X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1970

УДК–511

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОБРАЗУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ В СВОБОДНЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОЛУГРУППАХ. III

Д. ЦИБУЛЬСКИТЕ

5. Доказательство основной теоремы

Основная теорема будет доказана в форме

$$V_0\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=O\left(\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{-M\ln\frac{\eta}{\theta}}\right) \tag{5.1}$$

для любого фиксированного $M>0$, так как по определению функций $V_k(\eta, f)$ из (5.1) следует соотношение

$$\sum_{N\alpha\leqslant x}\left(\Lambda(\alpha)-\frac{1}{C\theta}\right)=O\left((x^\theta(\ln x)^{-M\ln\ln x}\right)$$

$$\Psi(x)=\frac{1}{C\theta}\sum_{N\alpha\leqslant x}1+O\left(x^\theta(\ln x)^{-M\ln\ln x}\right)=\frac{1}{\theta}x^\theta+O\left(x^\theta(\ln x)^{-M\ln\ln x}\right).$$

Утверждение теоремы следует из последнего равенства после применения формулы суммирования Абеля.

Основная лемма. *Пусть* $S_f\in\mathfrak{B}^*_{h,n}$, $a_0\left(\lambda-\frac{1}{C\theta}\right)$ *конечно и*

$$\varlimsup_{\eta\to\infty}\frac{V_0(\eta,f)\,|}{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{n-1}\bar V_0\left(\eta,\lambda-\frac{1}{C\theta}\right)}>0\,. \tag{5.2}$$

Тогда существует целое число $m>0$ *и преобразование* $S_{f_1}\in\mathfrak{B}^*_{h+m,\,n+m+1}$, *такие, что*

$$\lim_{\eta\to\infty}\frac{|\,V_0(\eta,f_1)\,|}{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{n+m}\bar V_0\left(\eta,\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)}>0\,. \tag{5.3}$$

Доказательство. Применяя теорему 3.7 к преобразованию

$$S_{fL^{m'}}\in\mathfrak{B}^*_{h+m',\,n+m'}$$

имеем, что

$$|\,S_{fL^{m+m'+1}}\,1+S_{f_1}1|\leqslant(m+1)\binom{h+m+m'}{1+m}S_{k^{\theta-1}L^m}|\,S_{fL^{m'}}\,1\,|+$$

$$+\,O\,(x^\theta L^{n+m})\,. \tag{5.4}$$

Пусть

$$S_{k^{\theta-1}L^m}|\,S_{fL^{m'}}1\,|=\sum_{k\leqslant x}k^{\theta-1}\ln^m k\,F\left(\frac{x}{k}\right), \tag{5.5}$$

$$F(x)=\Big|\sum_{N\alpha\leqslant x}f(\alpha)\ln^{m'}N\alpha\Big|$$

Очевидно, что

$$k^{\theta-1}\ln^m k\,F\left(\frac{x}{k}\right)<\int\limits_k^{k+1} t^{\theta-1}\ln^m t\,F\left(\frac{x}{t}\right)dt+$$

$$+\int\limits_k^{k+1} t^{\theta-1}\ln^m t\left[F\left(\frac{x}{k}\right)-F\left(\frac{x}{t}\right)\right]dt. \tag{5.6}$$

Для любого фиксированного $m>0$

$$\int\limits_k^{k+1} t^{\theta-1}\ln^m t\,dt=O(k^{\theta}). \tag{5.7}$$

Так как

$$S_{f\,L^{m'}}\in\mathfrak{B}^{*}_{h+m',\,n+m'},$$

то существует такая арифметическая функция f_2 с

$$S_{f_2}\in\mathfrak{B}^{*}_{h+m',\,n+m'},\quad \text{чтобы}\quad |f(\alpha)\ln^{m'}N\alpha|\leqslant f_2(\alpha).$$

Тогда для $k\leqslant t\leqslant k+1$ имеем:

$$F\left(\frac{x}{k}\right)-F\left(\frac{x}{t}\right)\leqslant\sum_{\frac{x}{k+1}<N\alpha\leqslant\frac{x}{k}} f_2(\alpha). \tag{5.8}$$

Из (5.5) в силу (5.6), (5.7) и (5.8) следует, что

$$S_{k^{\theta-1}L^m}|S_{f\,L^{m'}}1|\leqslant\int\limits_1^x t^{\theta-1}\ln^m t\,F\left(\frac{x}{t}\right)dt+$$

$$+O\left(\sum_{k\leqslant x}k^{\theta}\left(S_{f_2}1\left(\frac{x}{k}\right)-S_{f_2}1\left(\frac{x}{k+1}\right)\right)\right).$$

По теореме 2.12 для

$$S_{f_2}\in\mathfrak{B}^{*}_{h+m',\,n+m'},\qquad \Phi\in\mathfrak{N}$$

получаем

$$S_{f_2}\Phi(x)=\frac{1}{\theta}x^{\theta}P(L)+O(x^{\theta}L^{h+m'-1}),$$

где $P(L)$ — многочлен степени $\leqslant n+m'-1$. Тогда

$$\sum_{k\leqslant x}k^{\theta}\left(S_{f_2}1\left(\frac{x}{k}\right)-S_{f_2}1\left(\frac{x}{k+1}\right)\right)=\sum_{k\leqslant x}S_{f_2}1\left(\frac{x}{k}\right)\left(k^{\theta}-(k-1)^{\theta}\right)=$$

$$=O\left(\sum_{k\leqslant x}k^{\theta-1}S_{f_2}1\left(\frac{x}{k}\right)\right)=O(x^{\theta}L^{n+m'}),$$

так как $n\geqslant h$.

Окончательно имеем, что

$$S_{k^{\theta-1}L^m}|S_{fL^{m'}}1|\leqslant\int\limits_1^x z^{\theta-1}\ln^m z\,\left|S_{fL^{m'}}1\left(\frac{x}{z}\right)\right|dz+O(x^{\theta}\ln^{m'+n}x). \tag{5.9}$$

Пусть

$$x=e^{\frac{\eta}{\theta}} \qquad \frac{x}{z}=e^{\frac{t}{\theta}} \qquad z=e^{\frac{\eta-t}{\theta}} \qquad dz=-\frac{1}{\theta}\, e^{\frac{\eta-t}{\theta}}\, dt\,.$$

Тогда из (5.9), после замены переменных следует:

$$S_{k0-1}\,{}_{L^m}\,|\,S_{fL^{m'}}\,1\,|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\theta^{m+1}}\int_0^{\eta} e^{\eta-t}(\eta-t)^m\,|\,S_{fL^{m'}}\,1\,(e^{\frac{t}{\theta}})\,|\,dt+O\,(x^0 L^{m'+n})\,. \tag{5.10}$$

Имея в виду (5.10), умножением на $e^{-\eta}$ из (5.4) получаем:

$$N_0\,(\eta,f\,L^{m+m'+1})+V_0\,(\eta,f_1)\,|\leqslant$$

$$\leqslant(m+1)\binom{h+m+m'}{1+m}\frac{1}{\theta^{m+1}}\int_0^{\eta}(\eta-t)^m|V_0\,(t,f\,L^{m'})\,|\,dt+O\,(\eta^{n+m'}). \tag{5.11}$$

В силу (4.14), из последнего неравенства вытекает:

$$\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{m+m'+1}|\,V_0\,(\eta,f)\,|\leqslant(m+1)\binom{h+m+m'}{1+m}\frac{1}{{}^{m+m'+1}}\int_0^{\eta}\times$$

$$\times(\eta-t)^m\,t^{m'}\,|\,V_0\,|\,t,f)\,|\,dt+O\left(\eta^{m+m'}\,\bar{V}_0\,(\eta,f)\right)+O\left(\int_0^{\eta}\times\right.$$

$$\left.\times(\eta-t)^m\,t^{m'-1}\,|\,V_0\,(t,f)\,|\,dt\right)+O\,(\eta^{m'+n})+|\,V_0\,(\eta,f_1)\,|\,.$$

Для

$$m'>a_0\,(f)=a_0 \quad \text{и} \quad \bar{V}_0\,(\eta,f)=\eta^{-a_0}\,c\,(\eta)$$

из (4.12) следует

$$\int_0^{\eta}(\eta-t)^m\,t^{m'-a_0-1}\,c\,(t)\,dt\sim c\,(\eta)\,\eta^{m+m'-a_0}\int_0^1(1-y)^m\,y^{m'-a_0-1}\,dy=$$

$$=O\left(\eta^{m+m'}\,\bar{V}_0\,(\eta,f)\right),$$

так как

$$\int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx<\infty\,,$$

если $a>0$ и $b>0$ одновременно. Далее имеем:

$$\eta^{m+m'+1}\,|\,V_0\,(\eta,f)\,|\leqslant(m+1)\binom{h+m+m'}{1+m}\int_0^{\eta}(\eta-t)^m\,t^{m'}\,|\,V_0\,(t,f)\,|\,dt+$$

$$+\;V_0\,(\eta,f_1)\,|+O\left(\eta^{m+m'}\,\bar{V}_0\,(\eta,f)\right)+O\,(\eta^{m'+n})\,. \tag{5.12}$$

Из теоремы 4.11 для $S_f\in\mathfrak{B}^*_{h,\,n}$, $k\geqslant 1$ и любой мажоранты

$$V_0\left(\eta,\;\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\;\text{с}\;\;a_0\left(\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)<\infty$$

следует, что

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \frac{|V_0(\eta,f)|}{\eta^{n-1}\bar{V}_0\left(\eta,\ \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)} < \infty\,. \tag{5.13}$$

По (5.13) и (5.2) существует мажоранта $\bar{V}_0(\eta,f)$ и константа $C_5>0$, такие, что

$$\bar{V}_0(\eta,f)=C_5\,\eta^{n-1}\,\bar{V}_0\left(\eta,\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right). \tag{5.14}$$

Для оценки

$$\int_t^{t+\lambda} |V_0(u,f)|\,du \tag{5.15}$$

рассмотрим два случая:

1) $V_0(u,f)$ не меняет знака в интервале $(t,\ t+\lambda)$ и

2) $V_0(n,f)$ хотя бы один раз меняет знак в интервале $(t,\ t+\lambda)$.

1) Из теоремы 4.12 следует, что

$$\int_t^{t+\lambda} |V_0|u,f)|\,du=O\left(t^{n-1}\,\bar{V}_0^2\left(t,\Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)\right) \tag{5.16}$$

2) Из определения класса $\mathfrak{B}_{h,n}$ следует, что если

$$S_f\in\mathfrak{B}_{h,n},\quad \text{то}\quad f(\alpha)=O\left((N\alpha)^{\frac{1}{2}}\right),$$

и существует точка ξ, $t<\xi<t<\lambda$ такая, что

$$V_0(\xi,f)=O(e^{-\frac{t}{2}})\,. \tag{5.17}$$

Пусть μ и ν — числа, удовлетворяющие неравенствам

$$t<\xi-\nu<\xi+\mu<t+\lambda. \tag{5.18}$$

Тогда

$$\int_t^{t+\lambda} |V_0(u,f)|\,du=\left(\int_t^{\xi-\nu}+\int_{\xi-\nu}^{\xi+\mu}+\int_{\xi+\mu}^{t+\lambda}\right)|V_0(u,f)|\,du\leqslant$$

$$\leqslant[\lambda-(\mu+\nu)]\left(1+O(1)\right)\bar{V}_0(t,f)+\int_{\xi-\nu}^{\xi+\mu}|V_0(u,f)|\,du. \tag{5.19}$$

По теореме 4.10 для $\xi-\nu<u<\xi+\mu$ и $\mu+\nu\leqslant\lambda=0\,(1)$ следует неравенство:

$$|V_0(u,f)-V_0(\xi,f)|\leqslant K(f,N)\,u^{n-1}|u-\xi|+O(u^{-N})\,.$$

Тогда

$$\int_{\xi-\nu}^{\xi+\mu}|V_0(u,f)|\,du\leqslant\int_{\xi-\nu}^{\xi+\mu}|V_0(u,f)-V_0(\xi,f)\,du+\int_{\xi-\nu}^{\xi+\mu}|V_0(\xi,f)|\,du=$$

$$=O\left(t^{n-1}\int_{\xi-\nu}^{\xi+\mu}|u-\xi|\,du\right)+O(t^{-N})+O(\lambda e^{-\frac{t}{2}})=$$

$$=O\left((\mu+\nu)^2\,t^{n-1}\right)+O(t^{-N}). \tag{5.20}$$

Значит, если $V_0(u,f)$ меняет знак в интервале $(t, t+\lambda)$ и $\mu+\nu\leqslant\lambda=0\ (1)$, то существует некоторая константа $K=K(f, N)$ и произвольное фиксированное число $N>0$, для которых

$$\int_t^{t+\lambda} |V_0(u, f)|\,du\leqslant[\lambda-(\mu+\nu)]\left(1+o(1)\right)\overline{V}_0(t. f)+$$
$$+K(\mu+\nu)^2t^{n-1}+O(t^{-N}). \tag{5.21}$$

Пусть

$$\lambda\geqslant\frac{1}{k}\ t^{-n+1}\overline{V}_0(t, f) \tag{5.22}$$

и $N>0$ — достаточно велико. Тогда, полагая в (5.21)

$$\mu+\nu=\frac{1}{2K}\ t^{-n+1}\overline{V}_0(t, f)\ ,$$

имеем, что

$$\int_t^{t+\lambda} |V_0(u, f)|\,du\leqslant\left(1+O\ (1)\right)\overline{V}_0(t, f)\left(\lambda-\frac{1}{4K}\ t^{-n+1}\overline{V}_0(t, f)\right). \tag{5.23}$$

Из соотношения (5.16) для некоторой константы $H>0$ получаем неравенство:

$$\int_t^{t+\lambda} |V_0(u, f)|\,du\leqslant H\,t^{n-1}\overline{V}_0^2\left(t, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right), \tag{5.16'}$$

или, вследствие (5.14),

$$\int_t^{t+\lambda} |V_0(u, f)|\,du\leqslant\frac{H}{C_5^2}\ t^{-n+1}\overline{V}_0(t, f).$$

Положим

$$M=\max\left(\frac{1}{K}\ ,\quad \frac{1}{4K}+\frac{H}{C_5^2}\right), \tag{5.24}$$

$$\lambda=Mt^{-n+1}\overline{V}_0(t, f)=M\,C_5\,\overline{V}_0\left(t, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=O\,(1)\ . \tag{5.25}$$

Тогда для правых сторон неравенств (5.23) и (5.16) получаем:

$$\left(1+o\,(1)\right)\lambda\left(1-\frac{1}{4MK}\right)\overline{V}_0(t, f)\quad\text{и}\quad\frac{H}{MC_5^2}\ \lambda\overline{V}_0(t, f).$$

Окончательно получаем, что

$$\int_t^{t+\lambda} |V_0(u, f)\,du\leqslant\left(1+o(1)\right)\lambda\chi\overline{V}_0(t, f), \tag{5.26}$$

где

$$\lambda=M\,C_5\,\overline{V}_0\left(t, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=M\,t^{-n+1}\overline{V}_0(t, f),$$

$$\chi=\max\left(\frac{H}{MC_5^2}\ ,\quad 1-\frac{1}{4KM}\right)<1.$$

Из (5.26) для $\overline{V}_0(\eta, f)$, заданной в виде (5.14), имеем:

$$\lambda \mid V_0(t, f) \mid \leqslant \int_t^{t+\lambda} \mid V_0(u, f) \mid du \leqslant \Big(1 + o(1)\Big) \lambda \chi \overline{V}_0(t, f).$$

Тогда

$$\int_0^\eta (\eta - t)^m t^{m'} \mid V_0(t, f) \mid dt \leqslant \Big(1 + o(1)\Big) \chi \int_0^\eta (\eta - t)^m t^{m'} \overline{V}_0(t, f)\, dt \quad (5.27)$$

для некоторого $\chi < 1$, не зависящего от m и m'.

Далее, если $m' > a_0(f) = a_0$, то для

$$\overline{V}_0(\eta, f) = \eta^{-a_0} C(\eta)$$

из (4.12) следует, что

$$\int_0^\eta (\eta - t)^m t^{m'} \overline{V}_0(t, f)\, dt \sim$$

$$\sim \eta^{m+m'+1} \overline{V}_0(\eta, f) B\left(m+1,\ m'+n-a_0\left(\lambda - \frac{1}{C\theta}\right)\right), \quad (5.28)$$

так как

$$a_0(f) = a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) - n + 1$$

Известно, что для целого $n > 0$ и вещественного $a > 1$

$$B(n, a) = B(a, n) = \frac{1.2 \ldots (n-1)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}$$

Воспользуемся этим соотношением при фиксированных h, m, n и $a_0 = a_2\Big(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\Big)$. Получаем, что

$$\lim_{m' \to \infty} \binom{h+m+m'}{1+m} (m+1) B(m+1,\ m'+n-a_0) = 1 \quad (5.29)$$

В силу (5.29) и потому, что константа $\chi < 1$ не зависит от m и m', для достаточно большого m', $m' > a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right)$, существует константа χ' такая, что

$$\chi \binom{h+m+m'}{1+m} (m+1) B(m'+n-a_0) < \chi' < 1. \quad (5.30)$$

Предположим, что $m > a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right)$, например, $m = \left[a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right)\right] + 1$. Далее, из (5.30), (5.28), (5.27) и (5.12) следует:

$$\eta^{m+m'+1} \mid V_0(\eta, f) \mid \leqslant \chi' \eta^{m+m'+1} + \mid V_0(\eta, f_1) \mid + O(\eta^{m'+n}). \quad (5.31)$$

По предположению,

$$m > a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right).$$

В силу (5.14) имеем, что

$$\eta^{m'+n} = o\left(\eta^{m+m'+1}\,\overline{V}_0(\eta, f)\right)$$

Если $\{\eta'\}$ – последовательность, для которой

$$|V_0(\eta', f)| \sim \overline{V}_0(\eta', f),$$

то из (5.31) и (5.14) имеем:

$$|V_0(\eta', f_1)| \geqslant \left(1 + o(1)\right)(1-\chi')\,C_5\,\eta'^{\,m+m'+n}\,\overline{V}_0\left(\eta', \Lambda - \frac{1}{C\theta}\right). \quad (5.32)$$

Преобразование

$$S_{f_1} \in \mathfrak{B}^*_{h+m+m',\, n+m+m'+1}$$

Из (5.32) следует утверждение леммы с $(m+m')$ вместо m.

Доказательство основной теоремы. Пусть $a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right)$ – конечная величина. В основной лемме положим $f = \Lambda - \frac{1}{C\theta}$. Так как

$$S_{\Lambda - \frac{1}{C\theta}} \in \mathfrak{B}^*_{1,1},$$

то (5.2) выполняется и лемма применима к этой функции.

Значит, существует последовательность преобразований

$$S_{f_l} \ \text{с} \ S_{f_l} \in \mathfrak{B}^*_{h_l,\, h_l+l-1}, \qquad f_1 = \lambda - \frac{1}{C\theta},$$

для которых имеет место неравенство:

$$\varlimsup_{\eta\to\infty} \frac{|V_0(\eta, f_l)|}{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{h_l+l-2}\overline{V}_0\left(\eta, \Lambda - \frac{1}{C\theta}\right)} > 0. \quad (5.33)$$

Отсюда следует, что для

$$|V_0(\eta, f_l)| \sim V_0(\eta, f_l) \quad \text{и} \quad \overline{V}_0\left(\eta, \Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) = \eta^{-a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right)} c(\eta)$$

должно выполняться неравенство

$$a_0(f_l) \leqslant a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) + 2 - h_l - l. \quad (5.34)$$

Из теоремы 4.8 получаем, что

$$|V_0(\eta, f_l| \leqslant A\,\eta^{h_l-1}$$

$A > 0$ – постоянная, и

$$a_0(f_l) \geqslant 1 - h_l. \quad (5.35)$$

Из (5.34) и (5.35) следует, что

$$a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) > l - 1.$$

Так как $l > 0$ – произвольное целое число, то приходим к противоречию с предположением о конечности $a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right)$. Следовательно,

$$a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) = \infty$$

и

$$V_0\left(\eta, \Lambda-\frac{1}{C\theta}\right)=O\left(\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{-M\ln\frac{\eta}{\theta}}\right)$$

для любого фиксированного $M>0$.

6. Некоторые приложения теории

1. Пусть элементы полугруппы G_1 — положительные вещественные числа $\alpha\geqslant 1$, при этом логарифмы образующих элементов линейно независимы. В этом случае $N\alpha=\alpha$. Например, в качестве полугруппы G_1 можно взять множество чисел вида $\alpha=n^{\frac{1}{\theta}}$, где $n=1, 2, \ldots$, и $\theta>0$. Системой образующих элементов служит множество чисел вида $p^{\frac{1}{\theta}}$, где p пробегает множество простых рациональных чисел. Полугруппа G_1 имеет степенную θ-плотность $C=1$, а $\theta_1=0$. Из основной теоремы следует

Теорема 6.1.

$$\Psi_1(x)=\sum_{\alpha\leqslant x}\Lambda(\alpha)=\theta x^{\frac{1}{\theta}}+O\left(x^{\frac{1}{\theta}}(\ln x)^{-M\ln\ln x}\right).$$

$M>0$ — фиксированное число.

2. Рассмотрим множество комплексных чисел. Целые комплексные (гауссовые) числа однозначно представляются с точностью до тривиальных множителей в виде произведения неотрицательных степеней простых гауссовых чисел. Так как в этом множестве существуют четыре единицы (± 1, $\pm i$), то полной однозначности достигнем, рассматривая полугруппу G_2 целых гауссовых чисел z с базой, состоящей из простых гауссовых чисел z_1, z_2, ... первого квадранта. По основной теореме получается асимптотическое выражение для числа простых гауссовых чисел, лежащих в круге радиуса x с центром в начале координат.

Теорема 6.2.

$$\Psi_2(x)=\sum_{\substack{|z|\leqslant x\\ z\in G_2}}\Lambda(z)=\frac{1}{2}x^2+O\left(x^2(\ln x)^{-M\ln\ln x}\right).$$

$M>0$ — фиксированная постоянная.

Доказательство. Известно [16], что

$$B(x)=\sum_{\substack{|z|\leqslant x\\ z\in G_2}}1=\frac{1}{4}\pi x^2+O(x^{\theta_1}),$$

где $\theta_1<\frac{2}{3}$, а в полугруппу G_2 от каждой ассоциированной четверки входит только одно число. Полагая

$$\alpha=z,\qquad N\alpha=|z|,\qquad \omega_i=z_i,$$

получаем доказательство из основной теоремы при $\theta=2$.

3. Пусть K – фиксированное алгебраическое числовое поле степени r. Множество G_3 целых отличных от нуля идеалов $\mathfrak{a}$ поля k будет полугруппой с базой, состоящей из простых идеалов $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2,$ этого поля. Каждый идеал $\mathfrak{a} \in G_4$ однозначно представляется в виде произведения целых неотрицательных степеней простых идеалов. Известно [17], [18], что

$$B(x) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leqslant x \\ \mathfrak{a} \in G_3}} 1 = \mu H x + O(x^{1-\frac{1}{r}})$$

где H – число классов идеалов, а

$$\mu = \frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2} R}{\omega \sqrt{|d|}},$$

r_1 – число вещественных полей, сопряженных полю K,
r_2 – число комплексных полей, сопряженных полю K,
ω – число корней из единицы в K,
R – регулятор поля K,
$|d|$ – дискриминант поля K.

Полагая $\alpha = \mathfrak{a}$, $\omega_1 = \mathfrak{h}_i$, $N\alpha = N\mathfrak{a}$, при $\theta = 1$ получается

Теорема 6.3.

$$\Psi_3(x) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leqslant x \\ \mathfrak{a} \in G_3}} \Lambda(\mathfrak{a}) = x + O\left(x (\ln x)^{-M \ln \ln x}\right).$$

$M > 0$ – фиксированное число.

Основную теорему можно применить и в случаях, когда из простых идеалов поля K будут образовываться полугруппы целых идеалов, обладающие степенными θ-плотностями.

За постановку задачи и внимание к моей работе сердечно благодарю своего научного руководителя проф. И. П. Кубилюса.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 30.IX.1969

Литература

16. И. М. Виноградов, О числе целых точек в круге, Изв. АН СССР, серия физ.-матем., 3 (1932), 313–316.
17. E. Hecke, Theory der algebraischen Zahlen, Leipzig, 1923.
18. Е. Вейль, Алгебраическая теория чисел, М., ИЛ, 1947.

LAISVOS SKAITINĖS PUSGRUPĖS GENERUOJANČIŲ ELEMENTŲ PASISKIRSTYMO KLAUSIMU. III

D. CIBULSKYTĖ

(*Reziumė*)

Pagrindinė teorema, suformuluota pirmoje darbo dalyje, yra ekvivalentiška teiginiui:

$$V_0\left(\eta, \Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) = O\left(\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{-M \ln \frac{\eta}{\theta}}\right);$$

čia $M > 0$ – bet koks fiksuotas skaičius.

Šis įvertinimas išplaukia iš lemos:
Sakykime,

$$S_f \in \mathfrak{B}_{h,n}, \quad a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) < \infty$$

ir

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \, |V_0(\eta, f)| \,/\, (\eta\,\theta^{-1})^{n-1}\, \bar{V}_0\left(\eta, \Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) > 0.$$

Tada egzistuoja sveikas skaičius $m>0$ ir transformacija

$$S_f \in \mathfrak{B}^*_{h+m,\, n+m+1},$$

kuriems teisinga nelygybė:

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \, |V_0(\eta, f_1)| \,/\, (\eta\,\theta^{-1})^{n+m}\, \bar{V}_0\left(\eta, \Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) > 0.$$

Taip pat yra įrodytos teoremos, analogiškos pagrindinei, kai

G_1 — pusgrupė, sudaryta iš teigiamų realių skaičių $\alpha \geqslant 1$, o ją generuojančių elementų logaritmai tiesiškai nepriklausomi;

G_2 — pusgrupė, sudaryta iš sveikų Gauso skaičių, o ją generuojantys elementai yra pirminiai Gauso skaičiai iš pirmo ketvirčio;

G_3 — fiksuoto algebrinių skaičių kūno sveikų ($\neq 0$) idealų pusgrupė, o ją generuojančių elementų sistema — šio kūno pirminiai idealai.

ÜBER VERTEILUNG DER BASISELEMENTE IN DEN FREIEN ZAHLENHALBGRUPPEN. III.

D. CIBULSKYTĖ

(*Zusammenfassung*)

Das Haupttheorem, das in dem ersten Teil dieser Arbeit formuliert worden ist, ist gleichwertig mit der Behauptung:

$$V_0\left(\eta, \Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) = O\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{-M \ln \frac{\eta}{\theta}}$$

wo $M>0$ beliebige Konstante ist.

Diese Bewertung folgt aus dem Lemma:
Es sei

$$S_f \in \mathfrak{B}^*_{h,n}, \; a_0\left(\Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) < \infty$$

und

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \, |V_0(\eta, f)| \,/\, (\eta\,\theta^{-1})^{n-1}\, \bar{V}_0\left(\eta, \Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) > 0.$$

Dann existiert eine ganze Zahl $m>0$ und die Summe

$$S_{f_1} \in \mathfrak{B}^*_{h+m,\, n+m+1},$$

dass die Bedingung

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \, |V_0(\eta, f_1)| \,/\, (\eta\;\theta^{-1})^{n+m}\, \bar{V}_0\left(\eta, \Lambda - \frac{1}{C\theta}\right) > 0$$

erfüllt ist.

Im vorliegenden Artikel werden auch die Theoreme bewiesen, wenn:

G_1 die Halbgruppe der positiven reelen Zahlen $\alpha \geqslant 1$ ist, wenn die Logarithmen der Basiselemente linearunabhängig sind;

G_2 die Halbgruppe der ganzen gaussischen Zahlen mit der Basis von gaussischen Primzahlen aus dem ersten Viertel ist;

G_3 die Halbgruppe der ganzen Ideale ($\neq 0$) von einem fixierten algebraischen Körper ist. Die Basis dieser Halbgruppe bildet die Primideale dieses Körpers.