant t < t_0, \\ =0, \text{ если } t_0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Тогда по лемме 6 для $t_0 \leqslant t \leqslant T$

$$u^* = v^* = 1$$

и

$$\bar{I}(u^*, v^*) = -\psi_0 y(t_0) e^{\delta(T-t_0)}.$$

Таким образом, задача сводится к решению игры на промежутке $[0, t_0]$, отличающейся от исходной игры лишь коэффициентами φ_0, ψ_0, причем $x^*>0$, $y^*>0$ на $[0, t_0)$. Этот случай уже был рассмотрен.

3. Любая ситуация ε-равновесия $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ в игре Γ_2, для которой $x_\varepsilon>0$, $y_\varepsilon>0$ для $0 \leqslant t < T$, является ситуацией ε-равновесия в игре Γ_1, так как в этом случае $I(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \bar{I}(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$. Обратное очевидно.

Ленинград

Поступило в редакцию
3.XII.1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, В. Г Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.
2. Leonard D. Berkovitz, A variational approach to differential games, Annals of Mathematics Studies, N 52, "Advances in Game Theory", Ed. Dresher M., Shapley S., Tucker A. W., Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1964.
3. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, „Мир", М., 1964.

APIE VIENĄ DIFERENCIALINĮ LOŠIMĄ LANČESTERIO TIPO LYGTIMS

A. LIAPUNOVAS

(Reziumė)

Įrodoma sprendinio egzistencija tam tikram diferencialiniam lošimui. Nagrinėjami kai kurie lošimo pakitimai.

ON CERTAIN DIFFERENTIAL GAME FOR LANCHESTER'S EQUATIONS

A. LIAPUNOV

(Summary)

The existence of the solution for a certain differential game is proved. Some modifications of the game are considered.