X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1970

УДК–519.21

КРИТЕРИИ МЕТРИЧЕСКОЙ ТРАНЗИТИВНОСТИ ГАУССОВСКИХ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

А. А. ТЕМПЕЛЬМАН

§ 1. Введение

В статистической теории турбулентности и в различных вопросах статистики представляют интерес эргодические свойства однородных случайных полей и, в частности, вопрос о том, когда такие поля метрически транзитивны (эргодичны). Для гауссовских стационарных процессов ответ был получен в работах [3], [17], [28]: непрерывный в среднем квадратичном гауссовский стационарный случайный процесс метрически транзитивен тогда и только тогда, когда его спектральная мера непрерывна. Настоящая работа посвящена обобщению этого критерия на произвольные гауссовские однородные случайные функции. В § 2 приведены некоторые сведения из теории представлений групп, используемые в дальнейшем. В § 3 дано общее определение однородной случайной функции и в качестве примеров рассматриваются одномерные и многомерные однородные случайные поля на группах и однородных пространствах и однородные обобщенные случайные поля на евклидовых пространствах. В § 4 вводится понятие однородной функции с конечномерно непрерывным („К-непрерывным") и конечномерно дискретным („К-дискретным") спектром. Ввиду отсутствия единой формы спектрального представления для однородных случайных функций, мы определяем это понятие в неспектральных терминах и затем показываем, как его можно выразить в терминах спектра однородных случайных полей. В § 5 даны определение среднего значения однородного случайного поля „по времени" и критерий линейной транзитивности поля.

Основное содержание работы составляет § 6. Здесь сформулирован и доказан общий критерий метрической транзитивности гауссовских однородных функций и дана его конкретизация для гауссовских однородных полей. Основные результаты были ранее опубликованы в краткой заметке [13]; некоторые частные результаты передоказывались рядом авторов (см., например, [23]).

§ 2. Необходимые сведения из теории групп

Ниже приведены результаты теории представлений групп, которые будут использованы в дальнейшем.

1. Пусть каждому элементу g группы G поставлено в соответствие преобразование S_g множества K так, что

1) единице e группы G соответствует тождественное преобразование множества K;

2) $S_{g_1}S_{g_2}=S_{g_1}S_{g_2}$;

в этом случае говорят, что соответствие S_g, $g\in G$, есть представление группы G в множестве K.

2. Представление U_g, $g\in G$, в гильбертовом пространстве H называется унитарным, если все преобразования U_g суть унитарные линейные операторы в H. Унитарное представление U_g, $g\in G$, топологической группы G называется непрерывным, если при любых x, $y\in H$ числовая функция $(U_g\,x,\,y)$, определенная на группе G, непрерывна. Подпространство $L\subset H$ называется инвариантным относительно представления U_g, $g\in G$, если для любого $g\in G$ из того, что $x\in L$, следует, что и $U_g x\in L$. Представление U_g, $g\in G$, в гильбертовом пространстве H называется неприводимым, если в H отсутствуют нетривиальные подпространства*), инвариантные относительно U_g, $g\in G$. Два представления: U_g, $g\in G$, в H_1 и V_g, $g\in G$, в H_2 называются эквивалентными, если существует изометрическое отображение I гильбертова пространства H_2 на гильбертово пространство H_1 такое, что $V_g=I^{-1}\,U_g I$.

3. Пусть U_g, $g\in G$, – унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H. Функция $\varphi(g)=(U_g\,x,\,y)$ называется коэффициентом (представления U_g, $g\in G$, относительно упорядоченной пары векторов x, $y\in H$). Всякая функция вида $\overline{(U_g\,x,\,y)}$ является коэффициентом представления U_g^{-1}, $g\in G$, в H относительно y, $x\in H$. Если $U_g^{(1)}$, $g\in G$, и $U_g^{(2)}$, $g\in G$, – унитарные представления группы G в пространствах H_1 и H_2, то всякая функция вида $(U_g^{(1)}x_1,\,y_1)\,(U_g^{(2)}x_2,\,y_2)$, где x_1, $y_1\in H_1$, x_2, $y_2\in H_2$, является коэффициентом представления $U_g^{(1)}\otimes U_g^{(2)}$ в тензорном произведении $H_1\otimes H_2$ пространств H_1 и H_2 относительно векторов $x_1\otimes x_2$, $y_1\otimes y_2$ (см., например, [25]). Из сказанного ясно, что все функции вида $|(U_g x,\,y)|^2$ являются коэффициентами.

4. Пусть вновь U_g, $g\in G$, – унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H. Вектор $x\in H$ называется инвариантным относительно этого представления, если $U_g x=x$ для всех $g\in G$. Совокупность всех инвариантных относительно представления U_g, $g\in G$, векторов является подпространством I_{U_g} пространства H. Обозначим через $\bar{U}$ оператор проектирования в H на подпространство I_{U_g}. Тогда для любого $x\in H$ и любого $\varepsilon>0$ существует конечный набор элементов $g_1,\,\ldots,\,g_k$ таких, что при любом $g\in G$

$$\left\|\,\bar{U}x-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}U_{gg_i}x\,\right\|<\varepsilon$$

(см. [21], [22], [27]). Вектор $\bar{U}x$ называется средним значением орбиты вектора x, т. е. множества $\{U_g x,\ g\in G\}$, по группе G и обозначается $\underset{g}{M}\,[U_g x]$.

Аналогично определяется среднее значение $\underset{g}{M}\,[\varphi(g)]$ для любого коэффициента $\varphi(g)$. Среднее значение можно продолжить до непрерывного линейного

*) Т. е. подпространства, отличные от $\{0\}$ и самого пространства H.

функционала на равномерно замкнутой линейной оболочке множества всех коэффициентов. Основные свойства среднего значения:

1) при любых комплексных α, β

$$\underset{g}{\mathbf{M}}\,[\alpha\varphi(g)+\beta\psi(g)]=\alpha\underset{g}{\mathbf{M}}\,[\varphi(g)]+\beta\underset{g}{\mathbf{M}}\,[\psi(g)];$$

2) $\left|\underset{g}{\mathbf{M}}\,[\varphi(g)]\right|\leqslant\sup\limits_{g\in G}|\varphi(g)|$;

3) $\left|\underset{g}{\mathbf{M}}\,[\varphi(g)\psi(g)]\right|\leqslant\left(\underset{g}{\mathbf{M}}\,[|\varphi(g)|^2]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\underset{g}{\mathbf{M}}\,[|\psi(g)|^2]\right)^{\frac{1}{2}}$;

4) $\underset{g}{\mathbf{M}}\,[\varphi(fgh)]=\underset{g}{\mathbf{M}}\,[\varphi(g)]$ при любых $f,\ h\in G$;

5) $\underset{g}{\mathbf{M}}\,[\varphi(g)]\geqslant 0$, если $\varphi(g)\geqslant 0$.

5. Вектор $x\in H$ называется исчезающим вектором (Fluchtvektor — см. [27]) относительно унитарного представления U_g, $g\in G$, если $\underset{g}{M}\,[\,|(U_gx,\ y)|^2]=0$ для всех вектров $y\in H$; вектор x называется почти-периодическим относительно унитарного представления U_g, $g\in G$, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такое конечное покрытие группы ($G=A_1\cup\ \ \cup A_n$), что

$$\|U_gx-U_fx\|<\varepsilon$$

коль скоро $g,\ f\in A_i$, $i=1,\ \ n$. Числовая функция $\varphi(g)$, $g\in G$, называется исчезающей, если существует $\underset{g}{M}\,[\,|\varphi(g)|^2]=0$; числовая функция $\varphi(g)$, $g\in G$, называется почти-периодической, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такое конечное покрытие группы $G\left(G=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)$, что $|\varphi(hg)-\varphi(hf)|<\varepsilon$ для всех $h\in G$, если $g,\ f\in A_i$ (см. [5]).

Все коэффициенты любого бесконечномерного неприводимого унитарного представления — исчезающие функции; коэффициенты любого конечномерного унитарного представления — почти-периодические функции.

Всякое унитарное представление U_g, $g\in G$, в гильбертовом пространстве H однозначно определяет разложение этого пространства в ортогональную прямую сумму двух инвариантных относительно U_g, $g\in G$, подпространств: подпространства C всех исчезающих относительно U_g, $g\in G$, векторов и подпространства D всех почти-периодических относительно U_g, $g\in G$, векторов; подпространство D является дискретной суммой инвариантных относительно U_g, $g\in G$, конечномерных подпространств, в которых представление U_g, $g\in G$, неприводимо (см. [25], [26], [27]).

6. Будем говорить, что представление U_g, $g\in G$, имеет K-непрерывный*) спектр, если все векторы гильбертова пространства H, в котором действует это представление, являются исчезающими относительно U_g, $g\in G$; унитарное представление U_g, $g\in G$, в гильбертовом пространстве H имеет K-дискретный спектр**), если все векторы пространства H являются почти-периодическими

*) Подробнее — „конечномерно-непрерывный спектр".

**) Определение непрерывной прямой суммы унитарных представлений см., например, [6] и [7].

относительно этого представления. Последнее утверждение п. 5 мы можем теперь сформулировать так: всякое унитарное представление U_g, $g \in G$, в гильбертовом пространстве H разлагается в прямую сумму двух унитарных представлений: представления $U_g^{(c)}$, $g \in G$, имеющего K-непрерывный спектр, и представления $U_g^{(d)}$, $g \in G$, имеющего K-дискретный спектр; представление $U_g^{(d)}$, $g \in G$, разлагается в дискретную прямую сумму конечномерных неприводимых унитарных представлений.

7. Пусть G — сепарабельная локально бикомпактная группа типа 1 (см., например, [6], [9]) и U_g, $g \in G$, — непрерывное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H. Тогда (см. [8], [9]) представление U_g, $g \in G$, может быть реализовано в виде (вообще говоря, непрерывной) прямой суммы*): $U_g = \int_\Lambda U_g(\lambda)\, \mu(d\lambda)$ унитарных представлений $U_g(\lambda)$, $g \in G$, причем существует такое множество $\Lambda_0 \subset \Lambda$, $\mu(\lambda_0) = 0$, что при любых λ_1, λ_2, $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$.

1) $U_g(\lambda) = \sum_{k=1}^{d_\lambda} U_g^{(k)}(\lambda)$, где $U_g^{(k)}(\lambda)$, $g \in G$, — непрерывные неприводимые унитарные представления, $d_\lambda \in \overline{1, \infty}$ — „кратность" представления $U_g^{(k)}(\lambda)$;

2) представления $U_g^{(k_1)}(\lambda)$ и $U_g^{(k_2)}(\lambda)$, k_1, $k_2 \in \overline{1, d_\lambda}$, эквивалентны;

3) представления $U_g^{(k_1)}(\lambda_1)$ и $U_g^{(k_2)}(\lambda_2)$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $k_1 \in \overline{1, d_{\lambda_1}}$, $k_2 \in \overline{1, d_{\lambda_2}}$ неэквивалентны.

Пусть M — множество всех точек разрыва меры $\mu(\cdot)$, т. е. $\mu(\{\lambda_i\}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_i \in M$; $K(J)$ — множество всех точек $\lambda_i \in M$ таких, что представления $U_g^{(k)}(\lambda_i)$, $g \in G$, конечномерны (бесконечномерны); $L = \Lambda \setminus K = M \cup I$;

$$\mu_L(A) = \mu(A \cap L), \quad \mu_K(A) = \mu(A \cap K).$$

Тогда

$$U_g = \int_\Lambda U_g(\lambda)\, \mu_L(d\lambda) \oplus \int_\Lambda U_g(\lambda)\, \mu_K(d\lambda),$$

где первое слагаемое — непрерывное унитарное представление, имеющее K-непрерывный спектр, а второе слагаемое — непрерывное унитарное представление, имеющее K-дискретный спектр.

8. Всякий коэффициент однозначно представим в виде:

$$\varphi(g) = \varphi_c(g) + \varphi_d(g),$$

где $\varphi_c(g)$ — исчезающий коэффициент, $\varphi_d(g)$ — почти-периодический коэффициент, причем $\varphi_d(g) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varphi_i(g)$, где — „элементарные" коэффициенты, соответствующие конечномерным неприводимым унитарным представлениям (см. [25]).

Важный класс коэффициентов составляют положительно определенные функции на группе G, т. е. функции $p(g)$, для которых при любых конечных наборах элементов группы g_1, g_n и комплексных чисел α_1, α_n имеем: $\sum_{i,j=1}^{n} p(g_i^{-1} g_j)\, \alpha_i \alpha_j \geqslant 0$; функция $p(g)$, $g \in G$, является положительно определен-

*) Подробнее — „конечномерно-дискретный спектр"; Макки [10] использует термин „чисто дискретный спектр".

ной тогда и только тогда, когда она имеет вид: $p(g)=(U_g x, x)$, где U_g, $g\in G$, — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H. Положительно определенная функция $p(g)$ называется элементарной, если соответствующее ей унитарное представление U_g, $g\in G$, неприводимо.

Годман [25] показал, что для положительно определенной функции $p(g)=(U_g x, x)$, $x\in H$, среднее значение

$$\underset{g}{\mathbf{M}}[p(g)]=\|\underset{g}{\mathbf{M}}[U_g x]\|^2.$$

9. Множество X, в котором действует транзитивная группа „движений" G, называется однородным пространством. Подгруппа Γ группы G называется стационарной (относительно точки $x_0\in X$), если $gx_0=x_0$ для всех $g\in\Gamma$. Соответствие $x\leftrightarrow\{g : gx_0=x\}$ позволяет отождествить пространство X с множеством G/Γ всех левых классов смежности группы G по подгруппе Γ. В дальнейшем мы полагаем, что G — топологическая группа, а стационарная подгруппа Γ бикомпактна. Топология группы G индицирует топологию в пространстве $X=G/\Gamma$.

Всякую непрерывную (измеримую) функцию на однородном пространстве $X=G/\Gamma$ можно рассматривать как непрерывную (измеримую) функцию на группе G, постоянную на левых классах смежности G по Γ, и обратно. Функцию $\varphi(x)$, $x\in X$, мы назовем положительно определенной, если соответствующая функция $\psi(g)$ на группе является положительно определенной. Непрерывная функция $\varphi(x_1, x_2)=\psi(g_1^{-1}g_2)$ при $x_1=g_1\Gamma$, $x_2=g_2\Gamma$ называется сферической, если $\varphi(g)$ — (непрерывная) элементарная положительно определенная функция, постоянная на двусторонних классах смежности $\Gamma g\Gamma$. Из сказанного в п. 4 следует, что существуют средние значения $\underset{x}{M}[\varphi(x_1, x_2)]=\underset{g}{M}[\psi(g)]$ и $\underset{x}{M}[|\varphi(x_1,x_2)|^2]=\underset{g}{M}[|\psi(g)|^2]$. Функция $\varphi(x)$, $x\in X$, называется почти-периодической, если для всякого $\varepsilon>0$ существует конечное покрытие пространства $X\left(X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)$ такое, что $|\varphi(gx)-\varphi(gy)|<\varepsilon$ для всех $g\in G$, если $x, y\in A_i$; в этом случае соответствующая функция $\psi(g)$ на группе G также является почти-периодической. Отсюда и из п. 5 вытекает в случае сферических функций эквивалентность следующих свойств: 1) функция $\varphi(x_1, x_2)$ почти-периодична; 2) $\underset{x}{M}[|\varphi(x_1, x_2)|^2]>0$; 3) функции $\varphi(x_1, x_2)$ соответствует конечномерное унитарное представление группы движений.

Однородное пространство $X=G/\Gamma$ называется симметрическим, если в его группе движений G определена инволюция, т. е. автоморфизм $g\to g'$ такой, что 1) $(g')'=g$ и 2) $f'=f$ для любого $f\in\Gamma$.

§ 3. Однородные случайные функции

Пусть S_g, $g\in G$, — представление группы G в некотором множестве K.

Определение 3.1. Случайная функция $\xi(k)$, $k\in K$, называется однородной в узком смысле (относительно представления S_g, $g\in G$), если при любых $k_1, \quad k_n\in K$ распределение случайного вектора $\left(\xi(S_g k_1), \quad \xi(S_g k_n)\right)$ не зависит от $g\in G$.

Определение 3.2. Случайная функция $\xi(k)$, $k \in K$, называется однородной в широком смысле (относительно представления S_g, $g \in G$), если при любых $g \in G$, k, $l \in K$

$$\mathbf{E}\,|\,\xi(k)\,|^2 < \infty, \quad \mathbf{E}\xi(S_g k) \equiv \mathbf{E}\xi(k)$$

и

$$\mathbf{E}\,\xi(S_g k)\,\overline{\xi(S_g l)} = \mathbf{E}\xi(k)\,\overline{\xi(l)}$$

($\mathbf{E}\xi$ — математическое ожидание случайной величины ξ).

Очевидно, если случайная функция однородна в узком смысле относительно некоторого представления и $\mathbf{E}\,|\,\xi(k)\,|^2 < \infty$, то она однородна и в широком смысле относительно этого представления.

Пример 3.1. Пусть S_g – преобразование левого сдвига группы G на элемент $g \in G$: $S_g f = gf$ при любых g, $f \in G$; S_g, $g \in G$, является представлением группы G в этой же группе. Случайная функция $\xi(g)$, $g \in G$, однородная относительно представления S_g, $g \in G$, называется случайным полем на группе G, однородным относительно левых сдвигов. Так, например, $\xi(g)$, $g \in G$, – однородное в широком смысле относительно левых сдвигов поле на группе G, если

$$\mathbf{E}\,|\,\xi(g)\,|^2 < \infty, \quad \mathbf{E}\xi(g) \equiv \mathrm{const};$$

$$\mathbf{E}\xi(gg_1)\,\overline{\xi(gg_2)} = \mathbf{E}\xi(g_1)\,\overline{\xi(g_2)}$$

при любых g_1, g_2, $g \in G$. Аналогично определяются случайные поля, однородные относительно правых сдвигов. Основной характеристикой однородного в широком смысле случайного поля является его корреляционная функция $R(g) = \mathbf{E}\xi(g)\,\overline{\xi(e)}$: как известно, корреляционная функция всякого такого поля является положительно определенной; обратно, всякая положительно определенная функция является корреляционной функцией некоторого однородного случайного поля.

Пример 3.2. Пусть $X = G/\Gamma$ – однородное пространство. Рассмотрим в X естественное представление группы движений G: $S_g x = gx$. Случайная функция $\xi(x)$, $x \in X$, однородная относительно этого представления, называется однородным случайным полем на однородном пространстве X. Так, например, случайное поле $\xi(x)$ на однородном пространстве X называется однородным в широком смысле, если $\mathbf{E}\xi(x) \equiv \mathrm{const}$ и при любых $g \in G$, x_1, $x_2 \in X$

$$\mathbf{E}\xi(gx_1)\,\overline{\xi(gx_2)} = \mathbf{E}\xi(x_1)\,\overline{\xi(x_2)}.$$

Основной характеристикой такого поля является корреляционная функция $B(x_1, x_2) = \mathbf{E}\xi(x_1)\,\overline{\xi(x_2)}$, причем $B(gx_1, gx_2) = B(x_1, x_2)$.

Пример 3.3. Пусть G – группа; $K = G \times \{1, \quad n\} = \{(g, r), r \in \overline{1, n}, g \in G\}$; положим $S_f(g, r) = (gf, r)$, $r \in \overline{1, n}$. Случайная функция $\xi(k) \equiv \xi_i(g)$, $(g, i) \in K$, однородная относительно представления S_f, $f \in G$, называется n-мерным случайным полем на группе G, однородным относительно левых сдвигов. Так, например, $\vec{\xi}(g) = (\xi_1(g), \ldots, \xi_n(g))$ – однородное в широком смысле относительно левых сдвигов n-мерное случайное поле на группе G, если для любых g, g_1, $g_2 \in G$, i, $j = 1, \quad n$

$$\mathbf{E}\,|\,\xi_i(g)\,|^2 < \infty; \quad \mathbf{E}\xi_i(g) \equiv \mathbf{E}\xi_i(e); \quad \mathbf{E}\xi_i(gg_1)\,\overline{\xi_j(gg_2)} = E\xi_i(g_1)\,\overline{\xi(g_2)}.$$

Аналогично определяются n-мерные случайные поля, однородные относительно правых сдвигов. Основной характеристикой однородного в широком смысле n-мерного случайного поля на группе G является матричная корреляционная функция $\| R_{ij}(g) \|$, где $R_{ij}(g)=E\xi_i(g)\overline{\xi_j(e)}$.

Пример 3.4. Пусть K – пространство бесконечно дифференцируемых финитных комплексно-значных функций $\varphi(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_m)$, определенных на m-мерном евклидовом пространстве R^m; введем в K топологию Шварца. Вектору $y\in R^m$ поставим в соответствие преобразование $S_y\varphi(x)=\varphi(x-y)$. Легко видеть, что соответствие Sy, $y\in R^m$, есть представление аддитивной группы R^m в пространстве K. Пусть $\xi(\varphi)$, $\varphi\in K$, –обобщенное случайное поле на R^m, т. е. непрерывный в среднем квадратичном линейный функционал на пространстве K со значениями в гильбертовом пространстве H комплексных величин со скалярным произведением $(\eta, \zeta)=E\eta\bar{\zeta}$, $\eta, \zeta\in H$. Обобщенное случайное поле $\xi(\varphi)$ называется однородным, если случайная функция $\xi(\varphi)$, $\varphi\in K$, является однородной относительно представления S_y, $y\in R^m$. Например, обобщенное случайное поле $\xi(\varphi)$ является однородным в широком смысле, если при любых $y\in R^m$, φ, $\psi\in K$

$$\mathbf{E}\xi\big(\varphi(x-y)\big)=\mathbf{E}\xi\big(\varphi(x)\big);\ \mathbf{E}\xi\big(\varphi(x-y)\big)\overline{\xi\big(\psi(x-y)\big)}=\mathbf{E}\xi(\varphi)\overline{\xi(\psi)}.$$

Основной характеристикой такого поля является корреляционная обобщенная функция $R(\varphi, \psi)=\mathbf{E}\xi(\varphi)\overline{\xi(\psi)}$.

Определение 3.3. Случайная функция $\xi(k)$, $k\in K$, называется гауссовской, если каковы бы ни были $k_1, \ldots, k_n\in K$ $(n\in\overline{1, \infty})$ распределения случайных векторов $(\xi(k_1), \ldots, \xi(k_n))$ являются гауссовскими.

Для вещественных гауссовских случайных функций понятия однородности в широком и в узком смыслах совпадают.

Изучение любой однородной случайной функции $\xi(k)$, $k\in K$, можно заменить изучением центрированной функции $\xi(k)-\mathbf{E}\xi(k)$, $k\in K$; поэтому мы всюду в дальнейшем полагаем $\mathbf{E}\xi(k)\equiv 0$.

§ 4. Однородные случайные функции с K-непрерывным спектром

Пусть $\xi(k)$, $k\in K$, – случайная функция, однородная в широком смысле относительно представления S_g группы G в множестве K; $H_\xi^{(0)}$ – линейная оболочка случайных величин $\xi(k)$, $k\in K$; H_ξ – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\eta, \zeta)=\mathbf{E}\eta\bar{\zeta}$, полученное путем пополнения множества $H_\xi^{(0)}$ и отождествления эквивалентных случайных величин. Как и всюду, мы полагаем $\mathbf{E}\xi(k)=0$; тогда $\mathbf{E}\eta=0$ для всех $\eta\in H_\xi$. Рассмотрим в H_ξ линейные операторы U_g, $g\in G$, определяемые соотношениями: $U_g\xi(k)=\xi(S_gk)$, $k\in K$. Легко видеть, что соответствие U_g, $g\in G$, есть унитарное представление группы G в H_ξ. Из п. 4 § 2 вытекает, что при любых k, $l\in K$ существует среднее значение

$$\underset{g}{\mathbf{M}}\,[\,|\,\mathbf{E}\xi(k)\,\overline{\xi(S_gl)}\,|^2].$$

Определение 4.1. Будем говорить, что однородная относительно представления S_g, $g\in G$, случайная функция имеет K-непрерывный спектр (см. сноску на стр. 817), если $M\,[\,|\,E\xi(k)\,\xi(S_gl)\,|^2]=0$ для любых k, $l\in K$; однородная относительно S_g, $g\in G$, случайная функция имеет K-дискретный спектр, если для всяких $k\in K$ и $\varepsilon>0$ существует конечное покрытие группы G: $G=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, такое что $\mathbf{E}\,|\,\xi(S_gk)-\xi(S_fk)\,|^2<\varepsilon$ коль скоро $g,\ f\in A_i$ $(i\in\overline{1,\ n})$.

Теорема 4.1. *Однородная случайная функция $\xi(k)$, $k\in K$, имеет K-непрерывный (K-дискретный) спектр тогда и только тогда, когда соответствующее ей унитарное представление U_g, $g\in G$, в гильбертовом пространстве H_ξ имеет K-непрерывный (K-дискретный) спектр.*

Доказательство. Достаточность условий очевидна. Покажем их необходимость. Пусть случайная функция $\xi(k)$, $k\in K$, имеет K-непрерывный спектр. Если $\zeta=\sum_{i=1}^{m} c_i\xi(k_i)$, то, используя неравенство Коши–Буняковского и свойства среднего значения $\underset{g}{M}[\cdot]$, получаем:

$$\underset{g}{\mathbf{M}}\left[\left|\left(\zeta,\ U_g\xi(k)\right)\right|^2\right]=\underset{g}{\mathbf{M}}\left[\left|\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\xi(k_i),\ U_g\xi(k)\right)\right|^2\right]=$$

$$=\underset{g}{\mathbf{M}}\left[\left|\sum_{i=1}^{m} c_i\left(\xi(k_i),\ U_g\xi(k)\right)\right|^2\right]\leqslant$$

$$\leqslant\underset{g}{\mathbf{M}}\left[\sum_{i=1}^{m}|c_i|^2\sum_{i=1}^{m}\left|\left(\xi(k_i),\ U_g\xi(k)\right)\right|^2\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}|c_i|^2\sum_{i=1}^{m}\underset{g}{\mathbf{M}}\,|\,E\xi(k_i)\overline{\xi(S_gk)}\,|^2=0.$$

Легко видеть, что функции $|\,(\zeta,\ U_g\xi(k))\,|^2$ непрерывны относительно переменного $\zeta\in H_\xi$ равностепенно по $g\in G$. Поскольку функционал $\underset{g}{\mathbf{M}}[\ \ ]$ непрерывен на равномерно замкнутой линейной оболочке коэффициентов, $f(\zeta)=\underset{g}{\mathbf{M}}[\,|\,(\zeta,\ U_g\xi(k))\,|^2]$ — непрерывная функция от $\zeta\in H_\xi$. Так как $f(\zeta)\equiv 0$ на множестве $H_\xi^{(0)}$, плотном в пространстве H_ξ, то $\underset{g}{\mathbf{M}}[\,|\left(\zeta,\ U_g\xi(k)\right)|^2]=0$ для всех $\zeta\in H_\xi$ и всех $k\in K$. Таким образом, все векторы $\xi(k)$, $k\in K$, являются исчезающими относительно представления U_g. Отсюда следует, что и все векторы пространства H_ξ, порожденного векторами $\xi(k)$, $k\in K$, являются исчезающими относительно представления U_g, $g\in G$, т. е. что это представление имеет K-непрерывный спектр. Если однородная функция $\xi(k)$, $k\in K$, имеет K-дискретный спектр, то все векторы $\xi(k)$, $k\in K$, являются почти-периодическими относительно U_g, $g\in G$. Отсюда, как и выше, заключаем, что все векторы пространства H_ξ являются почти-периодическими относительно U_g, $g\in G$, т. е. что это представление U_g имеет K-дискретный спектр.

Теорема 4.2. *Всякую однородную случайную функцию $\xi(k)$, $k\in K$, можно (и притом единственным образом) представить в виде*

$$\xi(k)=\xi_c(k)+\xi_d(k),$$

где $\mathbf{E}\xi_c(k)\overline{\xi_d(l)}=0$ при всех k, $l\in K$ и $\xi_c(k)$, $\xi_d(k)$ суть, соответственно, *однородные относительно того же представления функции с K-непрерывным и K-дискретным спектром.*

Доказательство. Разложим гильбертово пространство H_ξ в ортогональную прямую сумму относительно унитарного представления U_g, $g\in G : H_\xi = C\oplus D$ (см. п. 5 § 2). Пусть $\xi_c(k)$ и $\xi_d(k)$ – проекции вектора $\xi(k)\in H_\xi$ на подпространства C и D, соответственно. Очевидно, $\xi(k)=\xi_c(k)+\xi_d(k)$ и $\mathbf{E}\xi_c(k)\overline{\xi_d(l)}=0$ при $k, l\in K$. Так как C и D инвариантны относительно представления U_g, $g\in G$, то $U_g\xi_c(k)\in C$ и $U_g\xi_d(k)\in D$ и из того, что $\xi(S_gk)= U_g\xi(k)=U_g\xi_c(k)+U_g\xi_d(k)$, следует:

$$\begin{aligned}\xi_c(S_gk)&=U_g\xi_c(k),\\ \xi_d(S_gk)&=U_g\xi_d(k).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Из соотношений (4.1) и унитарности представления U_g, $g\in G$, в пространстве H_ξ следует, что случайные функции $\xi_c(k)$ и $\xi_d(k)$ однородны относительно представления S_g, $g\in G$.

Пример 4.1. Разложению однородного случайного поля

$$\xi(g)=\xi_c(g)+\xi_d(g)$$

на компоненты с K-непрерывным и K-дискретным спектрами соответствует разложение его корреляционной функции $R(g)$ в сумму корреляционной функции $R_c(g)$ поля $\xi_c(g)$ и корреляционной функции $R_d(g)$ поля $\xi_d(g)$:

$$R(g)=R_c(g)+R_d(g);\tag{4.2}$$

это разложение является, с другой стороны, годмановским разложением функции $R(g)$ на исчезающую компоненту $R_c(g)$ и почти-периодическую компоненту $R_d(g)$ (см. п. 8 § 2).

Если $\xi(g)$ – непрерывное в среднем квадратичном однородное случайное поле на сепарабельной локально бикомпактной группе типа 1, то, как легко видеть из п. 7 § 2 (см. также [8], [9]), функция $R(g)$ допускает следующее спектральное представление:

$$R(g)=\int\limits_\Lambda \sum_{k=1}^{d_\lambda} \varphi_\lambda^{(k)}(g)\,\mu(d\lambda),\tag{4.3}$$

где $\varphi_\lambda^{(k)}(g)$, $k\in\overline{1, d_\lambda}$, – элементарные положительно определенные функции, соответствующие эквивалентным неприводимым представлениям, а $\varphi_{\lambda_1}^{(k)}(g)$ и $\varphi_{\lambda_2}^{(l)}(g)$ при $\lambda_1\neq\lambda_2$ – элементарные положительно определенные функции, соответствующие неэквивалентным неприводимым представлениям группы G. Пусть K – множество всех точек разрыва меры μ, для которых элементарная функция $\varphi_\lambda^{(k)}(g)$ соответствует конечномерному представлению; $L=\Lambda\backslash K$; $\mu_1(A)=\mu(A\cap L)$, $\mu_M(A)=\mu(A\cap K)$; тогда

$$\begin{aligned}R_c(g)&=\int\limits_\Lambda \sum_{k=1}^{d_\lambda} \varphi_\lambda^{(k)}(g)\,\mu_L(d\lambda);\\ R_d(g)&=\int\limits_\Lambda \sum_{k=1}^{d_\lambda} \varphi_\lambda^{(k)}(g)\,\mu_K(d\lambda).\end{aligned}\tag{4.4}$$

Любое представление вида (4.3) можно записать в следующей форме (см. [20], [29]):

$$R(g)=\int_{\Lambda} \operatorname{tr}\left(T_g(\lambda)F(d\lambda)\right), \tag{4.5}$$

где $T_g(\lambda)$ — неэквивалентные между собой непрерывные неприводимые унитарные представления в гильбертовых пространствах $H(\lambda)$; $F(d\lambda)$ — операторная мера на Λ, т. е. счетно-аддитивная функция множеств, значением которой являются неотрицательно определенные эрмитовы операторы, причем если $A\subset\{\lambda : H(\lambda)=E^n\}$ (E — одномерное комплексное гильбертово пространство), то оператор $F(A)$ действует в E^n ($n=1, 2, \ldots, \infty$); мера $F(d\lambda)$ имеет конечный след: $\operatorname{tr} F(\Lambda)<\infty$. Операторная мера $F_K=F(A\cap K)$ дискретна и все ее разрывы конечномерны, т. е. все операторы $F(\{\lambda\})$, $\lambda\in M$, действуют в конечномерных пространствах; операторная мера $F_L(A)=F(A\cap L)$ не имеет конечномерных разрывов. Формулы (4.4) приобретают следующий вид:

$$R_c(g)=\int_{\Lambda} \operatorname{tr}\left(T_g(\lambda)F_L(d\lambda)\right);$$

$$R_d(g)=\int_{\Lambda} \operatorname{tr}\left(T_g(\lambda)F_K(d\lambda)\right). \tag{4.6}$$

Таким образом, *непрерывное в среднем квадратичном однородное случайное поле* $\xi(g)$, $g\in G$, *на сепарабельной локально бикомпактной группе типа* 1 *имеет K-непрерывный спектр тогда и только тогда, когда его спектральная операторная мера не имеет конечномерных разрывов; и имеет K-дискретный спектр тогда и только тогда, когда его спектральная операторная мера дискретна и все ее разрывы конечномерны.*

Корреляционная функция $R(g)$ непрерывного в среднем квадратичном однородного случайного поля на коммутатичной локально бикомпактной группе G допускает спектральное представление Вейля—Райкова (см. [1], [12]):

$$R(g)=\int_{\hat G} (\hat x, g)F(d\hat x),$$

где $\hat G$—группа характеров $(\hat x, g)$ группы G: $F(d\hat x)$—конечная борелевская мера на $\hat G$. Поскольку характеры являются одномерными унитарными представлениями группы G, *непрерывное в среднем квадратичном однородное случайное поле на коммутативной локально бикомпактной группе имеет K-непрерывный (K-дискретный) спектр тогда и только тогда, когда его спектральная мера непрерывна (дискретна).*

Пример 4.2. Корреляционная функция $B(x_1, x_2)$ непрерывного в среднем квадратичном однородного случайного поля на симметрическом локально бикомпактном однородном пространстве X допускает спектральное представление:

$$B(x_1, x_2)=\int_{\Lambda} \varphi_\lambda(x_1, x_2)F(d\lambda),$$

где — Λ измеримое пространство, $F(d\lambda)$ — мера на Λ, $\varphi_\lambda(x_1, x_2)$ — сферические функции, соответствующие неэквивалентным друг другу неприводимым унитарным представлениям группы движений пространства X (см., например, [6]). Как и в примере 4.1, легко убедиться, что *непрерывное в среднем квадратичном однородное случайное поле на локально бикомпактном симметрическом однородном пространстве имеет K-непрерывный спектр тогда и только тогда, когда его спектральная мера $F(d\lambda)$ непрерывна в точках $\lambda\in\Lambda$, для которых* $\underset{x}{\mathbf{M}}[|\varphi(x_1, x_2)|^2]>0$. Легко сформулировать аналогичный критерий для непрерывных в среднем квадратичном однородных случайных полей на произвольных однородных пространствах с сепарабельными локально бикомпактными группами движений типа 1 в терминах спектральной теории таких полей, развитой А. М. Ягломом [20], [29]; мы на этом не останавливаемся.

Пример 4.3. Корреляционные функции $R_{ij}(g)$ непрерывного в среднем квадратичном однородного n-мерного случайного поля $\vec{\xi}(g)=(\xi_1(g), \ldots, \xi_n(g))$ на сепарабельной локально бикомпактной группе типа 1 допускают спектральные представления:

$$R_{ij}(g)=\int_\Lambda \sum_{k=1}^{d_\lambda} \varphi_\lambda^{(k)}(g)\,\mu_{ij}(d\lambda), \tag{4.7}$$

где $\varphi_\lambda^{(k)}(g)$ — элементарные коэффициенты, $\mu_{ij}(d\lambda)$ — конечные заряды на Λ; $\mu_{ii}(d\lambda)$ — конечные меры (ср. с формулой (4.3)). Представление (4.7) можно записать также в виде:

$$R_{ij}(g)=\int_\Lambda \operatorname{tr}\left(T_g(\lambda)\,F_{ij}(d\lambda)\right), \tag{4.8}$$

где $T_g(\lambda)$ — неэквивалентные между собой неприводимые непрерывные унитарные представления группы G; $F_{ij}(d\lambda)$ — операторные меры, причем $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr} F_{ii}(\Lambda)<\infty$ (см. [29]). Вместо операторных мер $F_{ij}(d\lambda)$, $i, j\in\overline{1, n}$, можно рассматривать также одну спектральную меру $F(d\lambda)$, значения которой являются операторами в n-кратной прямой сумме $H(\lambda)\oplus\ldots\oplus H(\lambda)$, причем $F(A)\sum_{i=1}^{n}\oplus h_i=\sum_{i=1}^{n}\oplus\sum_{j=1}^{n}F_{ij}h_j$ и $\operatorname{tr}F(\Lambda)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{tr}F_{ii}(\Lambda)<\infty$. Как и в примере 4.1, убеждаемся, что *непрерывное в среднем квадратичном многомерное однородное случайное поле $\vec{\xi}(g)$ на сепарабельной локально бикомпактной группе типа 1 имеет K-непрерывный (K-дискретный) спектр тогда и только тогда, когда все операторные меры $F_{ij}(d\lambda)$ или, что равносильно, операторная мера $F(d\lambda)$, не имеют конечномерных разрывов (дискретны и все их разрывы конечномерны).*

Пример 4.4. Пусть $\xi(\varphi)$, $\varphi\in K$, — непрерывное в среднем квадратичном однородное обобщенное случайное поле. Корреляционная функция такого поля допускает спектральное представление:

$$B(\varphi, \psi)=R(\varphi*\psi)=\int_{R^m}\tilde{\psi}(\lambda)\overline{\tilde{\varphi}(\lambda)}F(d\lambda), \tag{4.9}$$

где $F(d\lambda)$ — борелевская мера на R^m такая, что

$$\int_{R^m} \frac{F(d\lambda)}{(1+|\lambda|^2)^p} < \infty$$

при некотором целом $p \geqslant 0$ (см. [2], [19]); $\tilde{\varphi}(\lambda) = \int_{R^m} e^{i(\lambda, x)} \varphi(x)\, dx$. Как мы уже знаем (см. пример 3.4), однородное обобщенное случайное поле $\xi(\varphi)$ можно рассматривать как однородную случайную функцию $\xi(\varphi), \varphi \in K$, причем $S_y \varphi(x) = \varphi(x-y)$. Имеем:

$$\mathbf{E}\xi(S_y\varphi)\overline{\xi(\psi)} = E\xi\big(\varphi(x-y)\big)\overline{\xi\big(\psi(x)\big)} =$$

$$= \int_{R^m} e^{i(\lambda, y)} \tilde{\varphi}(\lambda)\, \overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\, F(d\lambda).$$

Известно (см., например, [14], [15]), что для всякой положительно определенной функции $p(x)$, $x \in R^m$, среднее значение $\underset{x}{\mathbf{M}}[p]$ может быть определено по формуле:

$$\underset{x}{\mathbf{M}}[p] = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{V_r} \int_{|x|<r} p(x)\, dx \tag{4.10}$$

(V_r — объем шара $\{x \mid |x| < r\}$).
Отсюда легко следует, что

$$\underset{x}{\mathbf{M}}[e^{i(\lambda, x)}] = X_{\{0\}}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \neq 0; \\ 1, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

Пусть μ — мера на измеримом пространстве Λ, $p(\lambda, x)$ измеримая функция на $\Lambda \times R^m$, причем почти при всех $\lambda \in \Lambda$ функция $p(\lambda, x)$, $x \in R^m$, является положительно определенной и $\int_\Lambda p(\lambda, 0)\, \mu(d\lambda) < \infty$. Поскольку при всех $\lambda \in \Lambda$ и $x \in R^m$ мы имеем $|p(\lambda, x)| \leqslant p(\lambda, 0)$, используя формулу (4.10), теорему Фубини и теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем:

$$\underset{x}{\mathbf{M}}\left[\int_\Lambda p(\lambda, x)\, \mu(d\lambda)\right] = \int_\Lambda \underset{x}{\mathbf{M}}[p(\lambda, x)]\, d\lambda.$$

Поэтому

$$\underset{y}{\mathbf{M}}\,[|\mathbf{E}\xi(S_y\varphi)\overline{\xi(\psi)}|^2] =$$

$$= \underset{y}{\mathbf{M}}\Big[\Big|\int_{R^m} e^{i(\lambda, y)} \tilde{\varphi}(\lambda)\, \bar{\tilde{\psi}}(\lambda)\, F(d\lambda)\Big|^2\Big] =$$

$$= \int_{R^m}\int_{R^m} \underset{y}{\mathbf{M}}[e^{i(\lambda-\mu, y)}]\, \tilde{\varphi}(\lambda)\, \overline{\tilde{\varphi}(\mu)}\, \overline{\bar{\tilde{\psi}}(\lambda)}\, \bar{\tilde{\psi}}(\mu)\, F(d\lambda)\, F(d\mu) =$$

$$= \int_{R^m}\int_{R^m} X_{\{\lambda\}}(\mu)\, \tilde{\varphi}(\lambda)\, \overline{\tilde{\varphi}(\mu)}\, \overline{\bar{\tilde{\psi}}(\lambda)}\, \bar{\tilde{\psi}}(\mu)\, F(d\lambda)\, F(d\mu) =$$

$$= \int_{R^m} \tilde{\varphi}(\lambda)\, \overline{\bar{\tilde{\psi}}(\lambda)}\, F(d\lambda) \int_{R^m} X_{\{\lambda\}}(\mu)\, \overline{\tilde{\varphi}(\mu)}\, \bar{\tilde{\psi}}(\mu)\, F(d\mu) =$$

$$= \int\limits_{R^m} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 |\tilde{\psi}(\lambda)|^2 F\big(\{\lambda\}\big) F(d\lambda) =$$

$$= \sum_i |\tilde{\varphi}(\lambda_i)|^2 |\tilde{\psi}(\lambda_i)|^2 |F(\lambda_i)|^2,$$

где λ_i — точки разрывов меры F. Таким образом, *однородное обобщенное случайное поле* $\xi(\varphi)$ *имеет K-непрерывный спектр тогда и только тогда, когда спектральная мера этого поля непрерывна.*

§ 5. Среднее значение однородного случайного поля и линейная транзитивность

Пусть G — произвольная группа, $\xi(g)$ — однородное в широком смысле относительно левых сдвигов случайное поле на G; как и прежде, мы предполагаем, что $E\xi(g) \equiv 0$.

Определение 5.1. Случайная величина $\eta \in H_\xi$ называется инвариантной относительно поля $\xi(g)$, если $U_g\eta = \eta$ с вероятностью 1.

Величины η, инвариантные относительно поля $\xi(g)$, образуют в H_ξ подпространство I_ξ. Особое место в I_ξ занимает случайная величина, определение и основные свойства которой даются следующей леммой.

Лемма 5.1. *Всякое однородное в широком смысле относительно левых (правых) сдвигов случайное поле $\xi(g)$ на группе G обладает средним значением $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$, которое с точностью до эквивалентности однозначно определяется следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой конечный набор элементов $g_1, \ldots, g_k$, что для всех $g \in G$*

$$E\Big|\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)] - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \xi(gg_i)\Big|^2 < \varepsilon \tag{5.1}$$

(соответственно,

$$E\Big|\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)] - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \xi(g_i g)\Big|^2 < \varepsilon\Big). \tag{5.1'}$$

Среднее значение $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$

1) *обладает конечной дисперсией;*

2) *принадлежит гильбертову пространству H_ξ;*

3) *инвариантно относительно левых и правых сдвигов, т. е. $\underset{y}{M}[\xi(g_1 g g_2)] = \underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$ при любых $g_1, g_2 \in G$;*

4) *с вероятностью 1 совпадает с проекцией любой случайной величины $\xi(g)$, $g \in G$, на подпространство I_ξ.*

Доказательство. Пусть, например, случайное поле $\xi(g)$ однородно относительно правых сдвигов. Положим $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)] = \underset{g}{\mathbf{M}}[U_g\xi(e)]$; свойства случайной величины $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$ легко вытекают из сказанного в п. 4 § 1.

Для широкого класса групп существуют „униваерсальные“ конструкции среднего значения $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$ по случайным величинам $\xi(g)$, $g\in G$, следующего вида:

$$\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]=\lim_{n\in N}\int_G \xi(g)\,\mu_n(dg),$$

где μ_n — некоторая последовательность нормированных мер на G; подробнее по этому поводу см. [14], [15], [16], [24].

Как показал А. М. Яглом [20], [29], непрерывное в среднем квадратичном однородное в широком смысле относительно левых сдвигов случайное поле на сепарабельной локально бикомпактной группе типа 1 допускает спектральное представление:

$$\xi(g)=\int_\Lambda \operatorname{tr}\Big(T_g(\lambda)\,Z(d\lambda)\Big), \tag{5.2}$$

где $Z(A)$ — счетно-аддитивная функция множеств $A\subset\Lambda$, значениями которой являются случайные линейные операторы в гильбертовых пространствах $\| Z_{ij}(A)\|$, причем все $Z_{ij}(A)\in H_\xi$ и

$$\mathbf{E}\,Z_{ij}(A_1)\,\overline{Z_{kl}(A_2)}=\delta_{ji}\,F_{il}(A_1\cap A_2)^{*)}. \tag{5.3}$$

Пусть $T_g(\lambda\ )\equiv\mathbf{I}$ — единичное представление группы G в одномерном пространстве $H(\lambda_{\mathrm{I}})=E$. Из формул (5.2) и (5.3) следует, что при всех $g\in G$

$$\mathbf{E}\Big(\xi(g)-Z(\lambda_{\mathrm{I}})\Big)\overline{Z(\lambda_{\mathrm{I}})}=0. \tag{5.4}$$

Легко видеть, что случайная величина $Z(\lambda_{\mathrm{I}})$ инвариантна относительно поля $\xi(g)$, $g\in G$; из формулы (5.4) и из свойства 4) среднего значения $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]$ можно заключить, что с вероятностью 1 $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]=Z(\lambda_{\mathrm{I}})$.

Лемма 5.2. *Пусть $R(g)$ — корреляционная функция однородного в широком смысле случайного поля $\xi(g)$, $g\in G$. Тогда*

$$\underset{g}{\mathbf{M}}[R(g)]=\mathbf{E}\,|\,\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]\,|^2. \tag{5.5}$$

Это перефразировка формулы Годмана (см. п. 8 § 2).

Определение 5.2. Однородное в широком смысле случайное поле $\xi(g)$, $g\in G$, называется линейно транзитивным, если $I_\xi=\{0\}$.

Лемма 5.2 и теорема 5.1 позволяет сформулировать следующее предложение.

Теорема 5.1. *Линейная транзитивность однородного в широком смысле случайного поля $\xi(g)$ равносильна каждому из следующих свойств*:

1) $\underset{g}{\mathbf{M}}[\xi(g)]=0$;

2) $\underset{g}{\mathbf{M}}[R(g)]=0$.

Эти результаты легко перефразировать для однородных полей на однородных пространствах.

*) Сравните с формулой (4.5).

§ 6. Критерий метрической транзитивности гауссовских однородных случайных функций

Пусть $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ — вероятностное пространство; $\xi(k)$, $k \in K$, — однородная в узком смысле относительно представления S_g, $g \in G$, случайная функция, причем $\mathfrak{S}$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все случайные величины $\xi(k)$, $k \in K$. Функция $\xi(k)$, $k \in K$, порождает группу сохраняющих меру P преобразований („трансляций") множеств T_g; эти преобразования действуют на σ-алгебре $\mathfrak{S}$ и задаются на ней соотношениями:

$$T_g\left\{\omega : \left(\xi(k_1), \qquad \xi(k_n)\right) \in A\right\} = \left\{\omega : \left(\xi(S_g k_1), \ldots, \xi(S_g k_n)\right) \in A\right\}$$

для любых $k_1, \ldots, k_n$ и любого n-мерного борелевского множества A $(n \in \overline{1, \infty})$ (см., например, [4]). Хорошо известно, что случайную функцию $\xi(k)$ можно считать заданной над пространством $\Omega = E^K$ с σ-алгеброй $\mathscr{B}^K$, где E — комплексная плоскость, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств в E. Тогда T_g являются точечными преобразованиями: $T_g\varphi(k) = \varphi(S_g^{-1}k)$ при любых $\varphi \in E^K$ и $g \in G$. Обратно, если T_g, $g \in G$, — группа сохраняющих меру точечных преобразований вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$, а $f(\omega)$, $\omega \in \Omega$, — измеримая функция, то $\xi(g) = f(T_g\omega)$ — однородное в узком смысле относительно левых сдвигов случайное поле на группе G. Измеримое множество $\Lambda \in \mathfrak{S}$ называется инвариантным относительно группы преобразований T_g, $g \in G$, если $P(\Lambda \Delta T_g \Lambda) = 0$ для всех $g \in G$. Группа сохраняющих меру преобразований называется метрически транзитивной, если мера всякого инвариантного относительно нее множества равна нулю или единице. Однородная в узком смысле случайная функция $\xi(k)$, $k \in K$, называется метрически транзитивной, если ее группа трансляций метрически транзитивна. Случайная величина $\eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, называется инвариантной относительно случайной функции $\xi(k)$, $k \in K$, если для любого $g \in G$ с вероятностью 1 $\eta(T_g\omega) = \eta(\omega)$. Легко видеть, что однородная случайная функция метрически транзитивна тогда и только тогда, когда все инвариантные относительно нее случайные величины с вероятностью 1 постоянны.

Цель этого параграфа — установить критерий метрической транзитивности гауссовских однородных случайных функций в терминах „спектра", обобщающий известный критерий Гренандера—Маруямы—Фомина (см. [3], [17], [28]).

Теорема 6.1. *Гауссовская однородная в узком смысле случайная функция метрически транзитивна тогда и только тогда, когда она имеет K-непрерывный спектр.*

Доказательство мы проведем, используя метод Гренандера [3]. Комплексная функция $\xi(k) = \xi_1(k) + i\xi_2(k)$ является гауссовской, метрически транзитивной или имеет K-непрерывный спектр тогда и только тогда, когда действительная функция $\eta(l) = \xi_\alpha(k)$, $l = (k, \alpha) \in K \times \{1, 2\}$, обладает соответствующими свойствами. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением действительных функций.

Достаточность. Пусть $\xi(k)$, $k \in K$, — гауссовская однородная относительно представления S_g, $g \in G$, случайная фунцция с K-непрерывным спектром и Λ —

инвариантное относительно нее множество. Так как множество Λ — измеримо, то для любого $\varepsilon>0$ существует конечномерное цилиндрическое множество

$$J=\left\{\omega:\left(\xi(k_1), \qquad \xi(k_n)\right)\in A\right\} \tag{6.1}$$

(A — n-мерное борелевское множество) такое, что $P(J\Delta\Lambda)<\varepsilon$ (см., например, [18], стр. 61) и, следовательно,

$$P(J)<P(\Lambda)+\varepsilon, \; P(\Lambda\subset\bar{J})<\varepsilon. \tag{6.2}$$

Случайный вектор $\vec{\xi}=\left(\xi(k_1), \ldots, \xi(k_n)\right)$ может быть, вообще говоря, вырожденным. Пусть E_m — m-мерное подпространство пространства R^n такое, что $P\{\vec{\xi}\in E_m\}=1$ и не существует подпространства $K\subset E_m$, обладающего этим свойством. Тогда существует невырожденное линейное преобразование Q пространства R^n, переводящее подпространство E_m в подпространство

$$F_m=\{(x_1, \qquad x_n): x_{m+1}= \qquad =x_n=0\}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $m>0$. Обозначим $(\eta_1, \ldots, \eta_m, 0, \ldots, 0\}=Q\vec{\xi}$. Вектор $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ имеет уже невырожденное гауссовское распределение. Пусть, далее, $Q(A)$ — образ множества A*) при преобразовании Q; $B=Q(A)\cap F_m=Q(A\cap E_m)$; тогда $B\subset F_m$ и

$$J=\{\omega:\vec{\eta}\in B\}. \tag{6.3}$$

Очевидно, $\eta_i\in H_\xi$ $(i=1, \ldots, m)$. Пусть U_g, $g\in G$ — унитарное представление группы G в H_ξ, соответствующее функции $\xi(k)$, $k\in K$. Рассмотрим $2m$-мерный вектор

$$(\vec{\eta}, \; U_g\vec{\eta})=(\eta_1, \qquad \eta_m, \; U_g\eta_1, \qquad U_g\eta_m).$$

Матрица ковариаций этого вектора

$$L_g=\begin{pmatrix} M & N_g^* \\ N_g^* & M \end{pmatrix},$$

где M — матрица ковариаций вектора $\vec{\eta}$ (и векторов $U_g\vec{\eta}, g\in G$), $N_g=\|E(\eta_i\cdot U_g\eta_j)\|_{i,j=1}^m$; N_g^* — матрица, сопряженная с матрицей N_g. По предположению, однородная случайная функция $\xi(k)$, $k\in K$, имеет K-непрерывный спектр; поэтому, согласно теореме 4.1, унитарное представление U_g, $g\in G$, также имеет K-непрерывный спектр и, в силу линейности среднего значения

$$\underset{g}{\mathbf{M}}\left[\sum_{i,j=1}^{m}|E(\eta_i\cdot U_g\eta_j)|^2\right]=\sum_{i,j=1}^{m}\underset{g}{\mathbf{M}}[|E(\eta_i\cdot U_g\eta_j)|^2]=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{m}\underset{g}{\mathbf{M}}[|(U_g\eta_j, \; \eta_i)|^2]=0.$$

Отсюда следует, что существует последовательность элементов $g_k\in G$ такая,

*) $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ — симметрическая разность множеств A и B; $\bar{A}=\Omega\backslash A$.

что

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i,j=1}^{m}|E(\eta_i\cdot U_{g_k}\eta_j)|^2=0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} N_{g_k}=0$ и

$$\lim_{k\to\infty} L_{g_k}=\begin{pmatrix} M & 0\\ 0 & M\end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Обозначим $x'=(x_1, \quad x_m)$, $x''=(x_{m+1}, \quad x_{2m})$, $x=(x_1, \quad x_{2m})$. Пусть $\Pi_g(x)$ – положительно определенная квадратичная форма с матрицей L_g^{-1}. Ввиду предельного соотношения (6.4), при $k\to\infty$

$$\Pi_{g_k}^{(x)}\to\Pi(x)=(M^{-1}x',\ x')(M^{-1}x'',\ x''),$$

и при достаточно малом $\lambda>0$ для $k>k_\lambda$ при всех $x\neq 0$

$$\Pi_{g_k}(x)\geqslant(M^{-1}x',\ x')(M^{-1}x'',\ x'')-\lambda|x|^2>0,$$

$$e^{-\Pi_{g_k}(x)}\leqslant e^{-(M^{-1}x',x')(M^{-1}x'',x'')+\lambda|x|^2}\in L_1(R^{2m}).$$

Рассмотрим сдвиги J_g множества J:

$$J_g=T_gJ=\{\omega:\ (U_g\eta_1, \quad U_g\eta_m)\in B\}.$$

Используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем:

$$\lim_{k\to\infty} P(J\cap J_{g_k})=\lim_{k\to\infty} P\{(\eta_1, \quad \eta_m)\in B,$$

$$(U_g\eta_1,\ \ldots,\ U_g\eta_m)\in B\}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^m|L_{g_k}|^{\frac{1}{2}}}\int\limits_{B\times B} e^{-\frac{1}{2}\Pi_{g_k}(x)}dx=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^m|M|}\int\limits_B e^{-\frac{1}{2}(M^{-1}x',x')}dx'\int\limits_B e^{-\frac{1}{2}(M^{-1}x'',x'')}dx''=\left(P(J)\right)^2.$$

В силу инвариантности множества Λ относительно группы трансляций T_g, $g\in G$,

$$P(\Lambda\cap\bar J_g)=P(\Lambda\cap T_g\bar J)=P(T_g\Lambda\cap T_g\bar J)=$$

$$=P\left(T_g(\Lambda\cap\bar J)\right)=P(\Lambda\cap\bar J). \tag{6.5}$$

Пусть k таково, что $|(P(y))^2-P(J)\cap J_{gk})|<\varepsilon$; тогда, в силу (6.5) и неравенств (6.2)

$$\left(P(\Lambda)+\varepsilon\right)^2>\left(P(J)\right)^2>P(J\cap J_{g_k})-\varepsilon\geqslant$$

$$\geqslant P(\Lambda\cap J\cap J_{g_k})-\varepsilon>P(\Lambda)-P(\Lambda\cap\bar J)-P(\Lambda\cap\bar J_{g_k})-\varepsilon>P(\Lambda)-3\varepsilon.$$

В случае $m=0$ имеем: $P\{\xi=0\}=1$ и, следовательно, $P(I)=0$ или 1; поэтому $(P(\Lambda)+\varepsilon)^2>(P(I))^2=P(I)>P(\Lambda)-\varepsilon$.

Таким образом, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ всегда $\left(P(\Lambda)+\varepsilon\right)^2 > P(\Lambda) - 3\varepsilon$, т. е. $P^2(\Lambda) \geqslant P(\Lambda)$ и, поскольку $0 \leqslant P(\Lambda) \leqslant 1$, отсюда следует, что $P(\Lambda)=0$ или $P(\Lambda)=1$. Итак, всякое инвариантное относительно случайной функции $\xi(k)$, $k \in K$, множество имеет меру 0 или 1, т.е. функция $\xi(k)$ метрически транзитивна.

Необходимость. Пусть гауссовская однородная случайная функция $\xi(k)$ метрически транзитивна; k, l — произвольные элементы множества K. Тогда случайные поля

$$\eta_1(g) = \xi^2(S_g k) - \mathbf{E}\xi^2(k) + \xi^2(S_g l) - \mathbf{E}\xi^2(l)$$

$$\eta_2(g) = \xi^2(S_g k) - \mathbf{E}\xi^2(k) - \xi^2(S_g l) + \mathbf{E}\xi^2(l)$$

также однородны, метрически транзитивны и, следовательно, линейно транзитивны. В соответствии с теоремой 5.1 их корреляционные функции удовлетворяют соотношению:

$$\underset{g}{\mathbf{M}}\,[R_{\eta_1}(g)] = \underset{g}{\mathbf{M}}\,[R_{\eta_2}(g)] = 0. \tag{6.6}$$

Далее, используя известное соотношение между моментами второго и четвертого порядков гауссовских функций, получаем:

$$[\mathbf{E}\xi(S_g k)\,\xi(l)]^2 + [\mathbf{E}\xi(S_g l)\,\xi(k)]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{E}\,[\xi^2(S_g k) - \mathbf{E}\xi^2(k)]\,[\xi^2(l) - \mathbf{E}\xi^2(l)] +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathbf{E}\,[\xi^2(S_g l) - \mathbf{E}\xi^2(l)]\,[\xi^2(k) - \mathbf{E}\xi^2(k)] =$$

$$= \frac{1}{4}R_{\eta_1}(g) - \frac{1}{4}R_{\eta_2}(g).$$

Отсюда и из соотношений (6.6) немедленно вытекает, что функция $\xi(k)$, $k \in K$, имеет K-непрерывный спектр.

Следствие 6.1. *Непрерывное в среднем квадратичном n-мерное гауссовское однородное случайное поле $\vec{\xi}(g)$, $g \in G$, на сепарабельной локально бикомпактной группе типа 1 метрически транзитивно тогда и только тогда, когда его спектральная операторная мера $F(d\lambda)$ не имеет конечномерных разрывов.*

Следствие 6.2. *Непрерывное в среднем квадратичном гауссовское однородное случайное поле на коммутативной локально бикомпактной группе метрически транзитивно тогда и только тогда, когда его спектральная мера непрерывна.*

Следствие 6.3. *Непрерывное в среднем квадратичном гауссовское однородное случайное поле на локально бикомпактном симметрическом однородном пространстве метрически транзитивно тогда и только тогда, когда его спектральная мера $F(d\lambda)$ непрерывна в точках $\lambda \in \{\lambda : \underset{x}{\mathbf{M}}|\varphi_\lambda(x_1, x_2)|^2 > 0\}$, т.е. в точках, соответствующих почти периодическим сферическим функциям.*

Следствие 6.4. *Гауссовское однородное обобщенное случайное поле метрически транзитивно тогда и только тогда, когда его спектральная мера непрерывна.*

Эти следствия легко вывести из теоремы 5.1 с помощью результатов примеров 4.1, 4.2, 4.3 и 4.4.

Следствие 6.5. *Всякое отличное от константы непрерывное в среднем квадратичном гауссовское однородное случайное поле на бикомпактной группе не является метрически транзитивным.*

Доказательство. Поскольку на бикомпактной группе всякая непрерывная функция почти-периодична, в разложении (4.2) корреляционной функции этого поля отсутствует исчезающая компонента и, таким образом, всякое отличное от константы непрерывное в среднем квадратичном однородное случайное поле на бикомпактной группе имеет K-дискретный спектр; остается сослаться на теорему 5.1.

Замечание. Требование „гауссовости" поля существенно. В самом деле, пусть G — бикомпактная группа, $\mathfrak{G}$ σ-алгебра борелевских множеств на G, μ — нормированная мера Хаара на G, $(G, \mathfrak{G}, \mu)$ мы можем рассматривать как пространство элементарных событий с вероятностной мерой μ, а каждую измеримую функцию на G — как случайную величину. Пусть функция φ (g) непрерывна; тогда $\xi(f)=\varphi(f, g)$, $f\in G$, — непрерывное в среднем квадратичном однородное относительно правых сдвигов случайное поле на группе G; порождаемое им преобразование T_f есть сдвиг группы G на элемент $f: T_f g=fg$. Хорошо известно (см., например, [18], стр. 253), что такое поле метрически транзитивно.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
28.X.1969

Литература

1. А. Вейль, Интегрирование в топологических группах его применения, ИЛ, М., 1950.
2. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции, вып. 4: Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, Физматгиз, М., 1961.
3. У. Гренандер, Случайные процессы и статистические выводы, ИЛ, М., 1961.
4. Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
5. Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, Гостехиздат, М., 1953.
6. М. А. Наймарк, Нормированные кольца, «Наука», М., 1968.
7. М. А. Наймарк, С. В. Фомин, Непрерывные прямые суммы гильбертовых пространств и некоторые их применения, УМН, **10**, 2(64), 11 (1955), 1—142.
8. М. А. Наймарк, О фактор-представлениях локально бикомпактной группы, ДАН СССР, **132**, 2 (1960).
9. М. А. Наймарк, О разложении на фактор-представления унитарного представления локально компактной группы, Сиб. мат. журнал, **2**, 1 (1961), 89—99.
10. Г. У. Макки, Эргодические преобразования групп с чисто дискретным спектром, В сб.: Л. Ауслендер, Л. Грин, Ф. Хан, «Потоки на однородных пространствах», «Мир», М., 1966, стр. 195—206.
11. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Гостехиздат, М., 1954.
12. Д. А. Райков, Положительно определенные функции на коммутативных группах с инвариантной мерой, ДАН СССР, **28** (1940), 296—300.
13. А. А. Темпельман, Эргодические свойства однородных случайных полей на группах, Труды VI Всесоюзн. совещания по теории вероятн. и матем. статист. (1960), Вильнюс, 1962.

14. А. А. Темпельман, Эргодическая теорема для однородных в широком смысле случайных полей, ДАН СССР, **144**, 4 (1962), 730—733.
15. А. А. Темпельман, Эргодические теоремы для однородных в широком смысле обобщенных случайных полей и случайных полей на группах, Лит. матем. сб., II, № 1 (1962), 195—213.
16. А. А. Темпельман, Эргодические теоремы для общих динамических систем, ДАН СССР, **176**, 4 (1967), 790—793.
17. С. В. Фомин, К теории динамических систем с непрерывным спектром, ДАН СССР, **67** (1949), 435—437.
18. П. Халмош, Теория меры. ИЛ, М., 1953.
19. А. М. Яглом, Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам, Теория вероятн. и ее примен., 2, 3 (1957), 292—338.
20. А. М. Яглом, Положительно определенные функции и однородные случайные поля на группах и однородных пространствах, ДАН СССР, **135**, 6 (1960), 1342—1345.
21. L. Alaoglu, G. Birkhoff, General ergodic theorems, Ann. of Math., **41** (1940), 293—309.
22. G. Birkhoff, An ergodic theorem for general semi-groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **25**, 625 (1939).
23. G. Birkhoff, J. Kampe de Feriet, Kinematics of homogeneuos turbulence, J. Math. and Mech., 11, 3 (1962), 319—340.
24. A. P. Calderon, A general ergodic theorem, Ann. of Math., **58**, 1 (1953), 182—191.
25. R. Godement, Les functions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc., **63** (1948), 1—84.
26. W. Maak, Fastperiodische invariante Vektormoduln in einen metrischen Vektorraum, Math. Ann., 122 (1950), 157—166.
27. W. Maak, Periodizitätseigenschaften unitärer Gruppen in Hilberträumen, Math. Scand., 2, (1954), 334—344.
28. G. Maruyama, The harmonic analysis of stationary stochastic processes, Mem. Fac. Sci., Kyusyu Univ., A, 4 (1949), 45—106.
29. A. M. Yaglom, Second-order homogeneous random fields, Proc. 4 th Berkeley Sympos, Math. Statist. and Probabil., 1960, vol. 2, 593—622, Berkeley—Los-Angeles, 1961.

GAUSO HOMOGENINIŲ ATSITIKTINIŲ FUNKCIJŲ METRINIO TRANZITYVUMO KRITERIJAI

A. TEMPELMANAS

(Reziumė)

Rastas bet kokios Gauso atsitiktinės funkcijos $\xi(k)$, $k \in K$, homogeninės tam tikros erdvės K transformacijų grupės atžvilgiu, metrinio tranzityvumo kriterijus. Kaip išvados gauti Gauso homogeninių atistiktinių laukų grupėse ir Gauso apibendrintų atsitiktinių laukų n-matėje erdvėje metrinio tranzityvumo kriterijai.

CRITERIA OF METRICAL TRANSITIVITY OF GAUSSIAN HOMOGENEUOS FUNCTIONS

A. TEMPELMAN

(Summary)

A criterion of metrical transitivity of an arbitrary Gaussian random function $\xi(k)$, $k \in K$, homogeneous in relation to some group of transformations of the space K is found. As a consequence the author finds criteria of metrical transitivity of Gaussian homogeneous random fields on groups and Gaussian generalized homogeneous random fields on n-dimensional spaces.