1970

УДК 519.21

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ. I

В. Статулявичус

Пусть на некотором пространстве Ω с вероятностной мерой P и семейством σ-алгебр $\mathcal{F}_{s,t}$-измеримых множеств, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, таких, что $\mathcal{F}_{s',t'} \subset \mathcal{F}_{s,t}$ при $s \leqslant s' \leqslant t' \leqslant t$, задано семейство $\mathcal{F}_{st}$-измеримых функций $\zeta(s, t)$, аддитивно зависящих от интервала (s, t), т.е.

$$\zeta(s, u) + \zeta(u, t) = \zeta(s, t)$$

с вероятностью 1 для всех $0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t \leqslant T$. Примерами таких функций могут служить функции

$$\zeta(s, t) = \int_s^t \xi(t)\, dt, \qquad \zeta(s, t) = \sum_{s<k\leqslant t} \xi(k)$$

и др., где $\xi(t)$ – некоторый случайный процесс.

Положим $m(s, t) = M\xi(s, t)$, $\sigma^2(s, t) = D\zeta(s, t)$,

$$Z(s, t) = \frac{\zeta(s, t) - m(s, t)}{\sigma(s, t)}.$$

Через $F_\xi(x)$, $f_\xi(t)$, $\Gamma_k\{\xi\}$ обозначим функцию распределения, характеристическую функцию и семиинвариант порядка k случайной величины ξ, соответственно. Пусть $\Phi(x)$ обозначает $(0, 1)$-нормальную функцию распределения.

В серии работ С. Н. Бернштейна, М. Розенблатта, Ю. А. Розанова, И. А. Ибрагимова, П. Г. Диананды, Б. Ряубы, Я. Г. Синая, В. П. Леонова, Б. Розена, А. А. Боровкова, Р. Биллингслея и др. (см. библиографию в [1]) довольно полно исследованы условия, при которых $\sup_x | F_{Z(s,t)}(x) - \Phi(x), | \to 0$ когда $t - s \to \infty$.

В настоящей статье для некоторых типов зависимости выясняется скорость сходимости $F_{Z(s,t)}(x)$ к $\Phi(x)$ и исследуется поведение больших уклонений для $F_{Z(s,t)}(x)$. Основную роль при этом играет лемма 7 работы автора [2], речь о которой будет идти ниже. А сейчас нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Если случайная величина ξ с $M\xi = 0$ и $D\xi = 1$ имеет аналитическую в круге $|z| \leqslant \Delta$ $(\Delta > 0)$ функцию $\gamma_\xi(z) = \ln Me^{z\xi}$ (берется главное значение логарифма) и*

$$|\gamma(z)|_{|z|=\Delta} \leqslant H\Delta^2 \tag{1}$$

или

$$|\Gamma_k\{\xi\}| \leqslant \frac{k!\,H}{\Delta^{k-2}}, \qquad k=3,\ 4, \tag{2}$$

то

$$\sup_x |F_\xi(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{20{,}6}{\sqrt{2\pi}} \frac{H\left(1+\min\left\{\frac{1}{3H}, \frac{1}{2H^{\frac{1}{4}}}\right\}\right)^4}{\Delta} \tag{3}$$

и в интервале

$$0<x\leqslant\delta\Delta, \qquad \delta<\delta_H$$

имеют место соотношения

$$\frac{1-F_\xi(x)}{1-\Phi(x)}=e^{\frac{x^3}{\Delta}\lambda\left(\frac{x}{\Delta}\right)}\left(1+\Theta f(\delta,\ H)\,\frac{x+1}{\Delta}\right),$$

$$\frac{F_\xi(-x)}{\Phi(-x)}=e^{-\frac{x^3}{\Delta}\lambda\left(-\frac{x}{\Delta}\right)}\left(1+\Theta f(\delta,\ H)\,\frac{x+1}{\Delta}\right). \tag{4}$$

Здесь $|\Theta|\leqslant 1$,

$$0\leqslant f(\delta,\ H)\leqslant\frac{8H\left\{1+7{,}2\left(1+\min\left\{\frac{1}{3}(1-\delta)^3H^{-1},\ \frac{1}{2}H^{-\frac{1}{4}}\right\}\right)^4\right\}}{(1-\bar\delta)^4\,(1-\rho)^{\frac{3}{2}}},$$

$0<\bar\delta<\bar\delta_H$ *определяется из уравнения*

$$\delta=\frac{\bar\delta(1+\bar\delta)}{2}, \qquad \rho=\frac{6H\bar\delta}{(1-\bar\delta)^3}, \qquad \delta_H=\frac{\bar\delta_H(1+\bar\delta_H)}{2},$$

$\bar\delta_H$ — *действительный корень уравнения* $\rho=1$ *и* $\lambda(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k t^k$ — *степенной ряд Крамера, сходящийся при* $|t|<\delta_H$, *причем*

$$|\lambda_k|\leqslant\frac{\bar\delta_H}{(k+3)\,\delta_H^{k+2}}, \qquad k=0,\ 1,$$

Доказательство соотношений (3) и (4) дано в [3] (оценка (26) при $h=0$ и лемма, соответственно).

Лемма 2. *Имеет место оценка*

$$P\{\xi\geqslant x\}\left(\text{или } P\{\xi\leqslant -x\}\right)\leqslant\begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2H}} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant H\Delta,\\ e^{-\frac{x\Delta}{2}} & \text{при } x\geqslant H\Delta,\end{cases} \tag{5}$$

если только

$$\gamma(h)\leqslant\frac{h^2}{2}H\left(\text{или } \gamma(-h)\leqslant\frac{h^2}{2}H\right) \text{ для всех } 0<h\leqslant\Delta. \tag{6}$$

Доказательство леммы тривиальным образом следует из неравенства Чебышева:

$$P\{\xi \geqslant x\} = P\{e^{h\xi} \geqslant e^{hx}\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{\gamma(h)-hx} \leqslant e^{\frac{h^2H}{2}-hx} \begin{cases} = e^{-\frac{x^2}{2H}} \text{ при } h=\frac{x}{H},\ 0 \leqslant x \leqslant H\Delta, \\ \leqslant e^{-\frac{x\Delta}{2}} \text{ при } h=\Delta \text{ и } x \geqslant H\Delta. \end{cases}$$

Пусть $\{\xi(t),\ -\infty < t < \infty\}$ — вещественный измеримый случайный процесс. Говорят, что (см. [4], [5]) $\xi(t)$ принадлежит классу $T^{(k)}$, где целое $k \geqslant 1$, если

$$M|\xi(t)|^k \leqslant C_k < \infty,$$

и классу $S^{(k)}$, если $\xi(t) \in T^{(k)}$ и $M\xi(t_1) \ldots \xi(t_l) = M\xi(t_1+\tau) \ldots \xi(t_l+\tau)$ для всех $1 \leqslant l \leqslant k$, $-\infty < t_i < \infty$, $-\infty < \tau < \infty$.

Если $\xi(t) \in T^{(s)}$, то существуют корреляционные функции $s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k)$ порядка $k \leqslant s$ процесса $\xi(t)$, т.е. простые семиинварианты случайного вектора

$$\left(\xi(t_1), \ldots \xi(t_k)\right), \qquad -\infty < t_i < \infty, \qquad i = 1, \ldots k:$$

$$s_\xi^{(k)}(t_1, t_2, \ldots t_k) = \Gamma_k\{\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots \xi(t_k)\} =$$

$$= \frac{1}{i^k} \frac{\partial^k}{\partial u_1 \cdot \ldots \cdot \partial u_k} \ln M e^{i\left(u_1\xi(t_1)+ \ldots +u_k\xi(t_k)\right)} \Big|_{u_1 = \ldots = u_k = 0}.$$

В. П. Леонов [4] показал, что в условиях семиинвариантов $s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k)$ можно выразить критерии различных свойств перемешивания стационарного процесса. Им же найдены семиинвариантные условия для применимости к Z_T, где

$$Z_T = \frac{\xi_T - m_T}{\sigma_T}, \qquad \zeta_T = \int_0^T \xi(t)\,dt, \qquad m_T = M\xi_T, \qquad \sigma_T^2 = D\xi_T$$

центральной предельной теоремы, состоящие в том, что $\xi(t) \in T^{(\infty)}$ и

$$\frac{1}{\sigma_T^k} \int_0^T \ldots \int_0^T s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots t_k)\,dt_1 \ldots dt_k \to 0 \ (T \to \infty)$$

для любого $k \geqslant 3$.

Теорема 1. *Если* $\xi(t) \in T^{(\infty)}$ *и*

$$\frac{1}{\sigma_T^k} \left| \int_0^T \ldots \int_0^T s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k)\,dt_1 \ldots dt_k \right| \leqslant \frac{k!\,H_1}{\Delta_T^{k-2}} \tag{7}$$

для всех $k \geqslant 3$, *то в интервале* $0 \leqslant x \leqslant \delta\Delta_T$, $\delta < \delta_{H_1}$ *имеют место оценка* (3) *скорости сходимости* $F_{Z_T}(x)$ к $\Phi(x)$, *соотношения больших уклонений* (4) *для* $1 - F_{Z_T}(x)$ *и* $F_{Z_T}(-x)$ *с* $\xi = Z_T$, $H = H_1$, $\Delta = \Delta_T$ *и неравенства С. Н. Бернштейна* (5) *для* $P\{Z_T \geqslant x\}$, $P\{Z_T \leqslant -x\}$ *при* $H = 2H_1$, $\Delta = \Delta_T$.

Доказательство. Имеем

$$\Gamma_k\{\zeta_T\} = \int_0^T \ldots \int_0^T s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k)\,dt_1 \ldots dt_k.$$

Следовательно, согласно условиям теоремы,

$$|\Gamma_k\{Z_T\}|\leqslant\frac{k!\,H_1}{\Delta_T^{k-2}},\qquad k=3,\ 4,\tag{8}$$

и поэтому выполняется условие (2) леммы 1, а тем самым и соотношения (3), (4) при $\xi=Z_T$, $H=H_1$, $\Delta=\Delta_T$.

Из (8) следует, что

$$|\gamma_{Z_T}(z)|\leqslant H_1|z|^2 \text{ в круге } |z|\leqslant\Delta_T,$$

значит для $\xi=Z_T$ выполнено (5) при $H=2H_1$, $\Delta=\Delta_T$. Теорема доказана.

Если $\sigma_T^2\geqslant c^2T$ и

$$\left|\int_0^T\ldots\int_0^T s_\xi^{(k)}(t_1,\ldots,t_k)\,dt_1\ldots dt_k\right|\leqslant k!\,H_2H_3^{k-2}T\tag{9}$$

для всех $k\geqslant 3$, то в теореме 1 можно выбрать $H=\frac{H_2}{c^2}$, $\Delta_T=\frac{c\sqrt{T}}{H_3}$. Если $\xi(t)\in S^{(\infty)}$, то для выполнения (9) достаточно, чтобы

$$\underbrace{\int_0^T\ldots\int_0^T}_{k-1}|s_\xi^{(k)}(t_1,\ldots,t_{k-1},0)|\,dt_1\ldots dt_{k-1}\leqslant k!\,H_2H_3^{k-2}$$

при всех $k\geqslant 3$.

Семиинвариантные условия в предельных теоремах для некоторых процессов $\xi(t)$, или преобразований от таких процессов удобны в том смысле, что $s_\xi^{(k)}(t_1,\ldots,t_k)$ для таких процессов возможно найти или оценить, тогда как другие условия слабой зависимости для них не выполняются. Если, например, известны $s_\eta^{(k)}(t_1,\ldots,t_k)$ для какого-нибудь процесса $\eta(t)$, то нетрудно считается и $s_\xi^{(k)}(t_1,\ldots,t_k)$, когда $\xi(t)=\sum_{j=0}^{n}a_j\eta^j(t)$ (см. 5).

Будем говорить, что удовлетворено условие **RMT**, если

$$\sup_{C\in\mathcal{F}_{t+\tau,T}}|P(C\,|\,AB)-P(C\,|\,B)|\leqslant\alpha_T(\tau)\tag{RMT}$$

для любых $A\in\mathcal{F}_{0t}$, $B\in\mathcal{F}_{t,t+\tau}$ и $0\leqslant t\leqslant T$, $0\leqslant t+\tau\leqslant T$, $\tau>0$ и $\alpha_T(\tau)\to 0$, когда τ и T с определенной скоростью стремятся к ∞. Это условие можно назвать условием слабой зависимости (или регулярности) марковского типа. Многие предельные теоремы, доказанные для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова, нетрудно обобщаются и на случай величин

$$X_k=g\big(\xi(k)\big),$$

где $\xi(t)$ — случайный процесс, обладающий свойством **RMT**, и $g(x)$ — измеримая функция, так как фактически нужна не марковость, а лишь регулярность **RMT**. Так, например, для $\xi(s,t)$, обладающих свойством **RMT**, Б. Ряубой ([6], [7]) найдены оптимальные условия для применимости к $Z(s,t)$ центральной предельной теоремы, когда $t-s\to\infty$. В работе автора [8] при $\alpha_T(\tau)\leqslant$

$\leqslant e^{-\alpha_T \tau}$ исследовалась оценка для $\sup\limits_x |F_{Z(s,t)}(x) - \Phi(x)|$ и вероятности $1 - F_{Z(s,t)}(x)$, $F_{Z(s,t)}(-x)$ больших уклонений. Имеет место

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{F}_{s,t}$ обладают свойством* **RMT** *и существует такое $T_0 \geqslant 1$, что*

$$|\zeta(s,\ s+T_0)| \leqslant C_{T_0, T}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant T - T_0$$

с вероятностью 1. *Пусть, кроме того,*

$$\alpha_T(\tau) \leqslant e^{-\alpha_T \cdot \tau}, \qquad \alpha_T > 0.$$

Тогда для $F_{Z(0,T)}(x)$ имеет место оценка (3), *соотношения больших уклонений* (4) *при $\xi = Z(0, T)$, $\Delta = \Delta_T = \frac{\alpha_T \sigma(0, T)}{H_5 C_{T_0, T}}$, $H = H_4$ и неравенства С. Н. Бернштейна* (5) *при $H = 2H_4$, $\Delta = \Delta_T$. Здесь $H_4 > 0$, $H_5 > 0$ — абсолютные константы из оценки для семиинвариантов*

$$|\Gamma_k\{\zeta(0,\ T)\}| \leqslant \frac{k!\, H_4 H_5^{k-2} C_{T_0, T}^{k-2} \sigma^2(0, T)}{\alpha_T^{k-2}}, \qquad k = 3,\ 4, \tag{10}$$

Доказательство утверждений теоремы сводится к доказательству оценки (10), так как из нее находим, что

$$|\Gamma_k\{Z(0,\ T)\}| \leqslant \frac{k!\, H_4}{\Delta_T^{k-2}}$$

при всех $k \geqslant 3$, после чего из (2) в случае $\xi = Z(0, T)$, $\Delta = \Delta_T$, $H = H_4$ следует (3)–(6). Докажем оценку (10).

Мы приведем одну лемму об оценках семиинвариантов, доказанную автором в работах [2] или [8] (соотношения (3,50) и (3.56) леммы 7 или соотношения (3.50) и (3.56) леммы 14, соответственно), которая будет играть основную роль в доказательстве теоремы. Но перед этим введем еще некоторые обозначения.

Пусть $I_1, I_2, \ldots, I_\nu$ — какое-нибудь разбиение множества $I = \{1,\ 2, \ldots,\ r\}$ на нодмножества $I_p \subset I$, $p = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant r$. Введем числа m_k следующим образом: положим $m_{k-1} = i$, если перед числом k в этом подмножестве I_p, где находится k, стоит число i. Если же число k в данном множестве I_p самое левое, что положим $m_{k-1} = 0$. Числа m_k, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-1$ определяются однозначно. Очевидно $m_0 = 0$. В множестве $\mathfrak{m} = \{m_0,\ m_1, \quad m_{r-1}\}$ всегда $m_k \leqslant k$ и ν элементов равны нулю. Пусть это будут $m_{k_1} = m_{k_2} = \quad = m_{k_\nu} = 0$, $k_1 = 0 < < k_2 < \quad < k_\nu$. Пусть среди чисел m_{k+1}, m_{k+2}, $\quad m_{r-1}$ есть $q_k(\mathfrak{m})$ чисел, которые $\geqslant 1$ и $\leqslant k$. Положим

$$N_\nu(I_1, \quad .., I_\nu) = \prod_{j=1}^{\nu} q_{k_j}(\mathfrak{m}),$$

$$N(r) = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\substack{\bigcup\limits_{p=1}^{\nu} I_p = I}}{}^{!} N_\nu(I_1, \quad .., I_\nu), \tag{11}$$

где $q_{k_1}(\mathfrak{m}) = 1$.

Лемма 3. *Пусть* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ — *случайные величины, имеющие конечные абсолютные моменты* $M|Y_k|^s$, $k=1, 2, \quad N$ *целого порядка* $s\geqslant 1$ *и*

$$S=Y_1+Y_2+ \quad +Y_N.$$

Тогда для любого $1\leqslant r\leqslant s$ *имеем*

$$\Gamma_r\{S\}=\sum_{1\leqslant l_1, l_2, \ldots l_r\leqslant N}\Gamma_r\{X_{l_1}, X_{l_2}, \ldots, X_{l_r}\},$$

где смешанный семиинвариант величин $X_{l_1}, X_{l_2}, \quad X_{l_r}$, *в случае* $|\leqslant l_1\leqslant l_2\leqslant$ $\leqslant \quad \leqslant l_r\leqslant N$, *равен*:

$$\Gamma_r\{X_{l_1}, X_{l_2}, \ldots, X_{l_r}\}=$$

$$=\sum_{\nu=1}(-1)^{\nu-1}\sum_{\bigcup\limits_{p=1}^{\nu} I_p=I} N_\nu(I_1, \ldots, I_\nu)\prod_{p=1}^{\nu}\widehat{M}(I_p),$$

Здесь $\sum\limits_{\bigcup\limits_{p=1}^{\nu} I_p=I}$ *означает суммирование по всем разбиениям множества* $I=\{1, 2, \ldots, r\}$ *на подмножества* $I_p\subset I$. *Если*

$$I_p=\{i_1, i_2, \quad i_m\},$$

то

$$M(I_p)=MY_{l_{i_1}}Y_{l_{i_2}} \quad Y_{l_{i_m}}$$

$$\widehat{M}(I_p)=M\widehat{Y_{l_{i_1}}Y_{l_{i_2}} \quad \widehat{Y_{l_{i_{m-1}}}\widehat{Y}_{l_{i_m}}}}.$$

Знак „$\frown$*" над случайной величиной означает, что она центрируется*:

$$\widehat{\xi}=\xi-M\xi.$$

Если $N_\nu(I_1, \quad I_\nu)>0$, *то*

$$\sum_{p=1}^{\nu}\max_{i,j\in I_p}(l_j-l_i)\geqslant\max_{1\leqslant i,j\leqslant r}(l_j-l_i).$$

(В [2] и [8] используются другие обозначения:

$$\prod_{p=1}^{\nu}\widehat{M}(I_p)=W_{\nu-1}(\hat{\mathrm{m}}),\ I_\nu(I_1, \ldots, I_\nu)=N_{\nu-1}(\mathrm{m})$$

Не нарушая общности, положим $M\zeta(s, t)=0$, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$. Случайную величину $\zeta(0, T)$ представим суммой

$$\zeta(0, T)=S_n=\sum_{k=1}^{n}\zeta_k$$

случайных величин

$$\zeta_k=\zeta\Big((k-1)\,T_0,\ kT\Big),\qquad k=1,\ 2,\qquad n-1,$$

$$\zeta_n=\zeta\Big((n-1)\,T_0,\ T\Big),\ T-(n-1)\,T_0\leqslant T_0.$$

Случайные величины ζ_k с вероятностью 1 ограничены величинами $C_{T_0,T}$ и являются регулярными в смысле RMT. Б. Ряубой ([6], [7]) доказано, что S_n можно представить суммой

$$S_n=S=\sum_{k=1}^{N} Y_k$$

так, что величины Y_k являются $\mathscr{F}_{(k-1)MT_0,\ kMT_0}$ — измеримыми, $|Y_k|\leqslant 10C_{T_0,T}M$ с вероятностью 1, $MY_k=0$, $k=1,\ 2,\qquad N$ и существуют абсолютные константы $\beta>0$, $B<\infty$, что

$$\beta\sum_{k=1}^{N} DY_k\leqslant DS_n\leqslant B\sum_{k=1}^{N} DY_k, \tag{12}$$

если только $M\geqslant\left[\frac{1}{\alpha_T}+1\right]$. Положим $M=\left[\frac{1}{\alpha_T}+1\right]$ и применим для $S=\sum_{k=1}^{N} Y_k$ лемму 3. Так как

$$\sup_{C\in\mathscr{F}_{lMT_0,\,T}}|P(C\mid AB)-P(C\mid B)|\leqslant e^{-(l-k)MT_0\alpha_T},$$

то для любых $A\in\mathscr{F}_{0,\,kMT_0}$, $B\in\mathscr{F}_{kMT_0,\,lMT_0}$ находим

$$2^{-\varepsilon}\left|\prod_{p=1}^{\nu}\widehat{M}(I_p)\right|\leqslant\begin{cases}\left(\dfrac{10C_{T_0,T}}{\alpha_T}\right)^{r-2}e^{r-2}e^{-(l_{j_r}-l_{j_1})}M\,|\,Y_{l_{j_1}}Y_{l_{j_2}}|, & \text{при } l_{j_2}-l_{j_1}<2,\\ \left(\dfrac{10C_{T_0,T}}{\alpha_T^{\frac{1}{2}}}\right)^{r-2}e^{\frac{r-2}{2}}e^{-\frac{1}{2}(l_{j_r}-l_{j_1})}\sqrt{MY_{l_{j_1}}^2MY_{l_{j_2}}^2}, & \text{при } l_{j_r}-l_{j_1}\geqslant 2,\end{cases}$$

где $j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_r$ такие, что

$$l_{j_1}\leqslant l_{j_2}\leqslant\qquad\leqslant l_{j_r}.$$

и набор $T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_\nu$ такой, что $N_\nu\ (T_1,\ \ldots,\ T_\nu)>0$.

И так как

$$\sum_{\substack{1\leqslant l_1<l_2\leqslant N\\ l_2-l_1\leqslant 1}} M\,|\,Y_{l_1}Y_{l_2}|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant l_1>l_2\leqslant N\\ l_2-l_1\leqslant 1}}(DY_{l_1}+DY_{l_2})\leqslant\sum_{l=1}^{N} DY_l,$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant l_1>l_2\leqslant N\\ l_2-l_1<2}} e^{-\frac{1}{2}(l_2-l_1)}\sqrt{MY_{l_1}^2MY_{l_2}^2}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant l_1<l_2\leqslant N} e^{-\frac{1}{2}(l_2-l_1)}(DY_{l_1}+DY_{l_2})\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2(1-\sqrt{e})}\sum_{l=1}^{N} DY_l\leqslant\frac{1}{2(1-\sqrt{e})\,\beta}\,DS_n$$

согласно (12), то учитывая (11), находим, что существуют абсолютные константы $H_4>0$ и $H_5>0$, такие что

$$|\Gamma_r\{\zeta(0, T)\}|=|\Gamma_r\{S_n\}|=\Big|\sum_{1\leqslant l_1, l_2, \ldots, l_r\leqslant N}\Gamma\{Y_{l_1}, Y_{l_2}, \quad Y_{l_r}\}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{r!\, H_4 H_5^{r-2} C_{T_0,T}^{r-2}\sigma^2(0, T)}{\alpha_T^{r-2}}, \qquad r=3, 4,$$

Этим оценка (10), а тем самым и теорема 2, доказана.

Теорема 3. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — *случайные величины, такие, что* $|X_k|\leqslant C_n$ *с вероятностью* 1, $MX_k=0$, $k=1, 2, \quad n$ *и обладающие следующим свойством*:

$$|M\widehat{X_{l_1}X_{l_2} \quad X_{l_{r-1}}\widehat{X}_{l_r}}|\leqslant C_0C_n^r e^{-\alpha_n(l_r-l_1)} \tag{13}$$

для любых $1\leqslant l_1\leqslant l_2\leqslant \quad \leqslant l_r\leqslant n$ *и целых* $r\geqslant 1$, *где* $\alpha_n>0$. *Тогда для* $F_{Z_n}(x)$,

$$Z_n=\frac{S_n}{B_n}, \quad S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k, \ B_n^2=DS_n$$

имеет место оценка (3), *соотношения больших уклонений* (4) *при*

$$\xi=Z_n, \ \Delta=\Delta_n=\frac{\alpha_n B_n}{H_7 C_n C_0}, \qquad H=H_6\frac{C_0^2C_n^2 n}{B_n^2\alpha_n}$$

и неравенства (5) *при*

$$H=2H_6\frac{C_0^2C_n^2 n}{B_n^2\alpha_n}, \ \Delta=\Delta_n.$$

Кроме того,

$$|\Gamma_r\{S_n\}|\leqslant\frac{r!\, C_0^r H_6 H_7^{r-2}C_n^r n}{\alpha_n^{r-1}}, \tag{14}$$

где $H_6>0$, $H_7>0$ — *абсолютные константы.*

Доказательство теоремы опять сводится к доказательству оценки (14), так как из нее находим, что

$$|\Gamma_r\{Z_n\}|\leqslant\frac{r!\, H}{\Delta_n^{r-2}}, \qquad r=3, 4,$$

и, согласно леммам 1 и 2, отсюда следует справедливость теоремы. Оценка (14) следует из леммы 3, так как

$$\Big|\prod_{p=1}^{\nu}\widehat{M}(I_p)\Big|\leqslant C_0^\nu C_n^r e^{-\alpha n \max\limits_{1\leqslant i, j\leqslant r}(l_j-l_i)}, \text{ при } N_\nu(I_1, \quad ., I_p)>0,$$

$$|\Gamma_r\{X_{l_1}, X_{l_2}, \ldots, X_{l_r}\}|\leqslant N(r)\, C_0^r C_n^r e^{-\alpha n \max\limits_{1\leqslant i, j\leqslant r}(l_j-l_i)} \tag{15}$$

для любых $1 \leqslant l_i \leqslant n$, $i=1, \ldots, r$, $r \geqslant 1$, согласно (12) и (13). Следовательно,

$$|\Gamma_r\{S_n\}| \leqslant \frac{r!\, H_6 H_7^{r-2} C_0^r C_n^r n}{\alpha^{(n)r-1}}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что соотношения (13)–(15) будут справедливы, если $|X_k| \leqslant C_n$ с вероятностью 1, а для σ-алгебр $\mathcal{F}_{s,\,t}$, порожденных величинами X_k, $s<k\leqslant t$ ($\mathcal{F}_{s,\,t}=\sigma\{X_k,\ s<k\leqslant t\}$), выполнено условие почти марковской регулярности

$$\sup_{C\in F_{l,\,n}} |P(C\,|\,AB)-P(C\,|\,B)| \leqslant K_0 e^{-\alpha_n (l-k)}$$

для всех $A\in F_{0,\,k}$, $B\in F_{k,\,l}$, $1\leqslant k<l\leqslant n$.

Условия типа RMT, по-видимому, являются самыми общими, при которых имеет место оценка (5) для смешанных семиинвариантов. По этому поводу заметим, что в статье автора [9] при условии перемешивания М. Розенблатта, как видно из приводимых там рассуждений, получена только оценка

$$|\Gamma_r\{X_{l_1}, \ldots, X_{l_r}\}| \leqslant \frac{H_1^r}{\alpha_n^{r-1}[\max\limits_{1\leqslant j\leqslant r}](l_j-l_{j-1})]^r+1}, \tag{16}$$

а не оценка*)

$$\frac{H_1^r}{\alpha_n^{r-1}[\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant r}(l_j-l_i)^r]+1}.$$

Оценки логарифмических производных для $Me^{i\sum_{j=1}^{r} u_j x_{l_j}}$ через максимальный промежуток $\max\limits_j (l_j-l_{j-1})$ достаточны для получения асимптотических разложений для $F_{Z_n}(x)$.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР
Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
15.VI.1969

Литература

1. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова, I, Лит. матем. сб., IX, № 2 (1969), 346–362.
2. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова. II, Лит. матем. сб., IX, № 3 (1969), 635–672.
3. V. A. Statulevičius, On large Deviations, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, Band 6, Heft 2 (1966), 133–144.
4. В. П. Леонов, Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов, „Наука", М., 1964.
5. А. Н. Ширяев, Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов. I, Теория вероятн. и ее примен., 5, (1969), 293–313.

*) А. Н. Колмогоров построил пример, показывающий, что условия перемешивания М. Розенблатта недостаточны для справедливости (15).

6. Б. Ряуба, О центральной предельной теореме для сумм серий слабо зависимых случайных величин, Лит. матем. сб., II, № 2 (1962), 193–205.
7. Б. Ряуба, Предельные теоремы для сумм слабозависимых случайных величин, канд. дисс., Вильнюс, 1963.
8. В. А. Статулявичус, Исследования по предельным теоремам теории вероятностей, докт. дисс., Вильнюс, 1967.
9. В. А. Статулявичус, Об уточнениях предельных теорем для слабозависимых случайных величин, Труды VI Всес. совещания по теории вероятн. и матем. статистике, Вильнюс, 1962, 113–119.

ATSITIKTINIŲ FUNKCIJŲ RIBINIŲ TEOREMŲ KLAUSIMU. I

V. Statulevičius

(*Reziumė*)

Straipsnyje gautos didelių atsilenkimų teoremos bei konvergavimo greičio į normalinį dėsnį $\Phi(x)$ įvertinimas atsitiktinių funkcijų $\zeta(s, t)$, adityviai priklausančių nuo intervalo $[s, t)$, tikimybėms $\mathbf{P}\left\{\frac{\zeta(s, t)-m(s, t)}{\sigma(s, t)}<x\right\}$, kai $t-s\to\infty$, jei f funkcijų $\zeta(s, t)$ generuotos σ-algebros tenkina beveik markoviško reguliarumo sąlygą RMT. Straipsnyje taip pat nagrinėjamos sąlygos semiinvariantų terminais, randami semiinvariantų įvertinimai.

ON THE LIMIT THEOREMS FOR THE RANDOM FUNCTIONS

V. Statulevičius

(*Summary*)

A number of limit theorems for random functions $\zeta(s, t)$ which depend additively on the interval $[s, t)$ and satisty the regularity condition of the Markovian type (RMT) are proved.