УДК – 511

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОБРАЗУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ В СВОБОДНЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОЛУГРУППАХ. II

Д. Цибульските

3. Класс $\mathfrak{B}^{*1}_{h,n}$ и обобщенные формулы А. Сельберга

3.1. Класс $\mathfrak{B}_{h,n}$.

Пусть

$$S_f = S_\mu^h \prod_{j=1}^{k} S_{L^j}^{h_j}, \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} h_j \geqslant h, \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{k} (j+1) h_j - h = n. \tag{3.3}$$

Будем называть n весом преобразования S_f, а h -- его порядком. Выражение (3.1) имеет смысл и для $h<0$, так как $S_\mu^{-1} = S_1$.

Определение 3.1. Преобразование S_g принадлежит классу $\mathfrak{B}_{h,n}$ $(h \geqslant 1,\ n \geqslant h)$, если S_g есть линейная комбинация конечного числа преобразований S_f веса $\leqslant n$ и порядка $\leqslant h$.

Очевидно, что

$$\mathfrak{B}_{h-1,n} \subseteq \mathfrak{B}_{h,n}. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Если*

$$S_f \in \mathfrak{B}_{h,n}, \ \textit{то}\ S_{fL} \in \mathfrak{B}_{h+1,n+1}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Можно предполагать, что S_f есть преобразование (3.1) порядка $h \geqslant 1$ и веса n.

Из формулы (2.7), полагая $f=1$, $g=\mu$, имеем:

$$S_{\mu L} = -S_\mu S_{L_*} = -S_\mu^2 S_L. \tag{3.6}$$

Имея в виду это соотношение и тот факт, что

$$S_\mu^h \Big(\prod_{j=1}^{k} S_{L^j}^{h_j}\Big)_L \in \mathfrak{B}_{h,n+1}, \tag{3.7}$$

получаем далее:

$$S_{fL} = -h S_\mu^{h+1} S_L \prod_{j=1}^{k} S_{L^j}^{h_j} + (\text{чл.} \in \mathfrak{B}_{h,n+1}). \tag{3.8}$$

В силу (3.2)

$$1+\sum_{j=1}^{k} h_j \geqslant h+1,$$

вес преобразования

$$S_\mu^{h+1} S_L \prod_{j=1}^{k} S_{L^j}^{h_j}$$

равен

$$2+\sum_{j=1}^{k} (j+1) h_j-(h+1)=\sum_{j=1}^{k} (j+1) h_j-h+1=n+1,$$

а порядок — $(h+1)$. Тем (3.5) доказано.

Из определения класса $\mathfrak{B}_{h,n}$ следует:

Теорема 3.2. *Если*

$$S_f \in \mathfrak{B}_{h,n}, \quad S_g \in \mathfrak{B}_{k,m}, \text{ то } S_f S_g \in \mathfrak{B}_{h+k,n+m}.$$

3.2. Формулы А. Сельберга в классе $\mathfrak{B}_{h,n}$.

Теорема 3.3. *Пусть* $S_f \in \mathfrak{B}_{h,n}$. *Тогда*

$$S_{fL^{m+1}}+h\binom{h+m}{h} S_{\Lambda L^m} S_f \in \mathfrak{B}_{h+m,n+m+1}.$$

Доказательство. Будем предполагать, что S_f задано в виде (3.1) и имеет порядок $h \geqslant 1$ и вес n. Вследствие (3.8) и формулы $S_\mu S_L=S_\Lambda$ получаем:

$$S_{fL}=-hS_\Lambda S_f+(\text{чл.} \in \mathfrak{B}_{h,n+1}). \tag{3.9}$$

В силу Т.3.1. Т.3.2 и того факта, что $S_\Lambda \in \mathfrak{B}_{1,1}$, применяя (3.9) к сумме $S_{fL} \in \in \mathfrak{B}_{h+1,n+1}$, имеем:

$$S_{fL^2}=(h+1) hS_\Lambda^2 S_f+(\text{чл.} \in \mathfrak{B}_{h+1,n+2}).$$

По индукции верно соотношение:

$$S_{fL^{m+1}}+(-1)^m \frac{(h+m)!}{(h-1)!} S_\Lambda^{m+1} S_f=(\text{чл.} \in \mathfrak{B}_{h+m,n+m+1}). \tag{3.10}$$

Из формулы (3.10) для арифметической функции $f=\Lambda$ с $(m-1)$ вместо m получаем:

$$S_{\Lambda L^m}+(-1)^{m-1} m! S_\Lambda^{m+1}=(\text{чл.} \in \mathfrak{B}_{m,m+1}). \tag{3.11}$$

Имея в виду Т.3.2 и формулу (3.11), из (3.10) выводим соотношение

$$S_{fL^{m+1}}+\frac{(h+m)!}{(h-1)!\,m!} S_{\Lambda L^m} S_f=(\text{чл.} \in \mathfrak{B}_{h+m,n+m+1}),$$

что и доказывает теорему.

Полезность параметра m будет видна в дальнейшем.

Пусть

$$S_{P_{n+1}}=P_{n+1}(-S_\Lambda, \qquad -S_{\Lambda L^n}),$$

где P_{n+1} — многочлен, введенный в Т.2.3.

Теорема 3.4. *Если* $S_f \in \mathfrak{B}_{h,n}$, *то*

$$\binom{h+m}{1+m} S_{P_{m+1}} S_f - S_{fL^{m+1}} \in \mathfrak{B}_{h+m,\, n+m+1}.$$

Доказательство. Из соотношения

$$S_{P_{m+1}} + (m+1)\, S_{\Lambda L^m} \in \mathfrak{B}_{m,\, m+1} \tag{3.12}$$

следует утверждение теоремы. Докажем (3.12). В случае $m=0$ по Т.2.3 (3.12) верно. Пусть

$$S_{P_m} + mS_{\Lambda L^{m-1}} \in \mathfrak{B}_{m-1,\, m}.$$

Отсюда следует, что

$$(S_{P_m} + mS_{\Lambda L^{m-1}})_L = S_{P_m L} + mS_{\Lambda L^m} \in \mathfrak{B}_{m,\, m+1}.$$

По формуле (2.8′) имеем

$$S_{P_m} = -S_\Lambda S_{P_{m-1}} + S_{P_{m-1}L}. \tag{3.13}$$

В предположении, что (3.12) верно для $(m-1)$ и (3. 13), получается, что

$$S_{P_{m+1}} = -S_\Lambda S_{P_m} + S_{P_m L} = mS_\Lambda S_{\Lambda L^{m-1}} - mS_{\Lambda L^m} + (\text{чл.} \in \mathfrak{B}_{m,\, m+1}).$$

Имея в виду коммутативность преобразований S_f по Т.3.3 для функции $f=\Lambda$ с $(m-1)$ вместо m выводим

$$S_{\Lambda L^m} + mS_\Lambda S_{\Lambda L^{m-1}} \in \mathfrak{B}_{m,\, m+1}.$$

Подставляя это в предыдущее соотношение, получим (3.12).

3.3. Приращение ΔS_f сумм S_f

В этом пункте доказывается свойство „медленного колебания" функций из класса $\mathfrak{B}_{h,\, n}$.

Лемма 3.1. *Пусть*

$$S_f = S_\mu^h \prod_{j=1}^{k} S_{L^j}^{h_j} \in \mathfrak{B}_{h,\, n}.$$

Тогда $f(\alpha) \geqslant 0$.

Доказательство. Из определения функций Λ_k следует, что $\Lambda_1 = \Lambda \geqslant 0$. Докажем, что $\Lambda_k \geqslant 0$, $k > 1$. В силу определения Λ_k и Т.2.1,7 получаем

$$\Lambda_k L = (\mu * L^k)\, L = \mu L * L^k + \Lambda_{k+1}.$$

Имея в виду (2.29), получим, что

$$-\mu L = \mu * \Lambda.$$

Значит,

$$\Lambda_{k+1} = \Lambda * \Lambda_k + \Lambda_k L.$$

Из определения S_f имеем

$$f = \underbrace{\mu * \quad * \mu}_{h \text{ раз}} \times \underbrace{L * \quad * L}_{h_1 \text{ раз}} * \ldots * \underbrace{L^k * \quad * L^k}_{h_k \text{ раз.}}$$

По (3.2) $h_1 + \quad + h_k \geqslant h$. Функция f есть произведение Дирихле неотрицательных функций, т.е. $f \geqslant 0$. В силу соотношения $S_\mu^h = S_1^{-h}$ лемма справедлив и для случая $h<0$.

Теорема 3.5. *Пусть $S_f \in \mathfrak{B}_{h,n}$ и $N>0$ — произвольная фиксированная постоянная. Тогда для $x/2<y<x$ имеем*

$$\sum_{y<N\alpha\leqslant x} f(\alpha)=O(x-y)(x^{\theta-1}\ln^{n-1}x)+O(x^{\theta}\ln^{-N}x).$$

Это соотношение равномерно по y и константы в $O(\ldots)$ зависят только от f и N.

Доказательство. Не нарушая общности будем предполагать, что S_f задается выражением (3.1) с $h\geqslant 1$. Для $h\leqslant 0$ из Т.2.9 и Т.2.6 следует более точная оценка.

Пусть $m=0$. Применим Т.3.3. последовательно к преобразованиям S_{f_1}, S_{f_2} и т.д.

$$S_{fL}+hS_{\Lambda}S_f=S_{f_1}\in\mathfrak{B}_{h,n+1},$$
$$S_{f_1L}+hS_{\Lambda}S_{f_1}=S_{f_2}\in\mathfrak{B}_{h,n+2},$$
$$- - - - - - - - - - -$$
$$S_{f_{m-1}L}+hS_{\Lambda}S_{f_{m-1}}=S_{f_m}\in\mathfrak{B}_{h,n+m}.$$

Из этих соотношений получаем, что

$$S_{fL^m}+Q(S_{\Lambda},\ \ldots,\ S_{\Lambda}^m,\ S_{\Lambda L},\ \ldots,\ S_{\Lambda L^{m-1}},\ S_f,\ \ldots,\ S_{fL^{m-1}})=$$
$$=S_f\in\mathfrak{B}_{h,n+m}, \tag{3.14}$$

где Q — многочлен с неотрицательными коэффициентами.

По Т.2.12 для $S_{f_m}\in\mathfrak{B}_{h,n+m}$ имеем

$$S_{f_m}\Phi(x)=\frac{1}{\theta}x^{\theta}P(L)+O(x^{\theta}L^{h-1}),\quad \Phi\in\mathfrak{N},$$

где $P(L)$ — многочлен степени $\leqslant n+m+1$. Вследствие Л.3.1 и формулы (3.14), получаем

$$0\leqslant\sum_{y<N\alpha\leqslant x} f(\alpha)\ln^m N\alpha\leqslant\sum_{y<N\alpha\leqslant x} f_m(\alpha)=$$
$$=\frac{1}{\theta}x^{\theta}P(\ln x)-\frac{1}{\theta}y^{\theta}P(\ln y)=O(x^{\theta}\ln^{h-1}x). \tag{3.15}$$

Для некоторой точки ξ, $y<\xi<x$ имеем

$$\frac{1}{\theta}x^{\theta}P(\ln x)-\frac{1}{\Theta}y^{\theta}P(\ln y)=O\left((x-y)x^{\theta-1}\ln^{m+n-1}x\right).$$

При $x/2<y<x$ после деления неравенства

$$0\leqslant\ln^m y\sum_{y<N\alpha\leqslant x} f(\alpha)\leqslant\sum_{y<N\alpha\leqslant x} f(\alpha)\ln^m N\alpha=$$
$$=O\left((x-y)x^{\theta-1}\ln^{n+m-1}x\right)+O(x^{\theta}\ln^{h-1}x) \tag{3.16}$$

на $\ln^m x$ получаем теорему с $N=m-h+1$, так как m произвольно.

Теорема 3.5.A *Пусть $S_f\in\mathfrak{B}_{h,n}$. Тогда для любого фиксированного $N>0$ существует константа $K=K(f,N)$, такая, что*

$$|\Delta S_f 1|\leqslant K(f,N)x^{\theta-1}|\Delta x|L^{n-1}+O(x^{\theta}L^{-N}),$$

причем неравенство равномерно по $|\Delta x|$ при $0\leqslant|\Delta x|\leqslant\frac{x}{2}$.

3.4. Классы $\mathfrak{B}^*_{h,n}$ и формулы А. Сельберга в этих классах

Пусть f — арифметическая функция, такая, что $S_f \in \mathfrak{B}_{h,n}$ и

$$I_f \Phi = F(D)\Phi + O(\Lambda_n), \quad \Phi \in \mathfrak{R}, \quad F(D) = \sum_{m=-p}^{\infty} a_m D^m. \tag{3.17}$$

Тогда

$$P(L, f) = DF(D)\,1 = \sum_{m=0}^{p-1} a_{-m-1} \frac{L^m}{m!}, \tag{3.18}$$

так как

$$F(D)\,1 = a_{-p} \frac{L^p}{p!} + \quad + a_{-2} \frac{L^2}{2!} + a_{-1} L + a_0.$$

$P(L, f)$ будем называть остаточным многочленом числовой функции f. По Т.2.6 имеем для $\Phi \in \mathfrak{R}$ и любого фиксированного $\varepsilon > 0$, что остаточный многочлен арифметической функции f дает асимптотику S_f.

Определение 3.2. Преобразование S_f принадлежит классу $\mathfrak{B}^*_{h,n}$, если $S_f \in \mathfrak{B}_{h,n}$ и если остаточный многочлен арифметической функции f тождественно равен нулю.

Класс $\mathfrak{B}^*_{h,n}$ образован из преобразований $S_f \in \mathfrak{B}_{h,n}$, для которых оператор $F(D)$ есть ряд по неотрицательным степеням D. Для преобразований $S_f \in \mathfrak{B}^*_{h,n}$ верны теоремы, аналогичные Т.3.1, Т.3.2 и Т.3.3.

Теорема 3.1′. *Если* $S_f \in \mathfrak{B}^*_{h,n}$, *то* $S_{fL} \in \mathfrak{B}^*_{h+1,n+1}$.

Теорема 3.2′. *Если*

$$S_g \in \mathfrak{B}^*_{k,m}, \quad S_f \in \mathfrak{B}^*_{h,n}, \quad \text{то} \quad S_f S_g \in \mathfrak{B}^*_{h+k,n+m}.$$

Доказательства следуют из определения класса $\mathfrak{B}^*_{h,n}$ Т.3.1 и Т.2.5.

Теорема 3.3′. *Пусть* $S_f \in \mathfrak{B}^*_{h,n}$. *Тогда*

$$S_{fL^{m+1}} + h \binom{h+m}{h} S_{\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) L^m} S_f \in \mathfrak{B}^*_{h+m,\ n+m+1}.$$

Доказательство. По Т.2.7 и Т.2.8 преобразование

$$S_{\Lambda - \frac{1}{C\theta}} \in \mathfrak{B}^*_{1,1}.$$

Пусть

$$S_f = S_\mu^h \prod_{j=1}^{k} S_{L^{j}}^{h_j} \in \mathfrak{B}^*_{h,n}.$$

Тогда вследствие (3.6), (3.7) и того факта, что $S_f \in \mathfrak{B}^*_{h,n}$, по Т.3.1′ получаем, что

$$S_{fL} = -hS_{\Lambda - \frac{1}{C\theta}} S_f + (\text{чл.} \in \mathfrak{B}^*_{h,n+1}). \tag{3.19}$$

Применяя (3.19) к сумме S_{fL}, S_{fL^2}, по индукции имеем:

$$S_{fL^{m+1}} = (-1)^{m+1} (h+m) \qquad hS^{m+1}_{\Lambda - \frac{1}{C\theta}} S_f + (\text{чл.} \in \mathfrak{B}^*_{h+m,n+m+1}). \tag{3.20}$$

Пусть $f = \Lambda - \frac{1}{C\theta}$. В этом случае $h = n = 1$. В (3.20), заменив m на $(m-1)$ по Т.3.2, получаем, что

$$S_{\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) L^m} S_f + (-1)^{m-1} m!\, S^{m+1}_{\Lambda - \frac{1}{C\theta}} S_f = S_f, S_f \in \mathfrak{B}^*_{h+m,n+m+1}. \tag{3.21}$$

Утверждение теоремы следует из (3.20) и (3.21).

Теорема 3.6. *Пусть* $S_f \in \mathfrak{B}^*_{h,n}$. *Тогда существует константа* $a = a(f, m)$, *такая, что*

$$\binom{h+m}{1+m} S_{P_{m+1}} S_f - S_{fL^{m+1}} - aS_1 \in \mathfrak{B}^*_{h+m,\, n+m+1}.$$

Доказательство. Пусть

$$S_{P_{m+1}} = P_{m+1}(-S_\Lambda, \qquad -S_{\Lambda L^m}),$$

$$S_{f_1} = \binom{h+m}{1+m} S_{P_{m+1}} S_f - S_{fL^{m+1}}. \tag{3.22}$$

По Т.2.3, 2) для случая $f=1$, $g=\mu$, $h=\Lambda$ имеем

$$S_{P_{m+1}} = S_1 S_{\mu L'^{m+1}}.$$

Соответствующий этому преобразованию оператор равен:

$$\zeta(D)(-1)^{m+1}[\xi^{-1}(D)]^{(m+1)} = a_m D^{-1} + a_{m+1} + a_{m+2} D +$$

где константы a_m выражаются через C, θ и γ_k. Значит, остаточный многочлен арифметической функции P_{m+1} равен константе a_m, а функции f_1, определяемой в (3.22) — константе $a = a(f, m)$.

В силу Т.3.4

$$S_{f_1} \in \mathfrak{B}_{h+m,\, n+m+1}.$$

Значит,

$$S_{f_1} - aS_1 \in \mathfrak{B}^*_{h+m,\, n+m+1}.$$

3.5. Основное неравенство

Теорема 3.7. *Пусть* $S_f \in \mathfrak{B}^*_{h,n}$. *Тогда существует арифметическая функция* f_1 *с* $S_{f_1} \in \mathfrak{B}^*_{h+m,\, n+m+1}$, *такая, что*

$$|S_{fL^{m+1}} 1 + S_{f_1} 1| \leqslant \binom{h+m}{1+m} (m+1) S_{k^{\theta-1} L^m} |S_f 1| + O(x^\theta L^n).$$

Замечание. Очень важно, что в этом неравенстве остаток не зависит от целого числа m.

Доказательство. По Т.3.6 следует, что существует константа $a = a(f, m)$, такая, что для $S_f \in \mathfrak{B}^*_{h,n}$ и $S_{f_1} \in \mathfrak{B}^*_{h+m,\, n+m+1}$ выполняется неравенство:

$$|S_{fL^{m+1}} 1 + S_{f_1} 1| \leqslant \binom{h+m}{1+m} S_{P_{m+1}} |S_f 1| + O(x^\theta). \tag{3.23}$$

В силу Т.2.3, 1) и 3) для $f=1$, $g=\mu$, $h=\Lambda$, $L^m * \mu = \Lambda_m$ и $\Phi \in \mathfrak{N}$ получаем:

$$|S_{P_{m+1}} \Phi| \leqslant S_{|P_{m+1}|} |\Phi| \leqslant S_{\Lambda_{m+1}} |\Phi|. \tag{3.24}$$

Из Т.2.8 следует, что

$$I_{\Lambda_k} 1(t) = \ln^k t - (C\theta)^{-1} \gamma_0 k \ln^{k-1} t + \ldots + O(1).$$

Остаточный многочлен функции Λ_{m+1} равен:

$$P(L, \Lambda_{m+1}) = (m+1)L^m - (C\theta)^{-1}\gamma_0 (m+1) m L^{m-1} + \ldots =$$
$$= (m+1)L^m - b_m L^{m-1} + \ldots, \quad b_m > 0, \quad m \geqslant 2.$$

Значит,

$$P(L,\ \Lambda_{m+1}) \leqslant (m+1)L^m, \tag{3.25}$$

если

$$L > \ln x_0,\ x_0 > 4.$$

Пусть

$$F(x) = \Big| \sum_{N\beta \leqslant x} f(\beta) \Big|. \tag{3.26}$$

Имея в виду Т.2.13, рассмотрим сумму:

$$S_{\Lambda_{m+1}} | S_f 1 | = \sum_{N\alpha \leqslant x} \Lambda_{m+1}(\alpha) F\left(\frac{x}{N\alpha}\right) =$$

$$= \sum_{k \leqslant x} \Lambda_{m+1}(k)[B(k) - B(k-1)] F\left(\frac{x}{k}\right) =$$

$$= \sum_{k \leqslant x} \Big[\sum_{N\alpha \leqslant k} \Lambda_{m+1}(\alpha) \Big] \Big[F\left(\frac{x}{k}\right) - F\left(\frac{x}{k+1}\right) \Big] =$$

$$= \sum_{k \leqslant x} \sum_{t \leqslant k} t^{\theta-1} P(L,\ \Lambda_{m+1}) \Big[F\left(\frac{x}{k}\right) - F\left(\frac{x}{k+1}\right) \Big] +$$

$$+ O\Big(\sum_{k \leqslant x} k^\theta \Big| F\left(\frac{x}{k}\right) - F\left(\frac{x}{k+1}\right) \Big| \Big),$$

$$S_{\Lambda_{m+1}} | S_f 1 | = \sum_{k \leqslant x} k^{\theta-1} P(L,\ \Lambda_{m+1}) F\left(\frac{x}{k}\right) +$$

$$+ O\Big(\sum_{k \leqslant x} k^\theta \Big| F\left(\frac{x}{k}\right) - F\left(\frac{x}{k+1}\right) \Big| \Big). \tag{3.27}$$

Пусть $y < x$. Тогда

$$| F(x) - F(y) | \leqslant \Big| \sum_{y < N\beta \leqslant x} f(\beta) \Big| \leqslant \sum_{y < N\beta \leqslant x} | f(\beta) | \leqslant \sum_{y < N\beta \leqslant x} f_2(\beta), \tag{3.28}$$

так как из определения класса $\mathfrak{B}_{h,\,n}$ следует, что S_f есть линейная комбинация конечного числа преобразований, определенных в (3.1), а для функций f верна Л.3.1. Отсюда и вытекает неравенство (3.28) с $S_{f_2} \in \mathfrak{B}_{h,\,n}$.

Далее получаем, что

$$\sum_{k \leqslant x} k^\theta \Big| F\left(\frac{x}{k}\right) - F\left(\frac{x}{k+1}\right) \Big| \leqslant \sum_{k \leqslant x} k^\theta \Big[S_{f_2} 1 \left(\frac{x}{k}\right) - S_{f_2} 1 \left(\frac{x}{k+1}\right) \Big] =$$

$$= \sum_{k \leqslant x} S_{f_2} 1 \left(\frac{x}{k}\right) [k^\theta - (k-1)^\theta] = O\Big(\sum_{k \leqslant x} k^{\theta-1} S_{f_2} 1 \left(\frac{x}{k}\right) \Big).$$

Так как $S_{f_2} \in \mathfrak{B}_{h,\,n}$, то по Т.2.12 имеем:

$$S_{f_2} \Phi(x) = \frac{1}{\theta} x^\theta P(L) + O(x^\theta L^{h-1}),$$

$\Phi \in \mathfrak{N}$, $P(L)$ — многочлен $(n-1)$ степени. Тогда для $n \geqslant h$

$$\sum_{k \leqslant x} k^\theta \Big| F\left(\frac{x}{k}\right) - F\left(\frac{x}{k+1}\right) \Big| = O(x^\theta L^n). \tag{3.29}$$

Из (3.27), (3.29), (3.24), (3.25) и (3.23) следует основное неравенство.

4. Функции $V_k(\eta, f)$ и $\overline{V}_k(\eta, f)$

4.1. Основные свойства функций $V_k(\eta, f)$

Будем рассматривать функции

$$V_k(\eta, f)=\frac{1}{k!}e^{-\eta}S_fL^k(e)^{\frac{\eta}{\theta}}=\frac{1}{k!}e^{-\eta}\sum_{N\alpha\leqslant e^{\eta/\theta}}f(\alpha)\left(\frac{\eta}{\theta}-\ln N\alpha\right)^k \tag{4.1}$$

где f — арифметическая функция, k — всегда неотрицательное целое число.

Эти функции обладают интересными свойствами.

Теорема 4.1. *Если $k\geqslant 1$, то $V_k(\eta, f)$ дифференцируема и*

$$V_k'(\eta, f)=V_{k-1}(\eta, f)-V_k(\eta, f).$$

Доказательство. Для $k\geqslant 1$ по определению S_f получаем соотношение:

$$d\left(x^\theta\frac{1}{k!}x^{-\theta}\sum_{N\alpha\leqslant x}f(\alpha)\ln^k\frac{x}{N\alpha}\right)=$$

$$=\left(x^{\theta-1}\frac{1}{(k-1)!}x^{-\theta}\sum_{N\alpha\leqslant x}f(\alpha)\ln^{k-1}\frac{x}{N\alpha}\right)dx.$$

Заменив x на $e^{\frac{t}{\theta}}$, путем почленного интегрирования имеем, что

$$V_k(\eta, f)=\frac{1}{\theta}\int_0^\eta e^{t-\eta}V_{k-1}(t, f)\,dt, \tag{4.2}$$

так как

$$V_k(0, f)=0.$$

Из (4.2) и

$$V_k'(\eta, f)=-\frac{1}{\theta}\int_0^\eta e^{-(\eta-t)}V_{k-1}(t, f)\,dt+V_{k-1}(\eta, f)$$

следует утверждение теоремы.

Следствие. Для $k\geqslant 0$ справедливо равенство:

$$\int_0^\eta V_k(t, f)\,dt=\sum_{j=1}^m V_{k+j}(\eta, f)+\int_0^\eta V_{k+m}(t, f)\,dt. \tag{4.3}$$

Теорема 4.2. *Пусть $V_k(\eta, f)=V_k$.*

$$V_k(\eta, fL^h)=\sum_{m=0}^h(-1)^m\binom{h}{m}\frac{(k+m)!}{k!}\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{h-m}V_{k+m}.$$

Доказательство следует из Т.2.2, III и определения функций $V_k(\eta, f)$. Очевидны соотношения

$$V_k(\eta, f+g)=V_k(\eta, f)+V_k(\eta, g)$$

и

$$V_k(\eta, c\,f)=cV_k(\eta, f);$$

c — любая постоянная.

Кроме этих формул, понадобится выражение $V_k(\eta, f*g)$ через $V_m(\eta, f)$ и $V_n(\eta, g)$.

Теорема 4.3. *Если* $k\geqslant 1$ и $m+n=k-1$, *то*

$$V_k(\eta,\ f*g)=\frac{1}{\theta}\int_0^\eta V_m(t,\ f)\,V_n(\eta-t,\ g)\,dt.$$

Доказательство. Из соотношения (4.2) при $k\geqslant 1$ имеем

$$V_k(\eta,\ f*g)=\frac{1}{\theta}\int_0^\eta e^{-(\eta-t)}\,V_{k-1}(t,\ f*g)\,dt. \tag{4.4}$$

По определению функций V_k получаем, далее,

$$e^{-(\eta-t)}\,V_{k-1}(t,\ f*g)=V_m(t,\ f)\,V_{k-m-1}(\eta-t,\ g),$$

что с (4.4) и доказывает теорему.

Теорема 4.4. *Пусть для некоторой константы* σ

$$V_k(\eta,\ f)=O(\eta^\sigma).$$

Тогда

$$\int_0^\eta V_0(t,\ f)\,dt=\sum_{j=1}^k V_j(\eta,\ f)+\frac{\theta}{C}\,V_{k+1}(\eta,\ f*1)+O(\eta^\sigma).$$

Доказательство. Так как

$$V_0(\eta,\ 1)=C+O\left(e^{\left(\frac{\theta_1}{\theta}-1\right)\eta}\right),$$

то по Т. 4. 3 имеем, что

$$V_{k+1}(\eta,\ f*1)=\frac{C}{\theta}\int_0^\eta V_k(t,\ f)\,dt+O(\eta^\sigma). \tag{4.5}$$

Из следствия Т.4.1 и (4.5) следует утверждение теоремы.

4.2. Класс мажорант $\bar V_k(\eta,\ f)$

Пусть

$$a_k=a_k(f)=-\left[\varlimsup_{\eta\to\infty}\frac{\ln|V_k(\eta,\ f)|}{\ln\eta-\ln\theta}\right]. \tag{4.6}$$

Из определения функций $V_k(\eta,\ f)$ следует, что константа a_k ограничена снизу некоторым конечным числом, зависящим от k и f. В этом пункте предположим, что a_k — конечное число.

Введем класс функций, мажорирующих функцию $V_k(\eta,\ f)$. Эти мажоранты будем обозначать через $\bar V_k(\eta,\ f)$.

Определение. Через $\bar V_k(\eta,\ f)$ обозначается любая функция

$$\bar V_k(\eta,\ f)=\eta^{-a_k}c(\eta), \tag{4.8}$$

где

1) a_k — конечно и задается формулой (4.6);

2) $c(\eta)$ — медленно меняющаяся функция;

3) $c(\eta)$ такова, что

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \frac{|V_k(\eta, f)|}{\eta^{-a_k} c(\eta)} = 1. \tag{4.9}$$

Из (4.6) и определения верхнего предела следует, что класс мажорант $\bar{V}_k$ не пуст.

Медленно меняющиеся функции характеризуются условием

$$\lim_{\eta\to\infty} \frac{c(t\eta)}{c(\eta)} = 1;$$

$t>0$ — любое фиксированное число. Для медленно меняющихся функций, интегрируемых на любом конечном интервале, верна

Теорема Карамата [14]*). *Интегрируема на любом конечном интервале медленно меняющаяся функция $h(x)$ допускает следующее каноническое представление*

$$h(x) = q(x) \exp\left\{\int_{\beta}^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt\right\},$$

где при $x\to\infty$, $q(x)\to q\neq 0$, $\varepsilon(x)\to 0$, $\beta>0$.

Доказательство изложено в книге Линника и Ибрагимова [15].

Для функции $c(\eta)$ получаем:

$$c(\eta) = \Big(1 + o(1)\Big) \exp\left(\int_0^{\eta} \frac{\varepsilon(t)}{t+1}\, dt\right), \qquad \varepsilon(\eta) = o(1). \tag{4.10}$$

В интегральном исчислении известны формулы Бонне, вследствие которых доказывается вторая теорема о среднем значении

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx,$$

где $g(x)$ — интегрируема в этом интервале, а $f(x)$ — монотонна в промежутке $[a, b]$. Применяя эту теорему к медленно меняющейся функции $c(t)$ при фиксированных $s>0$, $v>0$, получаем, что

$$\int_0^{\eta} t^{s-1} c(t)\, dt \sim c(\eta) \int_0^{\eta} t^{s-1}\, dt \tag{4.11}$$

$$\int_0^{\eta} t^{s-1} (\eta - t)^{v-1} c_1(t) c_2(t)\, dt \sim c_1(\eta) c_2(\eta) \int_0^{\eta} t^{s-1} (\eta - t)^{v-1}\, dt. \tag{4.12}$$

Теорема 4.5. *Если* $a_m = a_m(f) < 1$, $a_n = a_n(g) < 1$, *то для любых функций* $\bar{V}_m(\eta, f)$ *и* $\bar{V}_n(\eta, g)$ *верно неравенство*

$$|V_{m+n+1}(\eta, f*g)| \leqslant \frac{1}{\theta} B(1-a_m, 1-a_n) \Big(1 + o(1)\Big) \eta \bar{V}_m(\eta, f) \bar{V}_n(\eta, g),$$

где $B(x, y)$ — *бета-функция Эйлера.*

*) Список литературы продолжается.

Доказательство следует из Т.4.3, имея в виду (4.12).

Теорема 4.6. *Для функций* $\bar V_k(\eta, f)$ *верно неравенство*

$$|V_{k+1}(\eta, f)| \leqslant \frac{1}{\theta}\Big(1+o(1)\Big)\bar V_k(\eta, f),$$

Доказательство получается по (4.2) при $k \geqslant 0$. Этим устанавливается, что максимальный порядок роста функции V_k не увеличивается с ростом k.

Теорема 4.7.

$$\varlimsup_{\eta\to\infty}\frac{|V_k(\eta, fL^m)|}{\eta^m\bar V_k(\eta, f)}=\frac{1}{\theta^m} \text{ и } \varlimsup_{\eta\to\infty}\frac{|V_k(\eta, f)|}{\eta^{-m}V_k(\eta, fL^m)}=\theta^m.$$

Доказательство. Из Т.4.2 имеем:

$$V_k(\eta, fL^m)=\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^m V_k(\eta, f)+O\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{m-j}|V_{k+j}(\eta, f)|\right),$$

а из Т.4.6:

$$V_k(\eta, fL^m)=\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^m V_k(\eta, f)+O\left(\eta^{m-1}\bar V_k(\eta, f)\right), \tag{4.14}$$

что и доказывает теорему.

4.3. Следствия обобщенных формул А. Сельберга

Как и прежде, будем предполагать, что $a_k=a_k(f)<\infty$ при $k=0, 1, 2, \ldots$ и $S_f\in\mathfrak{B}_{h,n}$.

Теорема 4.8. *Если*

$S_f\in\mathfrak{B}^*_{h,n}$, *то* $V_0(\eta, f)=O(\eta^{h-1})$.

Доказательство следует из определения класса $\mathfrak{B}^*_{h,n}$ и Т.2.12.

Теорема 4.9. *Пусть* $S_f\in\mathfrak{B}^*_{h,n}$. *Тогда для любого* $k\geqslant 1$ *существует целое число* m, *арифметическая функция* f_1, *зависящая от* f *и* k *с* $S_{f_1}\in\mathfrak{B}^*_{h+m,\, n+m+1}$, *такие, что для любой мажоранты* $\bar V_{k-1}(\eta, f)$ *и* $\bar V_0\left(\eta, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)$ *имеет место оценка*:

$$|V_k(\eta, f)|\leqslant O\left(\bar V_{k-1}(\eta, f)\,\bar V_0\left(\eta, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right)+\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{-m-1}|V_k(\eta, f_1)|.$$

Доказательство. В силу Т.3.1′ при целом $m'>0$

$$S_{fL^{m'}}\in\mathfrak{B}^*_{h+m',\, n+m'}.$$

Применяя Т.3.3′ к этому преобразованию и имея в виду определение функций V_k, получим формулу типа формул Сельберга:

$$V_k(\eta, fL^{m+m'+1})+(h+m')\binom{h+m'+m}{h+m'}V_k\left(\eta, \left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)L^m * fL^{m'}\right)=$$
$$=V_k(\eta, f_1), \tag{4.16}$$

где

$$S_{f_1}\in\mathfrak{B}^*_{h+m+m',\, n+m+m'+1}.$$

По Т.4.3. имеем, что

$$V_k(\eta, fL^{m+m'+1})+(h+m')\binom{h+m'+m}{h+m'}\frac{1}{\theta}\int_0^{\eta}V_0\left(t, \left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)L^m\right)\times$$
$$\times V_{k-1}(\eta-t, fL^{m'})\,dt=V_k(\eta, f_1), \qquad k\geqslant 1. \tag{4.17}$$

Пусть m и m' столь большие, что

$$a_{k-1}(f)-m'\leqslant 0,\ a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)-m\leqslant 0. \tag{4.18}$$

Это возможно в силу конечности a_k. Из определения a_k и Т.4.7 получаем, что

$$\left.\begin{aligned} &a_{k-1}(fL^{m'})=a_{k-1}(f)-m'\leqslant 0 \\ \text{и}\quad & \\ &a_0\left(\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)L^m\right)=a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)-m\leqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

Для оценки интеграла в (4.17) можно применить Т.4.5. Следовательно,

$$\int_0^{\eta} V_0\left(t,\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)L^m\right)V_{k-1}(\eta-t,fL^{m'})\,dt=$$

$$=O\left(\eta\bar V_0\left(\eta,\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)L^m\right)\bar V_{k-1}(\eta,fL^{m'})\right). \tag{4.20}$$

Из последнего соотношения и (4.16) получаем:

$$|V_k(\eta,fL^{m+m'+1})|\leqslant O\left(\eta\bar V_0\left(\eta,\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)L^m\right)\right)\bar V_{k-1}(\eta,fL^{m'})+$$

$$+|V_k(\eta,f_1)|. \tag{4.21}$$

В силу Т.4.7 можно предполагать, что

$$\left.\begin{aligned}&\bar V_{k-1}(\eta,fL^{m'})=\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{m'}\bar V_k(\eta,f),\\ &\bar V_0\left(\eta,\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)L^m\right)=\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^m\bar V_0\left(\eta,\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right).\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

Из (4.21) и (4.22), имея в виду (4.14), получаем утверждение теоремы с $(m+m')$ вместо m.

Теорема 4.10. *Пусть $S_f\in\mathfrak{B}^*_{h,n}$. Тогда для любого фиксированного $N>0$ существует константа $K=K(f,N)$, такая, что*

$$|\Delta V_0(\eta,f)|\leqslant K(f,N)\eta^{n-1}|\Delta\eta|+O(\eta^{-N}).$$

Это неравенство равномерно по $\Delta(\eta)$ при $0\leqslant(\Delta\eta)\leqslant 1$.

Доказательство следует из Т.3.5^A и Т.4.8.

4.4. Оценка функций $\bar V_k$

Пусть $a_0(f)=\infty$, $S_f\in\mathfrak{B}^*_{h,n}$, $n\geqslant h$, $n\geqslant 1$. Из определения функций $V_k(\eta,f)$ и константы $a_k(f)$ имеем, что

$$a_0(f)=-\overline{\lim_{x\to\infty}}\ \frac{\left|\ln x^{-\theta}\sum\limits_{N\alpha\leqslant x}f(\alpha)\right|}{\ln\ln x}=\infty. \tag{*}$$

Для функций $S_f\in\mathfrak{B}_{h,n}$ и $\frac{x}{2}<y<x$ по Т.3.5 верно неравенство:

$$0<x^{-\theta}\sum_{y<N\alpha\leqslant x}f(\alpha)<e^{m\ln 2}\left(c_1(\ln x)^{n-1}+c_2(\ln x)^{-m+h-1}\right),$$

где $c_1>0$ и $c_2>0$ абсолютные постоянные, $m>0$ произвольное число. Из последнего неравенства следует, что условие (*) выполняется, если

$$m>M\ln\ln x,$$

$M>0$ – достаточно большое фиксированное число. В классе $\mathfrak{B}^*_{h,n}$ остаточный многочлен арифметической функции f тождественно равен нулю. Значит, если $a_0(f)=\infty$, $S_f\in\mathfrak{B}^*_{h,n}$, то

$$V_0(\eta, f)=O\left(\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{-M\ln\frac{\eta}{\theta}}\right),$$

$M>0$ – любое фиксированное число.

Теорема 4.11. *Пусть $S_f\in\mathfrak{B}^*_{h,n}$. Тогда для $k\geqslant 1$ и функции $\bar V_0\left(\eta, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)$ с конечным $a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)$ верно неравенство*

$$V_{k-1}(\eta, f)=O\left(\eta^{n-1}\bar V_0^k\left(\eta, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right). \tag{4.23}$$

Если $a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=\infty$, *то*

$$V_{k-1}(\eta, f)=O\left(\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{-M\ln\frac{\eta}{\theta}}\right) \tag{4.24}$$

для любого фиксированного $M>0$.

Доказательству теоремы предпошлем пару лемм.

Лемма 4.1. *Пусть $S_f\in\mathfrak{B}^*_{h,n}$. Тогда для $k\geqslant 1$ и любой мажоранты $\bar V_k(\eta, f)$ верна оценка:*

$$V_{k-1}(\eta, f)=O\left([\eta^{n-1}\bar V_k^k(\eta, f)]^{\frac{1}{k+1}}\right).$$

Доказательство. Пусть

$$V_k=V_k(\eta, f),\quad \bar V_k=\bar V_k(\eta, f).$$

По Т.4.1 и теореме о конечном приращении для $0<(\Delta\eta)\leqslant\sigma<1$ и $\eta<\xi<\eta+\sigma$ имеем, что

$$\sigma\,|V_{k-1}(\xi, f)-V_k(\xi, f)|=|\Delta V_k|=O(\bar V_k). \tag{4.25}$$

Пусть $k=1$. Из Т.4.10 вытекает, что для $0\leqslant\sigma\leqslant 1$

$$|V_0(\xi, f)-V_0(\eta, f)|=O(\sigma\eta^{n-1})+O(\eta^{-N}), \tag{4.26}$$

$N>0$ – любое фиксированное число. Отсюда и из (4.25) имеем

$$V_0=V_0(\eta, f)=O(\sigma\eta^{n-1})+O\left(\frac{\bar V_1}{\sigma}\right)+O(\eta^{-N}). \tag{4.27}$$

Пусть

$$\sigma=(\eta^{-n+1}\bar V_1)^{\frac{1}{2}}$$

и $N>0$ – достаточно большое. Тогда для случая $k=1$ лемма доказана. Для любого k лемма доказывается по индукции. Из

$$V_{k-1}=O([\eta^{n-1}\bar V_{k-1}^{k-1}]^{\frac{1}{k}}),\qquad k\geqslant 2 \tag{4.28}$$

и

$$\Delta V_{k-1}=O(\sigma\bar V_{k-2}),\qquad k\geqslant 2 \tag{4.29}$$

следует, что

$$V_{k-1}(\eta, f)=O(\sigma\bar V_{k-2})+O\left(\frac{\bar V_k}{\sigma}\right).$$

Пусть

$$\sigma=\left(\frac{\bar{V}_k}{\bar{V}_{k-2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Тогда

$$V_{k-1}=O\left([\bar{V}_{k-2}\,\bar{V}_k]^{\frac{1}{2}}\right). \qquad (4.30)$$

Из (4.28), учитывая (4.30), получаем утверждение леммы.

Лемма 4.2. *Пусть для некоторого фиксированного целого* $k \geqslant 1$

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \frac{|V_k(\eta, f)|}{(\eta\theta^{-1})^{n-1}\,\bar{V}_0^{k+1}\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)}=\infty,\quad S_f\in\mathfrak{B}^*_{h,\,n}. \qquad (4.31)$$

Тогда существует целое m *и арифметическая функция* f_1 *с*

$$S_{f_1}\in\mathfrak{B}^*_{h+m,\ n+m+1},$$

такие, что

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \frac{|V_k(\eta, f_1)|}{(\eta\theta^{-1})^{n+m}\,\bar{V}_0^{k+1}\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)}=\infty. \qquad (4.32)$$

Доказательство. Для

$$S_f\in\mathfrak{B}^*_{h,\,n},\quad S_{f_1}\in\mathfrak{B}^*_{h+m,\ n+m+1}$$

и некоторого целого m из Л.4.1 и Т.4.9 получаем оценку:

$$|V_k(\eta, f)|\leqslant O\left([\eta^{n-1}\,\bar{V}_k^k(\eta, f)]^{\frac{1}{k+1}}\ \bar{V}_0\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right)+$$

$$+\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{-m-1}|V_k(\eta, f_1)|. \qquad (4.33)$$

Пусть (4.32) неверно, т. е.,

$$\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{-m-1}|V_k(\eta, f_1)|=O\left(\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{n-1}\bar{V}_0^{k+1}\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right). \qquad (4.34)$$

Из условия (4.31) следует, что существует такая функция $\sigma(\eta)\to\infty$ при $\eta\to\infty$, что

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \frac{|V_k(\eta, f)|}{(\eta\theta^{-1})^{n-1}\,\bar{V}_0^{k+1}\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\sigma(\eta)}=1, \qquad (4.35)$$

$$\sigma(\eta)=\eta^b\,a(\eta), \qquad (4.36)$$

где b — неотрицательная константа, $a(\eta)$ — медленно меняющаяся функция.

Если $\{\eta'\}$ такая последовательность, что

$$V_k(\eta', f)\sim\left(\frac{\eta'}{\theta}\right)^{n-1}\bar{V}_0^{k+1}\left(\eta',\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\sigma(\eta'),$$

то из (4.33) и (4.34) имеем:

$$|V_k(\eta', f)|\leqslant C_1\left[\left(\frac{\eta'}{\theta}\right)^{n-1}\bar{V}_k^k(\eta', f)\right]^{\frac{1}{k+1}}\bar{V}_0\left(\eta',\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)+$$

$$+C_2\left(\frac{\eta'}{\theta}\right)^{n-1}\bar{V}_0^{k+1}\left(\eta',\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right),$$

C_1, C_2 — абсолютные постоянные. Заменив $V_k(\eta', f)$ эквивалентным выражением, имеем, что

$$\varlimsup_{\eta\to\infty} \frac{|V_k(\eta', f)|}{(\eta'\theta^{-1})^{n-1}\bar{V}_0^{k+1}\left(\eta', \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)(\sigma(\eta')-C_2)^{\frac{k+1}{k}}} > 0. \tag{4.37}$$

С другой стороны, из (4.35) и (4.36) следует, что существует некоторая мажоранта

$$\bar{V}_k(\eta, f)=\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{n-1}\bar{V}_0^{k+1}\left(\eta, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\sigma(\eta),$$

для которой формула (4.37) неверна. Тем лемма доказана.

Доказательство Т.4.11. Пусть соотношение (4.31) выполняется для некоторого фиксированного $k \geqslant 1$. Из Л.4.2 следует, что существует последовательность преобразований

$$\{S_{f_l}\} \text{ с } S_{f_l} \in \mathfrak{B}^*_{h+m_l,\ n-1+m_l+l},$$

для которых

$$\varlimsup_{\eta\to\infty} \frac{|V_k(\eta, f_l)|}{(\eta\theta^{-1})^{n-2+m_l+l}\bar{V}_0^{k+1}\left(\eta, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)} = \infty. \tag{4.38}$$

Вследствие Т.4.8 получаем, что если

$$S_{f_l} \in \mathfrak{B}^*_{h+m_l,\ n-1+m_l+l}, \text{ то } V(\eta, f_l) = O(\eta^{h+m_l-1}).$$

Далее, из Т.4.6 следует, что

$$V_k(\eta, f_l) = O(\eta^{h+m_l-1}). \tag{4.39}$$

Для выполнения (4.38), по (4.39) следует, что должно иметь место неравенство

$$h+m_l-1 \geqslant n-2+m_l+l-(k+1)a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right). \tag{4.40}$$

I. $a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right) < \infty$.

Тогда для достаточно больших l неравенство (4.40) не будет верно. Значит, тогда

$$V_k(\eta, f_l) = O\left(\eta^{n-2+m_l-l}\bar{V}_0^{k+1}\left(\eta, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right).$$

Это I часть Т.4.11 для $k \geqslant 2$. Если $k=1$, то из Л.4.1 и Т.4.11 в случае $k=2$ получаем доказательство теоремы.

II. $a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right) = \infty$.

По (4.21) для $k=1, m' > a_0$ и $a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=\infty$ выполняется неравенство

$$a_1(f)-(m+m'+1) \geqslant \min[(a_0(f)-m'),\ a_k(f_1)]. \tag{4.41}$$

Будем различать два случая.

1) $a_0(f)=\infty$.

В этом случае по Т.4.6 имеем, что

$$a_1(f)=\infty,\ V_1(\eta, f)=O\left(\bar{V}_0(\eta, f)\right),$$

2) $a_0(f) < \infty$.

Тогда и a_1 должно быть конечным. Взяв m' и m достаточно большие, получаем, что существует преобразование

$$S_{f_1} \in \mathfrak{B}^*_{h+m+m',\ n+m+m'+1},$$

для которого

$$a_1(f) \geqslant m+m'+1+a_1(f_1). \tag{4.42}$$

Из (4.42) по индукции получаем, что существует последовательность

$$\{S_{f_l}\} \text{ с } S_{f_l} \in \mathfrak{B}^*_{h+m_l,\ n-1+m_l+l},$$

для которых

$$a_1(f) \geqslant m_l+l-1+a_1(f_l). \tag{4.43}$$

В силу (4.39) должно выполняться неравенство

$$a_1(f_l) \geqslant 1-m_l-h.$$

Из (4.43) имеем, что $a_1(f_l) \geqslant l-h$. Так как l произвольно, то $a_1(f)=\infty$. Значит, если $a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=\infty$, то должно быть и $a_0(f)=\infty$. II часть теоремы доказана.

4.5. Оценка $\int\limits_{\eta}^{\eta'} V_0(t, f)\,dt$

Теорема 4.12. *Пусть* $S_f \in \mathfrak{B}^*_{h,n}$. *Тогда для* $\eta<\eta'<2\eta$ *имеем*

$$\int\limits_{\eta}^{\eta'} V_0(t, f)\,dt = O\left(\eta^{n-1}\bar{V}_0^2\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right).$$

Доказательство. Из Т.4.4 следует, что

$$\int\limits_{0}^{\eta'} V_0(t, f)\,dt = \sum_{j=1}^{k} V_j(\eta, f)+\frac{\theta}{C} V_{k+1}(\eta, f*1)+O\left(\eta^{-a_k(f)+\varepsilon}\right). \tag{4.44}$$

По Т.4.8 имеем, что

$$V_0\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=O(1).$$

А по Т.4.11 для $S_f \in \mathfrak{B}^*_{h,n}$, $k \geqslant 1$ следует оценка:

$$\left|\sum_{j=1}^{k} V_j(\eta, f)\right| \leqslant C_4\eta^{n-1}\bar{V}_0^2\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right);$$

C_4 — абсолютная постоянная.

Оценим второй член из (4.44). Преобразование $S_1 \in \mathfrak{B}_{0,1}$. Если $S_f \in \mathfrak{B}^*_{h,n}$, то существует такая константа a, чтобы

$$S_f S_1 - aS_1 \in \mathfrak{B}^*_{h,\ n+1}.$$

По Т.4.11

$$V_{k+1}(\eta, f*1)=V_{k+1}(\eta, a)+O\left(\eta^{n}\bar{V}_0^{k+2}\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right).$$

Из Т.4.6 имеем, далее, что

$$V_{k+1}(\eta,\ a)=a+O\ (1).$$

Тогда

$$V_{k+1}(\eta,\ f*1)=a+O\left(\eta^n\ \bar{V}_0^{k+2}\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right). \tag{4.45}$$

При

$$k>a_0^{-1}\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)$$

получаем, что

$$\eta^n\ \bar{V}_0^{k+2}\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=o\left(\eta^{n-1}\ \bar{V}_0^2\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right).$$

Подставляя полученные оценки в (4.44), находим, что

$$\int_0^\eta V_0(t,\ f)\,dt=a+O\left(\eta^{n-1}\ \bar{V}_0^2\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right);$$

a – константа. Из этого соотношения утверждение теоремы следует немедленно.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 30.IX.1969

Литература

14. J. Karamata, Sur une made de croissance reguliere theoremes fondamentaux, Bull. Soc. Math. de France, 61 (1933), 55–62.
15. Ю. В. Линник, И. А. Ибрагимов, Независимые и стационарно-связанные величины М., „Наука", 1965.

LAISVOS SKAITINĖS PUSGRUPĖS GENERUOJANČIŲ ELEMENTŲ PASISKIRSTYMO KLAUSIMU. II

D. Cibulskytė

(*Reziumė*)

Tegul

$$S_f=S_\mu^h\prod_{j=1}^k S_{L^j}^{h_j},\quad \sum_{j=1}^k h_j\geqslant h,\quad \sum_{j=1}^k (j+1)\,h_j-h=n,\quad h\geqslant 1,\quad n\geqslant h.$$

Skaičius h vadinamas sumos S_f eile, o n – jos svoriu. Sakysime, kad S_f priklauso klasei $\mathfrak{B}_{h,\,n}$ $(h\geqslant 1,\ n\geqslant h)$, jei S_f yra tiesinė kombinacija baigtinio skaičiaus sumų S_g, kurių svoris $\leqslant n$ ir eilė $\leqslant h$. Klasę $\mathfrak{B}_{h,\,n}^*$ sudaro sumos, tenkinančios sąlygą:

$$S_f\,\Phi(x)=O\ (x^\theta\ln^{h-1}x),\quad \Phi\in\mathfrak{N}.$$

Dar apibrėžiamos funkcijos

$$V_k(\eta,\ f)=\frac{1}{k!}\ e^{-\eta}\,S_f L^k\left(e^{\frac{\eta}{\theta}}\right)$$

ir $\bar{V}_k(\eta,\ f)$, turinčios savybę:

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}}\ |\,V_k\ (\eta,\,f)\,|\,|\ \bar{V}_k(\eta,f)=1,$$

kur f – aritmetinė funkcija, o $k\geqslant 0$ – sveikas skaičius. Šioje dalyje įrodoma

Teorema. *Tegul* $S_f\in\mathfrak{B}_{h,\,n}^*$,

$$a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=-\overline{\lim_{\eta\to\infty}}\ \ln\left|\ V_0\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right|\Big/\ (\ln\eta-\ln\theta).$$

Jei $a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)<\infty$ *ir* $k\geqslant 1$, *tai*

$$V_{k-1}(\eta, f)=O\left(\eta^{n-1}\bar{V}_0^k\left(\eta, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right).$$

Jei $a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=\infty$ *ir* $k\geqslant 1$, *tai*

$$V_{k-1}(\eta, f)=0\left(\left(\frac{\eta}{\Theta}\right)^{-M\ln\frac{\eta}{\theta}}\right),$$

kur $M>0$ *— bet koks fiksuotas skaičius.*

ÜBER VERTEILUNG DER BASISELEMENTEN IN DEN FREIEN ZAHLENHALBGRUPPEN. II

D. Cibulskytė

(*Zusammenfassung*)

Es sei

$$S_f=S_\mu^h\prod_{j=1}^{k}S_{L^j}^{h_j},\quad \sum_{j=1}^{k}h_j\geqslant h,\quad \sum_{j=1}^{k}(j+1)h_j-h=n,\quad h\geqslant 1,\quad n\geqslant h.$$

Die Zahl h heisst die Ordnung der Summe S_f und n das Gewicht derselber Summe. Die Summe S_f gehört zu einer Klasse $\mathfrak{B}_{h,n}$, wenn S_f als eine lineare Relation der endlichen Zahl von den Summen S_g mit der Ordnung $\leqslant h$ und mit dem Gewicht $\leqslant n$ darstellbar ist. Die Klasse $\mathfrak{B}_{h,n}^*$ ist von solchen Summen S_f gebildet, für die die Bedingung

$$S_f\Phi(x)=O(x^\theta\ln^{h-1}x),\quad \Phi\in\mathfrak{N}$$

erfüllt wird.

Es sei f eine zahlentheoretische Funktion, $k\geqslant 0$ eine ganze Zahl,

$$V_k(\eta, f)=\frac{1}{k!}e^{-\eta}S_fL^k(e^{\frac{\eta}{\theta}})$$

und die Funktionen $\bar{V}_k(\eta, f)$, für die

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}}|V_k(\eta,f)|/\bar{V}_k(\eta,f)=1$$

ist.

Es wird das Theorem bewiesen.

Es sei $S_f\in\mathfrak{B}_{h,n}^*$,

$$a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=-\overline{\lim_{\eta\to\infty}}\ln\left|V_0\left(\eta, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right|/(\ln\eta-\ln\theta).$$

Wenn $a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)<\infty$ *und* $k\geqslant 1$, *dann*

$$V_{k-1}(\eta, f)=O\left(\eta^{n-1}\bar{V}_0^k\left(\eta, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right).$$

Wenn $a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=\infty$ *und* $k\geqslant 1$, *dann*

$$V_{k-1}(\eta, f)=0\left(\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{-M\ln\frac{\eta}{\theta}}\right),$$

wo $M>0$ *beliebige Konstante ist.*