УДК 519.21

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В R^k. I

А. Бикялис

§ 1. Введение

Используем следующие обозначения: $(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ – скалярное произведение k-мерных векторов $\mathbf{t}=(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ и $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ евклидового пространства R^k; $|\mathbf{x}|$ – длина вектора $\mathbf{x}$; $\mathbf{e}_j$ – единичный вектор в R^k, т.е. j-я координата его равна единице, а остальные равны нулю; $\mathbf{0}$ – нулевой вектор; $\mathfrak{N}$ – класс борелевских множеств A в R^k; $\mathfrak{A}$ – класс выпуклых борелевских множеств; $\xi_j=(\xi_{1j}, \xi_{2j}, \ldots, \xi_{kj})$, $j=1, 2, \ldots, n$, – независимые неодинаково распределенные случайные векторы в R^k; $M\xi_{ij}$, $i=1, 2, \ldots, k$, – математические ожидания случайных величин ξ_{ij}, $i=1, 2, \ldots, k$; $M\xi_j$ – вектор математических ожиданий; $\sigma_i^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M(\xi_{ij}-M\xi_{ij})^2$; $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ – вектор стандартов; $\gamma_j=(\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \ldots, \gamma_{kj})=\frac{\xi_j-M\xi_j}{\sigma}=\left(\frac{\xi_{1j}-M\xi_{1j}}{\sigma_1}, \frac{\xi_{2j}-M\xi_{2j}}{\sigma_2}, \ldots, \frac{\xi_{kj}-M\xi_{kj}}{\sigma_k}\right)$ – случайный вектор с функцией распределения $F_j(\mathbf{x})$; $\Theta=(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k)$ – k-мерный случайный вектор с функцией распределения $F(\mathbf{x})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_j(\mathbf{x})$; V – корреляционная матрица случайного вектора Θ; V^{-1} – обратная матрица; $|V|$ – определитель матрицы V; $\mathbf{t}V\mathbf{t}'=M[(\Theta, \mathbf{t})^2]$ – квадратичная форма; V' – транспонированная матрица $\mathbf{V}$; $\mathbf{t}'$ – вектор-столбец; $P_n(A)$ – распределение нормированной и центрированной суммы

$$\mathbf{S}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j-M\xi_j}{\sigma};$$

$\Phi_{\mathbf{b}, B}(A)$ – k-мерное нормальное распределение с вектором математических ожиданий $\mathbf{b}$ и ковариационной матрицей B; $C_1(k)$, $C_2(k)$, … – постоянные, зависящие только от k.

Рассмотрим остаточный член

$$R_n(A)=P_n(A)-\Phi_{0, V}(A), \quad A\in\mathfrak{A},$$

в многомерной центральной предельной теореме теории вероятностей.

Первая работа [1] (она принадлежит А. Журавскому) об остаточном члене $R_n(A)$ появилась в 1933 году. В ней даны условия сходимости, а также получена оценка скорости убывания $R_n(A)$. Заметим, что в [1] A является k-мерным интервалом ограниченного объема. На сегодняшний день получен ряд оценок для $R_n(A)$. Исследования велись, в основном, методом характеристических функций [1–18], разработанным А. М. Ляпуновым и П. Леви, и методом композиции [19–25], разработанным И. В. Линдебергом и Г. Бергстремом. В последнее время метод композиции усовершенствовал В. В. Сазонов [22–24] и в случае, когда слагаемые $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены, полученные им оценки для $R_n(A)$ во всех отношениях являются наилучшими. Заметим, что в оценки входят число слагаемых n, размерность пространства R^k и моменты случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. В обоих методах используется следующее важное неравенство:

$$|P_n(A)-\Phi_{0,V}(A)|\leqslant 2\sup_{B\in\mathfrak{N}}\left|[P_n(B)-\Phi_{0,V}(B)] * H\left(\frac{B}{\varepsilon}\right)\right|+$$

$$+C_1(k)\sup_{\mathbf{y}\in R^k}\int_{(\dot{A})_\varepsilon} d\Phi_{0,V}(\mathbf{y}+\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

для $\varepsilon>0$ и для всех $A\in\mathfrak{A}$. Здесь $*$ — знак композиции, $(\dot{A})_\varepsilon$ — ε — окрестность контура множества A, константа $C_1(k)$ зависит от абсолютно непрерывного распределения $H(A)$, модуль характеристической функции $h(\mathbf{t})$ которого равен нулю при $|\mathbf{t}|\geqslant 1$. При этом распределение $H(A)$ выбираем так, чтобы его плотность убывала со скоростью $O(e^{-\sqrt{|\mathbf{x}|}})$ при $|\mathbf{x}|\to\infty$. Неравенство (1.1) является частным случае более общего аналогичного результата Б. Фонбара [11]. Неравенства этого типа имеются в работах [9, 12, 13, 19, 23, 26, 30].

Для нормальных распределений $\Phi_{0,I}(A)$ и для всех выпуклых борелевских множеств A имеет место неравенство

$$\sup_{\mathbf{y}\in R^k}\int_{(\dot{A})_\varepsilon} d\Phi_{0,I}(\mathbf{y}+\mathbf{x})\leqslant 2\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,\varepsilon. \tag{1.2}$$

Неравенство (1.2) принадлежит Б. Фон Бару [11]. С другими константами относительно k оно также получено В. В. Сазоновым в [24].

Метод характеристических функций и метод композиции различаются в оценках разности

$$[P_n(B)-\Phi_{0,V}(B)] * H\left(\frac{B}{\varepsilon}\right).$$

Вообще, работы об оценках остаточного члена $R_n(A)$ можно разделить на две группы: в одних [3, 6–8, 10, 11, 14–16, 18] получены оценки только относительно n (для одинаково распределенных слагаемых наиболее общие и окончательные результаты имеются в [11, 14, 18]), а в других [1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 17, 19–25, 27–31] авторы выявляют зависимости $R_n(A)$ от числа слагаемых n, от k и от моментов случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Как уже заметили, для одинаково распределенных слагаемых суммы $\mathbf{S}_n$ глубокие и общие утверждения получены в [22–24]. Результаты работ первой и второй группы не всегда перекрываются.

Здесь мы продолжим исследования структуры остаточного члена $R_n(A)$ для сумм $\mathbf{S}_n$ с разнораспределенными слагаемыми. Полученные нами оценки точнее всех известных оценок того же типа; кроме того, из них, без учета константы, которая зависит от k, вытекают результаты В. В. Сазонова [24] для одинаково распределенных слагаемых суммы $\mathbf{S}_n$, которые получены методом композиции. Мы проведем расчеты методом характеристических функций с использованием усеченных случайных векторов. Эту методику автор раньше использовал в работах [18, 8, 14]. Правда, здесь внесены некоторые изменения в методику, например, впервые используется лемма 7.

Через G обозначим класс функций $g(x)$, определенных на вещественной прямой и обладающих свойствами:

1) $g(x)$ – неотрицательные, четные, неубывающие в интервале $[0, \infty)$ функции и

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty;$$

2) $\frac{x}{g(x)}$ – определенная для всех x и неубывающая в интервале $[0, \infty)$ функция.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $M[\xi_{ij}^2 g(\xi_{ij})] < \infty$, *где* $g(x) \in G$ для $i=1, 2, \ldots, k$ *и* $j=1, 2, \ldots, n$ *и корреляционная матрица* V *положительно определенная*; *тогда существует постоянная* $C_2(k)$, *зависящая от* k, *такая, что*

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}} |P_n(A) - \Phi_{0,V}(A)| \leqslant \frac{C_2(k)}{g(\sqrt{n})} M[(\Theta V^{-1}\Theta') g(\sqrt{\Theta V^{-1}\Theta'})].$$

Если, в частности, $g(x) = |x|^\delta$, $0<\delta\leqslant 1$, то получим оценку остаточного члена в многомерной центральной предельной теореме в ляпуновской формулировке.

Теорема 2. *Пусть независимые случайные векторы* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *имеют конечные моменты порядка* $2+\delta$ $(0<\delta\leqslant 1)$ *и пусть корреляционная матрица* V *невырождена*; *тогда существует постоянная* $C_3(k)$, *зависящая только от* k, *такая, что*

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}} |P_n(A) - \Phi_{0,V}(A)| \leqslant \frac{C_3(k)}{n^{\frac{\delta}{2}}} M[(\Theta V^{-1}\Theta')^{\frac{2+\delta}{2}}]. \tag{1.3}$$

Сделаем несколько замечаний об этой оценке.

Поскольку

$$\sup_{\mathbf{t}\in R^k} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t})^2}{\mathbf{t}V\mathbf{t}'} = \mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}',$$

то в (1.3) можно использовать следующее соотношение:

$$M[(\Theta V^{-1}\Theta')^{\frac{2+\delta}{2}}] \geqslant \sup_{\mathbf{t}\neq 0} \frac{M[|(\Theta, t)|^{2+\delta}]}{(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2+\delta}{2}}}.$$

Нетрудно заметить (при $\delta=1$ это, в первые сделал В. В. Сазонов в [24]), что математическое ожидание $M[(\Theta V^{-1}\Theta')^{\frac{2+\delta}{2}}]$ еще можно заменить на следующие выражения, только от этого может измениться функция $C_2(k)$.

I.

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{M[\,|(\Theta, \mathbf{t}_j)|^{2+\delta}]}{\left(M[(\Theta, \mathbf{t}_j)^2]\right)^{\frac{2+\delta}{2}}},$$

где $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_k$ — произвольная совокупность векторов из R^k, для которой случайные величины $(\Theta, \mathbf{t}_1), (\Theta, \mathbf{t}_2), \ldots, (\Theta, \mathbf{t}_k)$ некоррелированы.

II.

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{|\Lambda_{jj}|}{|\Lambda|}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \frac{M[\,|(\Theta, \mathbf{u}_j)|^{2+\delta}]}{\left(M[(\Theta, \mathbf{u}_j)^2]\right)^{\frac{2+\delta}{2}}}$$

для любой совокупности $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ линейно независимых векторов из R^k. Здесь $|\Lambda|$ — определитель матрицы корреляций вектора

$$\Big((\Theta, \mathbf{u}_1), (\Theta, \mathbf{u}_2), \ldots, (\Theta, \mathbf{u}_k)\Big),$$

$|\Lambda_{jj}|$ — адъюнкт в матрице Λ, соответствующий элементу с индексами jj.

III.

$$\lambda^{-\frac{2+\delta}{2}} \sum_{j=1}^{k} \frac{M[\,|(\Theta, \mathbf{u}_j)|^{2+\delta}]}{\left(M[(\Theta, \mathbf{u}_j)^2]\right)^{\frac{2+\delta}{2}}},$$

де λ — наименьшее собственное значение матрицы Λ.

IV.

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant k} \left(\frac{|\Lambda_{jj}|}{|\Lambda|}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \sum_{j=1}^{k} \frac{M[\,|\Theta, \mathbf{u}_j)|^{2+\delta}]}{\left(M[(\Theta, \mathbf{u}_j)^2]\right)^{\frac{2+\delta}{2}}}.$$

Кроме того, рассмотрим асимптотическое разложение для распределения $P_n(A) = P\{\mathbf{S}_n \in A\}$, $A \in \mathfrak{R}$, нормированной и центрированной суммы

$$\mathbf{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - M\xi_j)$$

независимых одинаково распределенных k-мерных случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Асимптотические разложения построены с помощью обобщенных мер типа Чебышева—Эрмита:

$$P_n(A) = \int_A dG_{n,s-2}(y) + r_{n,s-2}(A).$$

Здесь

$$G_{n,s-2}(y) = \sum_{j=0}^{s-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j \int\limits_{\substack{x_1 < y_1 \\ \cdots\cdots \\ x_k < y_k}} \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R^k} P_j(i\mathbf{t})\, e^{-i(\mathbf{t}, \mathbf{x}) - \frac{1}{2}\mathbf{t}V\mathbf{t}'}\, d\mathbf{t}\, d\mathbf{x},$$

$P_j(i\mathbf{t})$ — известные многочлены (см. (5.0)).

Теорема 3. *Если одинаково распределенные случайные векторы* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *имеют невырожденную ковариационную матрицу и конечные моменты третьего порядка, не являясь при этом решетчатыми, то*

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}} |r_{n,1}(A)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Заметим, что „нерешетчатые" случайные векторы имеют 0 — решетчатые распределения (см. § 2).

Теорема 4. *Если случайный вектор* ξ_1 *с невырожденной ковариационной матрицей имеет конечные моменты s-го порядка* ($s\geqslant 3$) *и его характеристическая функция* $f_1(\mathbf{t})$ *удовлетворяет условию Крамера*

$$\overline{\lim_{|\mathbf{t}|\to\infty}} |f_1(\mathbf{t})| < 1,$$

то

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}} |r_{n,s-2}(A)| = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right).$$

Заметим, что для функции распределения $F_n(\mathbf{x})$ суммы $\mathbf{S}_n$ теорема 3 доказана в [26], и теорема 4 различными методами получена автором в [14] и Б. фон Баром в [11].

Доказательства теорем 3 и 4 не будем приводить, поскольку они ничем существенным не отличаются от доказательства аналогичных теорем из [26] и [14]. Только вместо леммы 1 в [26] и леммы 9 в [6] следует использовать лемму 6 из [10].

§ 2. Многомерные m-решетчатые распределения

В исследованиях одномерных предельных теорем особое место занима класс „решетчатых" случайных величин: ξ имеет решетчатое распределение, если существуют такие числа a и $h>0$, что все возможные значения могут быть представлены в виде $a+kh, k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ А. Винтнер показал [38], что ξ имеет решетчатое распределение тогда и только тогда, когда при некотором значении аргумента $t\neq 0$ модуль ее характеристической функции равен единице.

В частном случае понятие многомерного решетчатого распределения впервые ввел Эссеен [2] (см. также [39] и [40]): распределения, у которых все маргинальные распределения решетчатые. Это определение не охватывает случайных векторов, которые имеют только часть маргинальных решетчатых распределений. Дальнейшие исследования мы посвятим этому случаю.

Определение 1. *k-мерный случайный вектор* ξ *имеет m-решетчатое распределение, если существует вектор* $\mathbf{a}$ *и система из m линейно независимых векторов* $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ *таких, чтобы m маргинальных распределений случайного вектора*

$$\lambda = (\xi - \mathbf{a})(H^{-1})'$$

было решетчатыми со скачками в точках $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *причем m — максимальное число векторов* $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$, *обладающих этим свойством.*

Здесь H — матрица, составленная из координат системы k линейно независимых векторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$, $\mathbf{l}_{i_{m+1}}, \ldots, \mathbf{l}_{i_k}$; $\mathbf{l}_{i_{m+1}}, \ldots, \mathbf{l}_{i_k}$ — единичные векторы на координатных осях в R^k, они выбраны так, чтобы дет $H \neq 0$.

Докажем лемму, которая дает условия m-решетчатости распределения $F_\xi(\mathbf{x})$ случайного вектора ξ.

Лемма 1. *Для того чтобы k-мерный случайный вектор ξ имел m-решетчатое распределение, необходимо и достаточно, чтобы система значений аргументов, при которых модуль характеристической функции $f_\xi(\mathbf{t})$ случайного вектора ξ равен единице, имела ранг m.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_m$ — линейно не зависимые векторы и

$$f_\xi(\mathbf{t}_j) = e^{i(\mathbf{a}, \mathbf{t}_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.1}$$

Упростит рассуждения, но не уменьшит общности, если мы предположим, чт минор из m первых координат векторов $\mathbf{t}_j = (t_{j1}, \ldots, t_{jk})$, $j = 1, 2, \ldots, m$, не обращается в нуль. Следовательно, матрица

$$T = \begin{pmatrix} \frac{t_{11}}{2\pi} & \frac{t_{12}}{2\pi} & \ldots & \frac{t_{1m}}{2\pi} & \frac{t_{1m+1}}{2\pi} & \frac{t_{1m+2}}{2\pi} & \ldots & \frac{t_{1k}}{2\pi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{t_{m1}}{2\pi} & \frac{t_{m2}}{2\pi} & \ldots & \frac{t_{mm}}{2\pi} & \frac{t_{mm+1}}{2\pi} & \frac{t_{mm+2}}{2\pi} & \ldots & \frac{t_{mk}}{2\pi} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

невырожденная.

Поскольку

$$f_\xi(\mathbf{u}T) = Me^{i(\mathbf{u}T, \xi)} = Me^{i(\mathbf{u}, \xi T')} = f_{\xi T'}(\mathbf{u}),$$

то в силу (2.1) характеристическая функция

$$f_{(\xi - \mathbf{a})T'}(\mathbf{u}) = f_\xi(\mathbf{u}T)\, e^{-i(\mathbf{u}T, \mathbf{a})}$$

равна единице при $\mathbf{u} = \mathbf{t}_j T^{-1}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. По определению матрицы T имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (2\pi, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0), \\ \mathbf{u}_2 &= (0, 2\pi, \ldots, 0, 0, \ldots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{u}_m &= (0, 0, \ldots, 2\pi, 0, \ldots, 0). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Поэтому, полагая $\lambda = (\xi - \mathbf{a})\, T'$, получаем

$$f_\lambda(\mathbf{u}_j) = \int_{R^k} \cos 2\pi x_j \, dF_\lambda(\mathbf{x}) = 1, \; j = 1, 2, \ldots, m.$$

Следовательно, m-первых маргинальных распределений случайного вектора λ являются решетчатыми со скачками в точках $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Необходимость. Положим, что существует вектор $\mathbf{a}$ и матрица H такие что m-первых маргинальных распределений случайного вектора $\lambda = (\xi - \mathbf{a})\,(H^{-1})'$

являются решетчатыми со скачками в точках 0, ± 1, $\pm 2, \ldots$ Тогда $f_\lambda(\mathbf{u})=1$ при всех $\mathbf{u}=\mathbf{u}_j$, $j=1, 2, \ldots, m$, из (2.2). Следовательно, существует m линейно независимых векторов $\mathbf{t}_j=\mathbf{u}_j H^{-1}$, $j=1, 2, \ldots, m$, для которых $|f_\xi(\mathbf{t}_j)|=1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть случайный вектор* ξ *имеет* m*-решетчатое распределение, то есть* m*-первых маргинальных распределений случайного вектора* $\lambda=(\xi-\mathbf{a})(H^{-1})'$ *являются решетчатыми со скачками в точках* 0, ± 1, $\pm 2, \ldots$, *тогда модуль характеристической функции* $f_\xi(\mathbf{t})$ *равен единице только в точках вида* $\mathbf{t}=(t_1, t_2, \ldots, t_m, 0, 0, \ldots, 0)=2\pi\mathbf{C}H^{-1}$, *где* $\mathbf{C}=(c_1, c_2, \ldots, c_m, 0, 0, \ldots, 0)$ — *вектор с вещественными координатами.*

Доказательство. Сперва покажем, что модуль характеристической функции $f_\lambda(\mathbf{u})$ обращается в единицу при $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_m, 0, \ldots, 0)$. Предположим, что существует $\mathbf{u}^0=(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0, u_{m+1}^0, \ldots, u_k^0)$, $u_{m+1}^0\neq 0$, такое, что

$$f_\lambda(\mathbf{u}^0)=e^{i(\mathbf{u}^0,\, \mathbf{b})}.$$

Так как система векторов $\mathbf{u}^0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ линейно независима, где $\mathbf{u}_j$, $j=1, 2, \ldots, m$, определены равенствами (2.2), то случайный вектор

$$\lambda^0=(\xi-\mathbf{a}-\mathbf{b}H)\left((H_0' H)^{-1}\right)'$$

имеет $m+1$ решетчатое маргинальное распределение, где

$$H_0=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{u^0}{2\pi} & & \frac{u_m^0}{2\pi} & \frac{u_{m+1}^0}{2\pi} & \frac{u_{m+2}^0}{2\pi} & & \frac{u_k^0}{2\pi} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

что противоречит условиям леммы 2.

По определению λ

$$f_\lambda(\mathbf{u})=Me^{i\left(\mathbf{u},\, (\xi-\mathbf{a})\,(H^{-1})'\right)}=e^{-i\,(\mathbf{u}H^{-1},\, \mathbf{a})}f_\xi(\mathbf{u}H^{-1}),$$

следовательно,

$$|f_\xi(\mathbf{t})|=1$$

при $\mathbf{t}=\mathbf{u}H^{-1}$. Лемма 2 доказана.

Ниже ограничимся исследованиями невырожденных случайных векторов ξ. Заметим, что для того чтсбы ξ распределение вырождалось в $k-1$-мерное распределение, несбходимо и достаточно, чтобы модуль его характеристической функции обращался в единицу в двух точках t_0 и $\beta\mathbf{t}_0$, отличных от начала координат, где β — иррациональное число (см. [41]).

Определение 2. *Абсолютную величину определителя матрицы* H *назовем шагом распределения и обозначим через* h. h *назовем максимальным шагом распределения, если для всех матриц* H *из определения* 1 *имеет место неравенство* $h\geqslant|\det H|$.

Лемма 3. *Шаг распределения* h *максимален тогда и только тогда, когда модуль характеристической функции* $f_\xi(\mathbf{t})$ *внутри симплекса с верши-*

нами $\mathbf{0}$, $2\pi\mathbf{e}_1H^{-1}, \ldots, 2\pi\mathbf{e}_mH^{-1}$ ($\mathbf{e}_1=(1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2=(0, 1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_m=(0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$) *меньше единицы, а при* $\mathbf{t}_j=2\pi\mathbf{e}_jH^{-1}$, $j=1, 2, \ldots, m$, $|f_\xi(\mathbf{t}_j)|=1$.

Утверждение леммы 3 немедленно вытекает из определения максимального шага распределения h и лемм 1 и 2.

Из всех рассуждений вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Модуль характеристической функции* $f_\xi(\mathbf{t})$ *невырожденного k-мерного случайного вектора* ξ *с m-решетчатым распределением обращается в единицу только в точках* $\mathbf{v}=2\pi\mathbf{v}H^{-1}=(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, 0, \ldots, 0)$, *где* $\mathbf{v}=(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, 0, \ldots, 0)$, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ 3. О разности между двумя нормальными распределениями

Пусть A и B — вещественные, симетрические и положительно определенные матрицы порядка $k\times k$; A^{-1} и B^{-1} — обратные матрицы, $|A|$ и $|B|$ — определители; $\mathbf{x}A\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}B\mathbf{x}'$ — квадратичные формы.

Напомним некоторые нам нужные результаты о матрицах и квадратичных формах.

Лемма 4 (см. [36], стр. 125). *Если разность $A-B$ является неотрицательно определенной матрицей, то и разность $B^{-1}-A^{-1}$ также является неотрицательно определенной матрицей.*

Лемма 5 (см., например, в [37], стр. 71). *Если матрица B является положительно определенной и матрица $A-B$ — неотрицательно определенная, то* $|A|\geqslant|B|$.

Докажем две леммы.

Лемма 6. *Пусть* $0<\varepsilon<1$, *и для всех* $\mathbf{x}\in R^k$ *имеет место неравенство*

$$|\mathbf{x}A\mathbf{x}'-\mathbf{x}B\mathbf{x}'|\leqslant\varepsilon(\mathbf{x}A\mathbf{x}'), \tag{3.1}$$

тогда

$$|\mathbf{x}A^{-1}\mathbf{x}'-\mathbf{x}B^{-1}\mathbf{x}'|\leqslant\varepsilon(\mathbf{x}B^{-1}\mathbf{x}'),$$

$$|\mathbf{x}A^{-1}\mathbf{x}'-\mathbf{x}B^{-1}\mathbf{x}'|\leqslant\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\mathbf{x}A^{-1}\mathbf{x}',\quad \mathbf{x}\in R^k, \tag{3.2}$$

и

$$(1-\varepsilon)^k|A|\leqslant|B|\leqslant(1+\varepsilon)^k|A|. \tag{3.3}$$

Доказательство леммы 6. Из неравенства (3.1) следует, что

$$\mathbf{x}\Big((1+\varepsilon)A-B\Big)\mathbf{x}'\geqslant 0 \text{ и } \mathbf{x}\Big(B-(1-\varepsilon)A\Big)\mathbf{x}'\geqslant 0. \tag{3.4}$$

Теперь в силу леммы 4 неотрицательно определенными являются матрицы

$$B^{-1}-\frac{1}{1+\varepsilon}A^{-1} \quad\text{и}\quad \frac{1}{1-\varepsilon}A^{-1}-B^{-1},$$

то есть

$$\mathbf{x}\Big(B^{-1}-\frac{1}{1+\varepsilon}A^{-1}\Big)\mathbf{x}'\geqslant 0 \quad\text{и}\quad \mathbf{x}\Big(\frac{1}{1-\varepsilon}A^{-1}-B^{-1}\Big)\mathbf{x}'\geqslant 0$$

при всех $\mathbf{x}\in R^k$. Отсюда следует неравенство (3.2).

Неравенство (3.3) является очевидным следствием из леммы 5 и соотношений (3.4). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть имеем нормальные распределения $\Phi_{\mathbf{a},A}(C)$ и $\Phi_{\mathbf{b},B}(C)$ с векторами* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *математических ожиданий и с невырожденными ковариационными матрицами A и B, причем для всех* $\mathbf{x}\in R^k$

$$|\mathbf{x}A\mathbf{x}'-\mathbf{x}B\mathbf{x}'|\leqslant \varepsilon(\mathbf{x}A\mathbf{x}'),\quad 0<\varepsilon<1.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\sup_{C\in\mathfrak{A}}|\Phi_{\mathbf{a},A}(C)-\Phi_{\mathbf{b},B}(C)|\leqslant 2\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,|(\mathbf{a}-\mathbf{b})D^{-1}|+$$
$$+\frac{\varepsilon k+(1+\varepsilon)^k-(1-\varepsilon)^k}{(1-\varepsilon)^{\frac{k}{2}}}. \tag{3.5}$$

Здесь и в дальнейшем $|(\mathbf{a}-\mathbf{b})D^{-1}|$ *— длина вектора* $(\mathbf{a}-\mathbf{b})D^{-1}\in R^k$; $A=D'D$.

Доказательство леммы 7. Положим I — единичная матрица порядка $k\times k$. Поскольку класс $\mathfrak{A}$ выпуклых борелевских множеств инвариантный относительно линейных невырожденных преобразований, то

$$\sup_{C\in\mathfrak{A}}|\Phi_{\mathbf{a},A}(C)-\Phi_{\mathbf{b},B}(C)|\leqslant\sup_{C\in\mathfrak{A}}|\Phi_{\mathbf{a},A}(C)-\Phi_{\mathbf{b},A}(C)|+$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\int_{R^k}\left|\frac{e^{-\frac{\mathbf{x}A^{-1}\mathbf{x}'}{2}}}{\sqrt{|A|}}-\frac{e^{-\frac{\mathbf{x}B^{-1}\mathbf{x}'}{2}}}{\sqrt{|B|}}\right|d\mathbf{x}=I_1+I_2.$$

Нетрудно заметить, что

$$\left(C+\left((\mathbf{a}-\mathbf{b})D^{-1}\right)\right)\Big\backslash\, C\in(\overset{\circ}{C})_{|(\mathbf{a}-\mathbf{b})D^{-1}|}.$$

Здесь $(\overset{\circ}{C})_{|(\mathbf{a}-\mathbf{b})D^{-1}|}$ — $|(\mathbf{a}-\mathbf{b})D^{-1}|$ — окрестность контура $\overset{\circ}{C}$ множества C, т.е.

$$(\overset{\circ}{C})_{|(\mathbf{a}-\mathbf{b})D^{-1}|}=\bigcup_{\mathbf{u}\in U}\left(C+|(\mathbf{a}-\mathbf{b})D^{-1}|\mathbf{u}\right)\Big\backslash\bigcap_{\mathbf{u}\in U}\left(C+|(\mathbf{a}-\mathbf{b})D^{-1}|\mathbf{u}\right),$$

где U — открытая единичная сфера в R^k. Пользуясь этими замечаниями и неравенством (1. 2), выводим, что

$$I_1\leqslant 2\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,|(\mathbf{a}-\mathbf{b})D^{-1}|.$$

В силу леммы 6

$$I_2\leqslant\frac{\big||B|-|A|\big|}{\sqrt{|B|}\left(\sqrt{|A|}+\sqrt{|B|}\right)}+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sqrt{|B|}}\int_{R^k}e^{-\frac{\mathbf{x}B^{-1}\mathbf{x}'}{2}}\left|1-e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}A^{-1}\mathbf{x}'-\mathbf{x}B^{-1}\mathbf{x}')}\right|d\mathbf{x}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{(1+\varepsilon)^k-(1-\varepsilon)^k}{(1-\varepsilon)^{\frac{k}{2}}}+\frac{\varepsilon}{2(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sqrt{|B|}}\int_{R^k}e^{-\frac{1-\varepsilon}{2}(\mathbf{x}B^{-1}\mathbf{x}')}(\mathbf{x}B^{-1}\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon k+(1+\varepsilon)^k-(1-\varepsilon)^k}{(1-\varepsilon)^{\frac{k}{2}}}. \tag{3.7}$$

Утверждение леммы 7 вытекает из соотношений (3.6) и (3.7).

§ 4. Усечение случайных векторов

„Усеченные" случайные векторы $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ определим следующим образом:

$$\eta_j=(\eta_{1j}, \eta_{2j} \ldots, \eta_{kj})=\begin{cases} \gamma_j & \text{при} \quad \gamma_j V^{-1}\gamma_j' \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad \gamma_j V^{-1}\gamma_j' > n. \end{cases}$$

Положим $M\eta_j$ – вектор математических ожиданий случайного вектора η_j;

$$\bar{\sigma}_i^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M(\eta_{ij}-M\eta_{ij})^2, \quad i=1, 2, \ldots, k;$$

Λ – ковариационная матрица случайного вектора

$$\mathbf{Z}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\eta_j;$$

$P\{\ldots\}$ – вероятность указанного в скобках события.

Основной результат этого параграфа содержится в следующей лемме.

Лемма 8. *Имеет место неравенство*

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}|P\{\mathbf{S}_n\in A\}-P\{\mathbf{Z}_n\in A\}|\leqslant nP\{\Theta V^{-1}\Theta'\geqslant n\}.$$

Доказательство леммы 8. *Пусть* Ω *пространство всех элементарных событий* ω; $W=\{\omega : \mathbf{S}_n(\omega)\in A\}$,

$$U_j=\left\{\omega : \left(\frac{\xi_j(\omega)-M\xi_j}{\sigma}\right) V^{-1}\left(\frac{\xi_j(\omega)-M\xi_j}{\sigma}\right)' \leqslant n\right\},$$

$U=\bigcap_{j=1}^{n} U_j$ и $\bar{U}=\Omega\backslash U$. Тогда для всех борелевских множеств A имеем

$$P\{\mathbf{S}_n(\omega)\in A\}=P\{W\cap U\}+P\{W\cap \bar{U}\}\leqslant$$

$$\leqslant P\{\mathbf{Z}_n(\omega)\in A\}+P\left\{\bigcup_{j=1}^{n}\bar{U}_j\right\}\leqslant P\{\mathbf{Z}_n(\omega)\in A\}+nP\{\Theta V^{-1}\Theta'>n\}.$$

Аналогично получаем неравенство

$$P\{\mathbf{Z}_n(\omega)\in A\}\leqslant P\{\mathbf{S}_n(\omega)\in A\}+nP\{\Theta V^{-1}\Theta'>n\}.$$

Лемма 8 доказана.

Пусть далее

$$\varkappa_n=M[(\Theta V^{-1}\Theta')\, g(\sqrt{\Theta V^{-1}\Theta'})].$$

Лемма 9. *При выполнении условий теоремы* 1 *для всех* n, *удовлетворяющих неравенству*

$$g(\sqrt{n})>4\varkappa_n, \tag{4.0}$$

$$\bar{\sigma}_j\geqslant\frac{1}{2}, \quad i=1, 2, \ldots, k, \tag{4.1}$$

кроме того, для всех n

$$|(M\eta_j, M\eta_j)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}\, g(\sqrt{n})} M[(\gamma_j V^{-1}\gamma_j)\, g(\sqrt{\gamma_j V^{-1}\gamma_j'})], \; j=1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство леммы 9. Имеем

$$\sigma_i^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{R^k}(\mathbf{x},\ \mathbf{e}_i)^2\,dF_j(\mathbf{x})=1,\qquad \int_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'\leqslant n}(\mathbf{x},\ \mathbf{e}_i)\,dF_j(\mathbf{x})=$$

$$=-\int_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'>n}(\mathbf{x},\ \mathbf{e}_i)\,dF_j(\mathbf{x}),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\tag{4.2}$$

$$\bar\sigma_i^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M(\eta_{ij}-M\eta_{ij})^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'\leqslant n}(\mathbf{x},\ \mathbf{e}_i)^2\,dF_j(\mathbf{x})-\right.$$

$$\left.-\Big(\int_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'\leqslant n}(\mathbf{x},\ \mathbf{e}_i)\,dF_j(\mathbf{x})\Big)^2\right),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Следовательно,

$$1-\bar\sigma_i^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\Big(\int_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'>n}(\mathbf{x},\ \mathbf{e}_i)^2\,dF_j(\mathbf{x})+\Big(\int_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'>n}(\mathbf{x},\ \mathbf{e}_i)\,dF_j(\mathbf{x})\Big)^2\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'>n}(\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}')\,dF_j(\mathbf{x})+\Big(\int_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'>n}(\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}')^{\frac{1}{2}}\,dF_j(\mathbf{x})\Big)^2\right)\leqslant\frac{2\varkappa_n}{g(\sqrt{n})}\,.$$

Неравенство (4.1) доказали. Второе неравенство в лемме 6 очевидным образом вытекает из соотношения (4.2).

Лемма 10. *При выполнении условий теоремы* 1 *имеет место неравенство*

$$|\,\mathbf{t}V\mathbf{t}'-\mathbf{t}\Lambda\mathbf{t}'\,|\leqslant\frac{2\varkappa_n}{g(\sqrt{n})}\,(\mathbf{t}V\mathbf{t}')\tag{4.3}$$

для всех $\mathbf{x}\in R^k$.

Доказательство леммы 10. Очевидно

$$\mathbf{t}V\mathbf{t}'-\mathbf{t}\Lambda\mathbf{t}'=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(M\left[\Big(\frac{\xi_j-M\xi_j}{\sigma},\ \mathbf{t}\Big)^2\right]-M[(\eta_j-M\eta_j,\mathbf{t})^2]\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'>n}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})^2\,dF_j(\mathbf{x})+[M(\eta_j,\ \mathbf{t})^2]\right).\tag{4.4}$$

Здесь использовали равенство $(M\eta_j,\ \mathbf{t})=M\,(\eta_j,\ \mathbf{t})$. Поскольку

$$|(\mathbf{x},\ \mathbf{t})|\leqslant\sqrt{(\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}')(\mathbf{t}V\mathbf{t}')}\,,$$

то

$$|M(\eta_j,\ \mathbf{t})|=\Big|-\int_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'>n}(\mathbf{x},\mathbf{t})d F_j(\mathbf{x})\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}}{\sqrt{g(\sqrt{n})}}\Big(\int_{R^k}(\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}')\,g(\sqrt{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'})\,dF_j(\mathbf{x})\Big)^{\frac{1}{2}}\tag{4.5}$$

и

$$\int\limits_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'>n} (\mathbf{x},\ \mathbf{t})^2\,dF_j(\mathbf{x}) \leqslant \frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{g(\sqrt{n})} \int\limits_{R^k} (\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}')\,g(\sqrt{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'})\,dF_j(\mathbf{x}). \quad (4.6)$$

Из (4.4–4.6) вытекает (4.3). Лемма 10 доказана.

Следствие 2. *Для всех n, удовлетворяющих неравенству* (4.0), *имеет место неравенство*

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{t}V\mathbf{t}' < \mathbf{t}\Lambda\mathbf{t}', \quad \mathbf{t}\in R^k, \quad (4.7)$$

т.е. матрица Λ положительно определена.

§ 5. Асимптотические разложения для произведений характеристических функций

Положим: $f_j(\mathbf{t})$ — характеристическая функция случайного вектора γ_j; $\beta_r(\mathbf{t})$ и $\varkappa_r(\mathbf{t})$ — абсолютный момент и семиинвариант r-того порядка случайной величины $(\Theta, \mathbf{t})$, где $\mathbf{t}\in R^k$; $\beta_r = M\,[(\Theta V^{-1}\Theta')^{\frac{r}{2}}]$; $\beta_{rj} = M\,[(\gamma_j V^{-1}\gamma_j')^{\frac{r}{2}}]$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Рассмотрим асимптотические разложения для частных производных характеристической функции $f^{(n)}(\mathbf{t}) = \prod\limits_{j=1}^{n} f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)$ нормированной и центрированной суммы $\mathbf{S}_n$. Когда слагаемые в сумме $\mathbf{S}_n$ имеют конечные моменты s-го порядка $(s\geqslant 3)$, тогда имеет место формальное разложение

$$f^{(n)}(\mathbf{t}) = e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}\left(1 + \sum_{j=1}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(i\mathbf{t})\right) + R_n(\mathbf{t}). \quad (5.1)$$

Здесь многочлены $P_j(i\mathbf{t})$ определяются равенством

$$\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{s-3}\frac{\varkappa_{\nu+2}(i\mathbf{t})}{(\nu+2)!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\right\} = 1 + \sum_{j=1}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(i\mathbf{t}) +$$

$$+\sum_{j=s-2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j \bar{P}_j(i\mathbf{t}). \quad (5.0)$$

Известна [32] оценка остаточного члена $R_n(\mathbf{t})$. Сформулируем этот результат, поскольку он нам будет нужен.

Лемма 11. *Пусть независимые случайные векторы*

$$\frac{\gamma_1}{\sqrt{n}},\quad \frac{\gamma_2}{\sqrt{n}},\ \ldots,\ \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}$$

имеют конечные моменты s-го порядка $(s\geqslant 3)$ и их характеристические функции

$$f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right),\ j=1,\ 2,\ \ldots,n,$$

удовлетворяют неравенству

$$\left|f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right| \geqslant \delta > 0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{5.2}$$

при

$$\mathbf{t} \in M_\delta = \left\{\mathbf{t} : \left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}\right)^{\frac{1}{s-2}} \leqslant C_1\sqrt{n}\right\},$$

где

$$C_1 = \min\left\{\frac{1}{4},\ \left(\frac{s\cdot\delta^s}{4\cdot 2^s}\right)^{\frac{1}{s-2}}\right\}.$$

Тогда

$$|R_n(\mathbf{t})| \leqslant \left(2^{s-1} + \frac{2^{s-1}}{s\delta^s}\right)\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{n^{\frac{s-2}{2}}}\, e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{4}}$$

при $\mathbf{t}\in M_\delta$.

Замечание. Для одинаково распределенных случайных векторов неравенство (5.2) выполнено с $\delta=0{,}99$ при

$$\mathbf{t} \in \left\{\mathbf{t} : \left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}\right)^{\frac{1}{s-1}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}\right\}$$

(см. [34]), а в нашем случае лишь известно (см. [32]), что неравенство (5.2) выполнено с $\delta=0{,}5$ при

$$\mathbf{t} \in \left\{\mathbf{t} : \mathbf{t}V\mathbf{t}'\left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}\right)^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \sqrt{n}\right\}.$$

Следует отметить, что утверждение леммы 11 является новым и для одномерных характеристических функций.

Сформулируем еще две леммы из работы [34].

Положим

$$\sum_i^{r-1}{}^{*} = \sum_{j_i=i}^{r-1}\ \sum_{j_{i-1}=i-1}^{j_i-1} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{(r-1)!}{j_i j_{i-1}\cdots j_1 (r-j_i-1)!\,(j_i-j_{i-1}-1)!\cdots(j_2-j_1-1)!\,(j_1-1)!}$$

и

$$\sum_i^{r-1}{}^{**} = \sum_{j_i=i}^{r-1}\ \sum_{j_{i-1}=i-1}^{j_i-1} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{(-1)^i (r-1)!}{(r-j_i)!\,(j_i-j_{i-1})!\cdots(j_2-j_1)!\,(j_1-1)!}.$$

Замечание (см. [35], стр. 574). Имеет место равенство

$$1 + \sum_{i=1}^{r-1}\ \sum_{j_i=i}^{r-1}\ \sum_{j_{i-1}=i-1}^{j_i-1} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} 1 = 2^{r-1}.$$

Лемма 12. *Пусть* $q(\mathbf{t}) = q(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ *некоторая* r*-раз дифференцируемая функция, тогда*

$$d^r \ln q(\mathbf{t}) = \frac{1}{q(\mathbf{t})}\, d^r q(\mathbf{t}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r-1} \sum_i^{r-1}{}^{**} \frac{d^{r-j_i} q(\mathbf{t})\, d^{j_i-j_{i-1}} q(\mathbf{t}) \cdots d^{j_2-j_1} q(\mathbf{t})\, d^{j_1} q(\mathbf{t})}{[q(\mathbf{t})]^{i+1}}.$$

Здесь $d^\nu q(\mathbf{t})$ — *дифференциал* ν*-го порядка функции* $q(\mathbf{t})$.

Лемма 13. *При выполнении условий леммы* 12 *имеем*

$$\frac{1}{q(\mathbf{t})}\, d^r q(\mathbf{t}) = d^r \varkappa(\mathbf{t}) + \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{i}^{r-1 \ **} d^{r-j_l} \varkappa(\mathbf{t})\, d^{j_l-j_{l-1}} \varkappa(\mathbf{t}) \ldots d^{j_2-j_1} \varkappa(\mathbf{t})\, d^{j_1} \varkappa(\mathbf{t}),$$

где $\varkappa(\mathbf{t}) = \ln q(\mathbf{t})$.

Через $\Delta_\omega^{(r)} q(\mathbf{t})$ обозначим функцию многих переменных, которая равна дифференциалу $d^r q(\mathbf{t})$ после замены $dt_1, dt_2, \ldots, dt_k$ на $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$. Например,

$$\Delta_\omega^{(r)} f_j(\mathbf{t}) = i^r \int_{R^k} (\mathbf{x}, \omega)^r e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} dF_j(\mathbf{x}), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k).$$

Лемма 14. *Если характеристическая функция* $f_j(\mathbf{t})$ *имеет конечные частные производные s-го порядка, то*

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial \omega_m^r} \Delta_\omega^{(s)} \ln f_j(\mathbf{t}) \right| \leqslant \frac{s!\, 2^s s^r (\omega V \omega')^{\frac{u}{2}} \beta_{sj}}{|f_j(\mathbf{t})|^s}, \quad m = 1, 2, \ldots, k,$$

для $r = 0, 1, 2, \ldots$ *Здесь* $u = s - r$ *при* $r < s$ и $u = 0$ *при* $r > s$.

Поскольку

$$i^s \varkappa_{sj}(\omega) = \Delta_\omega^{(s)} \ln f_j(\mathbf{t}) |_{\mathbf{t}=0},$$

то из этой леммы 14 вытекает, что (5.4)

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial \omega_m^r} \varkappa_{sj}(\omega) \right| \leqslant 2!\, 2^s s^r (\omega V \omega')^{\frac{u}{2}} \beta_{sj}.$$

Доказательство леммы 14. По лемме 12 получаем

$$d^s \ln f_j(\mathbf{t}) = \frac{d^s f_j(\mathbf{t})}{f_j(\mathbf{t})} + \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{i}^{s-1 \ **} \frac{d^{\nu_{l+1}-\nu_l} f_j(\mathbf{t})\, d^{\nu_l-\nu_{l-1}} f_j(\mathbf{t}) \cdots d^{\nu_1-\nu_0} f_j(\mathbf{t})}{[f_j(\mathbf{t})]^{l+1}}.$$

Здесь $\nu_{l+1} = s$ и $\nu_0 = 0$. В этой формуле дифференциалы $dt_1, dt_2, \ldots, dt_k$ заменяем на $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ и r раз дифференцируем по ω_m:

$$\frac{\partial^r}{\partial \omega_m^r} \Delta_\omega^{(s)} \ln f_j(\mathbf{t}) = \frac{1}{f_j(\mathbf{t})} \frac{\partial^r}{\partial \omega_m^r} \Delta_\omega^{(s)} f_j(\mathbf{t}) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{i}^{s-1 \ **} \sum_{n_1+\ldots+n_{l+1}=r} \frac{r!}{n_1! \ldots n_{l+1}!} \frac{1}{[f_j(\mathbf{t})]^{l+1}} \times$$

$$\times \frac{\partial^{n_{l+1}}}{\partial \omega_m^{n_{l+1}}} \Delta_\omega^{(\nu_{l+1}-\nu_l)} f_j(\mathbf{t}) \ldots \frac{\partial^{n_1}}{\partial \omega_m^{n_1}} \Delta_\omega^{(\nu_1-\nu_0)} f_j(\mathbf{t}), \tag{5.5}$$

$$n_1, \ldots, n_{l+1} = 0, 1, \ldots, r.$$

По определению оператора $\Delta_\omega^{(\nu)}$ имеем

$$\frac{\partial^l}{\partial \omega_m^l} \Delta_\omega^{(\nu)} f_j(\mathbf{t}) = i^\nu \nu(\nu-1) \ldots (\nu-l-1) \int_{R^k} (\mathbf{x}, \omega)^{\nu-l} (\mathbf{x}, \mathbf{e}_m)^l e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} dF_j(\mathbf{x}).$$

где $\mathbf{e}_m$ — единичный вектор. Поскольку

$$|(\mathbf{x}, \omega)| \leqslant \sqrt{(\mathbf{x} V^{-1} \mathbf{x}')(\omega V \omega')}$$

и

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{e}_m)| \leqslant \sqrt{(\mathbf{x} V^{-1} \mathbf{x}')(\mathbf{e}_m V \mathbf{e}_m')},$$

то

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial \omega_m^l} \Delta_\omega^{(\nu)} f_j(\mathbf{t}) \right| \leqslant \nu(\nu-1) \ldots (\nu-l-1)(\omega V\omega')^{\frac{\nu-l}{2}} \beta_{\nu j}.$$

Используем это неравенство в (5.5) и получаем утверждение леммы 14 для $r=0, 1, \ldots, s$. При $r=s+1, s+2, \ldots$

$$\frac{\partial^r}{\partial \omega_m^r} \Delta_\omega^{(s)} \ln f_j(\mathbf{t}) \equiv 0, \quad m=1, 2, \ldots, k.$$

Лемма 14 доказана.

Положим

$$\psi(\mathbf{t}) = \sum_{j=2}^{s-2} \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j \varkappa_j(\mathbf{t}) = \sum_{j=2}^{s-2} \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{j-2} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \varkappa_{jl}(\mathbf{t}).$$

Лемма 15. *При*

$$\mathbf{t}V\mathbf{t}' \leqslant \frac{n}{16} \left(\frac{\beta_s}{k}\right)^{-\frac{2}{s-2}}$$

имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial^r \psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} \right| \leqslant \frac{k(s-1)^r}{2^{r-2}} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-r}{2}}, \quad m=1, 2, \ldots, k, \tag{5.6}$$

для $r=0, 1, \ldots, s-1$. *В случае* $r=s, s+1, \ldots$

$$\frac{\partial^r \psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} \equiv 0.$$

Доказательство леммы 15. Очевидно, что $\beta_2 = k$ и

$$\beta_\nu \leqslant \beta_s^{\frac{\nu-2}{s-2}} \beta_2^{\frac{s-\nu}{s-2}} \leqslant k^{\frac{s-\nu}{s-2}} \beta_s^{\frac{\nu-2}{s-2}}. \tag{5.7}$$

По формулам (5.4) и (5.7)

$$\left| \frac{\partial^r \psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} \right| \leqslant \sum_{j=r+2}^{s-2} \frac{2^j j^r \beta_j (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{j-r}{2}}}{n^{\frac{j-2}{2}}} \leqslant \sum_{j=r+2}^{s-2} \frac{2^j j^r}{n^{\frac{j-2}{2}}} k^{\frac{s-j}{s-2}} \beta_s^{\frac{j-2}{s-2}} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{j-r}{s-2}} =$$

$$= 2^2 k (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-r}{2}} \sum_{j=r+2}^{s-1} j^r \left(\frac{2(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} \left(\frac{\beta_s}{k}\right)^{\frac{1}{s-2}} \right)^{j-2}.$$

Отсюда при

$$\mathbf{t}V\mathbf{t}' \leqslant \frac{n}{16} \left(\frac{\beta_s}{k}\right)^{-\frac{2}{s-2}}$$

вытекает утверждение леммы 15.

Лемма 16. *Пусть независимые случайные векторы* $\frac{\gamma_1}{\sqrt{n}}, \frac{\gamma_2}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}$ *имеют конечные моменты s-го порядка* ($s \geqslant 3$) *и их характеристические функции удовлетворяют неравенству*

$$\left| f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right| \geqslant \delta > 0$$

при

$$\mathbf{t}\in N_8=\{\mathbf{t}:\mathbf{t}V\mathbf{t}'\leqslant C_2 n(\beta_s)^{-\frac{2}{s-2}}\},$$

где

$$C_2=\min\left\{\frac{\delta^{2s}}{4}\,;\ \left(\frac{s\delta^s}{4\cdot 2^s}\right)^{\frac{2}{s-2}}\,;\ 1\Big/\left((s!)^2\,4^{s+4}\,k^{2(s-2)}\right)\right\},$$

при этом пусть матрица V положительно определенная, тогда существует зависящая только от s постоянная $C_1(s)$ такая, что при всех $\mathbf{t}\in N_8$, $m=1,2,\ldots,k$, и при $r=0,1,\ldots,s$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}R_n(\mathbf{t})\right|\leqslant\frac{C_1(s)\,k^s\beta_s(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-r}{2}}}{\delta^s n^{\frac{s-2}{2}}}\,e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{16}}. \tag{5.8}$$

Из леммы 16 и замечания к лемме 11 вытекает следствие.

Следствие 3. *Если $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, то*

$$\left|\frac{\partial^r R_n(\mathbf{t})}{\partial t_m^r}\right|\leqslant\frac{C_1(s)\,k^s\beta_s(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-r}{2}}}{n^{\frac{s-2}{2}}}\,e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{16}} \tag{5.9}$$

при

$$\mathbf{t}V\mathbf{t}'\leqslant C_3 n(\beta_s)^{-\frac{2}{s-2}},\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ \text{и}\ r=0,\ 1,\ \ldots,\ s.$$

Здесь

$$C_3=\min\left\{\frac{(0{,}99)^{2s}}{4}\,;\ \left(\frac{s\,(0{,}49)^s}{3}\right)^{\frac{2}{s-2}}\,;\ 1\Big/\left((s!)^2\,4^{s+4}\,k^{2(s-1)}\right)\right\}.$$

Следствие 4. *Для разнораспределенных случайных векторов $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ неравенство* (5.9) *имеет место лишь при*

$$\mathbf{t}V\mathbf{t}'\leqslant C_4 n^{\frac{1}{3}}(\beta_s)^{-\frac{2}{3(s-2)}},\quad \text{где}\quad C_4=1\Big/\left((s!)^2\,2^{2s+4}\,k^{2(s-2)}\right).$$

Доказательство леммы 16. По многомерной формуле Тейлора при $\mathbf{t}\in N_8$ получаем

$$\varkappa(\mathbf{t})=\ln f^{(n)}(\mathbf{t})=\sum_{j=2}^{s-1}\frac{1}{j!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\sum_{\nu=1}^{n}\varkappa_{j\nu}(\mathbf{t})+$$

$$+\frac{1}{s!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^s\sum_{\nu=1}^{n}\Delta_{\mathbf{t}}^{(s)}\ln f_j\left(\frac{\mathbf{t}_0^{(\nu)}}{\sqrt{n}}\right)=\psi(\mathbf{t})+b(\mathbf{t}),$$

где $\mathbf{t}_0^{(\nu)}=\varepsilon_\nu\mathbf{t}$, $0<\varepsilon_\nu<1$, $\nu=1,2,\ldots,k$.

Далее с помощью леммы 13 частные производные r-го порядка по t_m характеристической функции $f^{(n)}(\mathbf{t})$ выражаем через частные производные ее логарифма $\varkappa(\mathbf{t})$, а затем $\varkappa(\mathbf{t})$ заменяем на сумму $\psi(\mathbf{t})+b(\mathbf{t})$.

Итак,

$$\frac{\partial^r}{\partial t_m^r} f^{(n)}(\mathbf{t}) = f^{(n)}(\mathbf{t})\frac{\partial^r \varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{i}^{r-1}{}^{*} f^{(n)}(\mathbf{t}) \frac{\partial^{j_{i+1}-j_i}\varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{i+1}-j_i}} \cdots \frac{\partial^{j_1-j_0}\varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_1-j_0}} =$$

$$= f^{(n)}(\mathbf{t})\frac{\partial^r \psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} + f^{(n)}(\mathbf{t})\frac{\partial^r b(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{i}^{r-1}{}^{*} f^{(n)}(\mathbf{t})\Bigg[\frac{\partial^{j_{i+1}-j_i}\varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{i+1}-j_i}} \cdots$$

$$\cdots \frac{\partial^{j_{l+1}-j_l}\varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{l+1}-j_l}} \frac{\partial^{j_l-j_{l-1}}\psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_l-j_{l-1}}} \cdots \frac{\partial^{j_1-j_0}\varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_1-j_0}} +$$

$$+ \frac{\partial^{j_{i+1}-j_i}\varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{i+1}-j_i}} \cdots \frac{\partial^{j_{l+1}-j_l}\varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{l+1}-j_l}} \frac{\partial^{j_l-j_{l-1}} b(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_l-j_{l-1}}} \frac{\partial^{j_{l-1}-j_{l-2}} b(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{l-1}-j_{l-2}}} \cdots$$

$$\cdots \frac{\partial^{j_1-j_0} b(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_1-j_0}}\Bigg]. \tag{5.10}$$

Аналогично,

$$e^{-\psi(\mathbf{t})}\frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r} = \frac{\partial^r \psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{i}^{r-1}{}^{*} \frac{\partial^{j_{i+1}-j_i}\psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{i+1}-j_i}} \cdots \frac{\partial^{j_1-j_0}\psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_1-j_0}}. \tag{5.11}$$

Из (5.10) вычитаем равенство (5.11) и получаем

$$\frac{1}{f^{(n)}(\mathbf{t})}\frac{\partial^r f^{(n)}(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} - \frac{1}{e^{\psi(\mathbf{t})}}\frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r} = \frac{\partial^r b(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{i}^{r-1}{}^{*}\sum_{l=0}^{i} \frac{\partial^{j_{i+1}-j_i}\varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{i+1}-j_i}} \cdots$$

$$\cdots \frac{\partial^{j_{i-l+1}-j_{i-l}} b(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{i-l+1}-j_{i-l}}} \frac{\partial^{j_{i-l}-j_{i-l-1}}\psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{i-l}-j_{i-l-1}}} \cdots \frac{\partial^{j_1-j_0}\psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_1-j_0}}. \tag{5.12}$$

Далее обозначим

$$v(\mathbf{t}) = e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}\left\{1 + \sum_{j=1}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(i\mathbf{t})\right\}.$$

Очевидно

$$\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\left[f^{(n)}(\mathbf{t}) - v(\mathbf{t})\right] = \frac{\partial^r f^{(n)}(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} - \frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r}\,\frac{f^{(n)}(\mathbf{t})}{e^{\psi(\mathbf{t})}} +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(\mathbf{t})}{e^{\psi(\mathbf{t})}}\frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r} - \frac{v(\mathbf{t})}{e^{\psi(\mathbf{t})}}\frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r} + \frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r} - \frac{\partial^r v(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} +$$

$$+ \frac{v(\mathbf{t})}{e^{\psi(\mathbf{t})}}\frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r} - \frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4. \tag{5.13}$$

Далее оценим разности Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4.

Оценка Y_1. По лемме 14 для всех $\mathbf{t}\in N_\delta$ получаем

$$\left|\frac{\partial^r b(\mathbf{t})}{\partial t_m^r}\right| = \frac{1}{s!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{s-2}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\Delta_{\mathbf{t}}^{(s)}\ln f_j\left(\frac{\mathbf{t}_0^{(j)}}{\sqrt{n}}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^s s^r (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-r}{2}}}{n^{\frac{s-r}{2}}}\,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_{sj}}{\left|f_j\left(\frac{\mathbf{t}_0^{(j)}}{\sqrt{n}}\right)\right|^s} \leqslant \frac{2^s s^r \beta_s (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-r}{2}}}{\delta^s n^{\frac{s-2}{2}}}. \tag{5.14}$$

Теперь оценим частную производную

$$\frac{\partial^l \varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^l}$$

при $\mathbf{t} \in N_8$. По определению оператора $\Delta_\omega^{(l)}$ при $\omega = \mathbf{e}_m$ имеем

$$\Delta_{\mathbf{e}_m}^{(l)} \ln f_j(\mathbf{t}) = \frac{\partial^l}{\partial t_m^l} \ln f_j(\mathbf{t}).$$

Из леммы 14 вытекает

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial t_m^l} \ln f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right| \leqslant \frac{2^{l-1}(l-1)!\, M[\,|(\mathbf{e}_m, \gamma_j)|^l]}{n^{\frac{l}{2}} \left| f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^l} \leqslant \frac{2^{l-1}(l-1)!\, \beta_{lj}}{n^{\frac{l}{2}} \left| f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right|^l}.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial^l \varkappa(\mathbf{t})}{\partial t_m^l} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^l}{\partial t_m^l} \ln f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) \right| \leqslant \frac{2^{l-1}(l-1)!\, \beta_l}{\delta^l n^{\frac{l-2}{2}}} \leqslant \frac{k(l-1)!\,(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-l}{2}}}{2} \quad (5.15)$$

при $\mathbf{t} \in N_8$.

По определению Y_1 $\Big($см. (5.12)$\Big)$ и из неравенств (5.6) и (5.14–5.15) для $\mathbf{t} \in N_8$ получаем

$$\frac{|Y_1|}{|f^{(n)}(\mathbf{t})|} \leqslant \frac{s^r 2^s \beta_s (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-r}{2}}}{\delta^s n^{\frac{s-2}{2}}} + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{i}^{r-1}{}^{*} \sum_{l=0}^{i} \frac{k(j_{l+1} - j_l - 1)!}{2} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-(j_{l+1}-j_l)}{2}} \cdots$$

$$\cdots \frac{k(j_{i-l+2} - j_{i-l+1})!}{2} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-(j_{i-l+2}-j_{i-l+1})}{2}} \times$$

$$\times \frac{2^s s^{j_{i-l+1}-j_{i-l}} \beta_s (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-(j_{i-l+1}-j_{i-l})}{2}} k(s-1)^{j_{i-l}-j_{i-l-1}} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-(j_{i-l}-j_{i-l-1})}{2}}}{2^{j_{i-l}-j_{i-l-1}-2}} \cdots$$

$$\cdots \frac{k(s-1)^{j_1-j_0} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-(j_1-j_0)}{2}}}{2^{j_1-j_0-2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s^r 2^s \beta_s (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-r}{2}}}{\delta^s n^{\frac{s-2}{2}}} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{r-1} k^i (r-1)!\, 2^{r-1} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^i \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s^r k^{r-1}\, 2 4^{r+s} (r-1)!\beta_s (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-r}{2}}}{\delta^s n^{\frac{s-2}{2}}} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{r-1} \left(\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{8}\right)^i \right\}. \quad (5.16)$$

Осталось оценить сверху характеристическую функцию $f^{(n)}(t)$. Имеем

$$|f^{(n)}(\mathbf{t})|^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left| 1 - \frac{M[(\gamma_j, \mathbf{t})^2]}{n} + \frac{4M[\,|(\gamma_j, \mathbf{t})|^3]}{3n^{\frac{3}{2}}} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{ -\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2} \left(1 - \frac{8}{3} \frac{\beta_3(\mathbf{t})}{\mathbf{t}V\mathbf{t}' \sqrt{n}}\right) \right\} \leqslant \exp\left\{ -\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{3} \right\}$$

при $\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{\mathbf{t}V\mathbf{t}'} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8}$. Эта область изменения $\mathbf{t}$ содержит в себе эллипсоид

$$\mathbf{t}V\mathbf{t}' \leqslant \frac{n}{64} \beta_3^{-2}.$$

Поскольку

$$\beta_3 \leqslant k \left(\frac{\beta_s}{k}\right)^{\frac{1}{s-2}},$$

то область изменения $\mathbf{t}$ можно сузить до эллипсоида

$$\mathbf{t}V\mathbf{t}' \leqslant \frac{n}{64k^2} \left(\frac{\beta_s}{k}\right)^{-\frac{2}{s-2}}.$$

Поэтому при $\mathbf{t} \in N_8$ имеет место неравенство

$$|f^{(n)}(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{6}\right\}.$$

Отсюда и из (5.16) следует, что

$$|Y_1| \leqslant \frac{s^r k^{r-1} 2^{4r+s}(r-1)!\,\beta_s (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-r}{2}} e^{-\frac{5}{24}\mathbf{t}V\mathbf{t}'}}{\delta^s n^{\frac{s-2}{2}}}$$

для всех $\mathbf{t} \in N_8$.

Оценка Y_2:

$$Y_2 = e^{-\psi(\mathbf{t})}[f^{(n)}(\mathbf{t}) - v(\mathbf{t})] \frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r}, \quad m = 1, 2, \ldots, k.$$

В силу леммы 11

$$|f^{(n)}(\mathbf{t}) - v(\mathbf{t})| \leqslant \left(2^{s-1} + \frac{2^{s-1}}{s \cdot \delta^s}\right) \frac{\beta_s (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s}{2}}}{n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{4}} \tag{5.17}$$

при $\mathbf{t} \in N_8$.

Теперь оценим произведение

$$I = e^{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r}.$$

По лемме 13

$$I = \frac{\partial^r \psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{i}^{r-1}{}^{**} \frac{\partial^{j_{i+1}-j_i} \psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_{i+1}-j_i}} \cdots \frac{\partial^{j_1-j_0} \psi(\mathbf{t})}{\partial t_m^{j_1-j_0}},$$

где $j_{i+1} = r$ и $j_0 = 0$. Используя (5.6), получаем

$$|I| \leqslant \frac{k(s-1)^r}{2^{r-2}} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-r}{2}} +$$

$$+ \sum_{1=i}^{r-1} \sum_{i}^{r-1}{}^{*} \frac{k(s-1)^{j_{i+1}-j_i} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-(j_{i+1}-j_i)}{2}}}{2^{j_{i+1}-j_i-2}} \cdots \frac{k(s-1)^{j_1-j_0} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-(j_1-j_0)}{2}}}{2^{j_1-j_0-2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k^r (s-1)^r (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-r}{2}}}{2^{r-2}} \left(1 + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{i}^{r-1}{}^{*} 2^{2i} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^i\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{5r} k^{r-1} (s-1)^r (r-1)!\,(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-r}{2}} e^{\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{8}} \tag{5.18}$$

при $\mathbf{t}\in N_8$. Из неравенств (5.17) и (5.18) следует

$$|Y_2| \leqslant \frac{2^{6r+s} k^r (s-1)^{r-1} (r-1)!\, \beta_s (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-r}{2}}}{\delta^s n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{16}}$$

для всех $\mathbf{t}\in N_8$.

Оценка Y_3:

$$Y_3 = \frac{\partial^r}{\partial t_m^r} [e^{\psi(\mathbf{t})} - v(\mathbf{t})] = \frac{\partial^r}{\partial t_m^r} \left[e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}} \sum_{j=s-2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j \bar{P}_j (i\mathbf{t}) \right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{r} \sum_{j=s-2}^{\infty} \frac{r!}{p!\,(r-p)!} \frac{\partial^p e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}}{\partial t_m^p} \cdot \frac{\partial^{r-p} \bar{P}_j (i\mathbf{t})}{\partial t_m^{r-p}} . \qquad (5.19)$$

Многочлены $P_j(i\mathbf{t})$, $j=1, 2, \ldots, s-3$, из формулы (5.1), а многочлены $\bar{P}_j(i\mathbf{t})$, $j=s-2, s-1, \ldots$, определяем формальным равенством (5.0). Известно [34], что

$$\bar{P}_j (i\mathbf{t}) = \frac{\varkappa_{j+2}(i\mathbf{t})}{(j+2)!} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{l}^{j-1}{}^{*} \frac{\varkappa_{\nu_{l+1}-\nu_l+2}(i\mathbf{t}) \ldots \varkappa_{\nu_1-\nu_0+2}(i\mathbf{t})}{\nu_{l+1}!\,(\nu_{l+1}-\nu_l+2)(\nu_{l+1}-\nu_l+1)(\nu_l-\nu_{l-1}+2)(\nu_l-\nu_{l-1}+1)\ldots(\nu_1-\nu_0+2)(\nu_1-\nu_0+1)},$$

где $\nu_{j+1}=j$, $\nu_0=0$ и $\varkappa_j(i\mathbf{t})\equiv 0$ при $j=s+1, s+2, \ldots$

Нетрудно проверить, что

$$\left| \frac{\partial^\nu \mathbf{t}V\mathbf{t}'}{\partial t_m^\nu} \right| \leqslant 2k (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-\nu}{2}}, \quad m=1, 2, \ldots, k,$$

для $\nu=0, 1, 2, \ldots$

Поскольку

$$e^{\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}} \frac{\partial^p e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}}{\partial t_m^p} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^p \mathbf{t}V\mathbf{t}'}{\partial t_m^p} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{l}^{p-1}{}^{**} \frac{\partial^{j_{l+1}-j_l} \mathbf{t}V\mathbf{t}'}{\partial t_m^{j_{l+1}-j_l}} \cdots \frac{\partial^{j_1-j_0} \mathbf{t}V\mathbf{t}'}{\partial t_m^{j_1-j_0}}, \quad j_{l+1}=p, \quad j_0=0,$$

то

$$e^{\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}} \left| \frac{\partial^p e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}}{\partial t_m^p} \right| \leqslant \frac{2k (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-p}{2}}}{2} + \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{l}^{p-1}{}^{**} \frac{(2k)^{l+1}}{2^{l+1}} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{l+1-\frac{p}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant k^p (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-p}{2}} \left\{ 1 + \sum_{l=1}^{p-1} 2^{p-1} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^l \right\} \leqslant 2^{4p} k^p (p-1)!\, (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-p}{2}} e^{\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{8}} . \qquad (5.20)$$

С помощью неравенства (5.4) после несложных вычислений получаем

$$\left| \frac{\partial^v \varkappa_u (i\mathbf{t})}{dt_m^v} \right| \leqslant s!\, 2^s s^v k^{\frac{s-u}{s-2}} \beta_s^{\frac{u-2}{s-2}} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{u-v}{2}} .$$

Отсюда и равенства

$$\left|\frac{\partial^{r-p}\bar{P}_j(it)}{\partial t_m^{r-p}}\right| = \left|\frac{2}{(j+2)!}\frac{\partial^{r-p}\varkappa_{j+2}(it)}{\partial t_m^{r-p}} + \sum_{l=1}^{j-1}\sum_{l}^{j-1}{}^{*}\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_{l+1}=r-p\\ m_1,\ldots,m_{l+1}=0,1,\ldots,r-p}}\right. \times$$

$$\left.\times\frac{(r-p)!\dfrac{\partial^{m_{l+1}}\varkappa_{j_{l+1}-j_l+2}(it)}{\partial t_m^{m_{l+1}}}\cdots\dfrac{\partial^{m_1}\varkappa_{j_1-j_0+2}(it)}{\partial t_m^{m_1}}}{m_1!\,m_2!\ldots m_{l+1}!\,j_{l+1}!\,(j_{l+1}-j_l+2)(j_{l+1}-j_l+1)\ldots(j_1-j_0+2)(j_1-j_0+1)}\right|$$

следует

$$\left|\frac{\partial^{r-p}\bar{P}_j(it)}{\partial t_m^{r-p}}\right| \leqslant \frac{s!\,2^s s^{r-p}k^{\frac{s-j}{s-2}}\beta_s^{\frac{j}{s-2}}(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{j-(r-p)}{2}}}{(j+2)!} +$$

$$+\sum_{l=1}^{j-1}2^{j-1}s^{r-p}(s!\,2^s)^{l+1}(l+1)^{r-p}k^{\frac{s-2(l+1)}{s-2}}\beta_s^{\frac{j}{s-2}}(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{j-(r-p)+2(l+1)}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant (s!)^j s^{r-p}2^{j(s+4)}\beta_s^{\frac{j}{s-2}}(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{j-(r-p)}{2}}e^{\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{8}}. \qquad (5.21)$$

По (5.19–5.21) заключаем

$$|Y_3| \leqslant \sum_{p=0}^{r}\sum_{j=s-2}^{\infty}\frac{r!\,2^{4p}k^p(p-1)!}{p!\,(r-p)!\,n^{\frac{j-2}{2}}}(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2-p}{2}}e^{-\frac{3}{8}\mathbf{t}V\mathbf{t}'}(s!)^j s^{r-p}2^{j(s+4)}\times$$

$$\times\beta_s^{\frac{j}{s-2}}(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{j-(r-p)}{2}}e^{\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{8}} \leqslant \frac{(r-1)!\,(2^4ks)^r(2^{s+4}s!)^{s-2}\beta_s(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-r}{2}}e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{4}}}{n^{\frac{s-2}{2}}}\times$$

$$\times\sum_{j=s-2}^{\infty}\left(\frac{2^{s+4}s!\,(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{1}{2}}\beta_s^{\frac{1}{s-2}}}{\sqrt{n}}\right)^{j-(s-2)} \leqslant$$

$$\leqslant\frac{(r-1)!\,(2^5ks)^r(2^{s+4}s!)^{s-2}\beta_s(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-r}{2}}}{n^{\frac{s-2}{2}}}e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{4}}$$

для всех $\mathbf{t}\in N_3$.

Оценка Y_4:

$$V_4 = e^{-\psi(\mathbf{t})}[v(\mathbf{t}) - e^{\psi(\mathbf{t})}]\frac{\partial^r e^{\psi(\mathbf{t})}}{\partial t_m^r}, \quad m = 1, 2, \ldots, k. \qquad (5.22)$$

По формуле (6) из работы [32]

$$|v(\mathbf{t}) - e^{\psi(\mathbf{t})}| \leqslant \frac{2^{s-1}\beta_s}{n^{\frac{s-2}{2}}}e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{4}} \leqslant \frac{2^{s-1}\beta_s(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s}{2}}}{n^{\frac{s-2}{4}}}e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{4}}$$

при $\mathbf{t}V\mathbf{t}' \leqslant \frac{n}{16}\beta_s^{-\frac{2}{s-2}}$.

Из (5.18) и (5.22–5.23) следует

$$|Y_4| \leqslant \frac{2^{5r+s}k^{r-1}(s-1)^r(r-1)!\,2^s(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{s-r}{2}}\beta_s}{n^{\frac{s-2}{2}}} e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{8}}$$

для всех $\mathbf{t}\in N_8$.

Оценки Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 подставляем в (5.13) и получаем утверждение леммы 16.

Лемма 17. *Пусть независимые случайные векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют конечные моменты s-го порядка ($s\geqslant 3$) и корреляционная матрица V положительно определенная, тогда для $m=1, 2, \ldots, k$ и $r=0, 1, \ldots, s$ имеет место неравенство*

$$\left|\frac{\partial^r f^{(n)}(\mathbf{t})}{\partial t_m^r}\right| \leqslant \prod_{j=3}^{r}\left(k\left(\sqrt{\mathbf{t}V\mathbf{t}'+1}\right)+\frac{\beta_j}{n^{\frac{j-2}{2}}}\right)^r \exp\left\{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{3}+\left(\frac{r}{16}\right)^{\frac{1}{3}}(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{2}{3}}\right\}$$

при $\mathbf{t}V\mathbf{t}'\leqslant\frac{n}{16}\beta_3^{-2}$.

Доказательство леммы 17. При $r=0, 1, \ldots, s$ имеем

$$\frac{\partial^r f^{(n)}(\mathbf{t})}{\partial t_m^r}=\frac{\partial^r\prod\limits_{j=1}^{n} f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)}{\partial t_m^r}=\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_n=r\\ m_1,\ldots,m_r=0,1,\ldots,r}}\frac{r!}{m_1!\ldots m_n!}\times$$

$$\times\frac{\partial^{m_1} f_1\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)}{\partial t_m^{m_1}}\cdots\frac{\partial^{m_n} f_n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)}{\partial t_m^{m_n}}. \tag{5.24}$$

Заметим, что в сумме среди $m_1, m_2, \ldots, m_n$ чисел не равных нулю не больше r.

Оценим произведение

$$Y_N=\prod_{j\in N} f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right),$$

где N — подмножество множества $L=\{1, 2, \ldots, n\}$, состоящее из $n-\nu$, $\nu\leqslant r$, различных элементов.

Поскольку

$$\left|f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right|^2=\int\limits_{R^k}\int\limits_{R^k}\cos\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\ \mathbf{x}-\mathbf{y}\right)dF_j(\mathbf{x})\,dF_j(\mathbf{y})$$

и

$$\cos\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\ \mathbf{x}-\mathbf{y}\right)\leqslant 1-\frac{1}{2}\left(\frac{(\mathbf{t},\ \mathbf{x}-\mathbf{y})}{\sqrt{n}}\right)^2+\frac{1}{6}\left|\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\ \mathbf{x}-\mathbf{y}\right)\right|^3,$$

то

$$|Y_N|^2\leqslant\prod_{j\in N}\left(1-M\left[\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\ \gamma_j\right)^2\right]+\frac{4}{3}M\left[\left|\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\ \gamma_j\right)\right|^3\right]\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{-\sum_{j\in N}M\left[\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\ \gamma_j\right)^2\right]+\frac{4}{3}\sum_{j\in N}M\left[\left|\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\ \gamma_j\right)\right|^3\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{-\mathbf{t}V\mathbf{t}'+\frac{4}{3}\frac{(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}\beta_3+\sum_{j\in L-N}M\left[\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\ \gamma_j\right)^2\right]\right\}. \tag{5.25}$$

Очевидно

$$\sum_{j\in L-N} M\left[\left(\frac{t}{\sqrt{n}},\ \gamma_j\right)^2\right] \leqslant \frac{tVt'}{n} \sum_{j\in L-N} \beta_{2j} \leqslant \frac{tVt'}{n} \sum_{j\in L-N} \beta_{3j}^{\frac{2}{3}}. \tag{5.26}$$

Поскольку в множестве $L-N$, всего ν элементов и $\nu \leqslant r$, то

$$\sum_{j\in L-N} \beta_{3j}^{\frac{2}{3}} \leqslant r^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{n} \sum_{j\in L-N} \beta_{3j}\right)^{\frac{2}{3}} \leqslant n^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \beta_3^{\frac{2}{3}}. \tag{5.27}$$

Из (5.25), (5.26) и (5.27) следует, что для всех подмножеств N из $n-\nu$ ($\nu\leqslant r$) различных элементов и при $tVt' \leqslant \frac{n}{16}\beta_3^{-2}$ имеет место неравенство

$$|Y_N| \leqslant \exp\left\{-\frac{tVt'}{3} + \left(\frac{r}{16}\right)^{\frac{1}{3}} (tVt')^{\frac{2}{3}}\right\}.$$

Имеем

$$\left|\frac{\partial f_j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{\partial t_m}\right| \leqslant \frac{\beta_{2j}\sqrt{tVt'}}{n}$$

и

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial t_m^\nu} f_j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \leqslant \frac{\beta_{\nu j}}{n^{\frac{\nu}{2}}}, \quad \nu = 2,\ 3,\ \ldots,\ r.$$

Из двух последних неравенств и соотношения (5.24) заключаем, что при $tVt' \leqslant \frac{n\beta_3^{-2}}{16}$

$$\left|\frac{\partial^r f^{(n)}(t)}{\partial t_m^r}\right| \leqslant \sum{}' \frac{r!}{m_{j_1}!\ldots m_{j_r}!} \frac{\beta_{m_{j_1} j_1}}{n^{\frac{m_{j_1}}{2}}} \cdots \frac{\beta_{m_{j_r} j_r}}{n^{\frac{m_{j_r}}{2}}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{tVt'}{3} + \left(\frac{r}{16}\right)^{\frac{1}{3}} (tVt')^{\frac{2}{3}}\right\}, \qquad \beta_{1j} \leqslant \frac{\beta_{2j}\sqrt{tVt'}}{n},$$

где сумму Σ' берем по всем $m_{j_1}, \ldots, m_{j_r} = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$; $m_{j_1} + \ldots + m_{j_r} = r$ и $(j_1, \ldots, j_r) \in K$. Здесь K — класс всевозможных подмножеств, состоящих из r различных элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Следовательно,

$$\left|\frac{\partial^r f^{(n)}(t)}{\partial t_m^r}\right| \leqslant \exp\left\{-\frac{tVt'}{3} + \left(\frac{r}{16}\right)^{\frac{1}{3}} (tVt')^{\frac{2}{3}}\right\} \prod_{j=3}^{r} \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_{ji}}{n^{\frac{j}{2}}} + \frac{(1+\sqrt{tVt'})\beta_{2i}}{n}\right)^r\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{tVt'}{3} + \left(\frac{r}{16}\right)^{\frac{1}{3}} (tVt')^{\frac{2}{3}}\right\} \prod_{j=3}^{r} \left(\frac{\beta_j}{n^{\frac{j-2}{2}}} + k(\sqrt{tVt'}+1)\right)^r.$$

Лемма 17 доказана.

Лемма 18. *При выполнении условий леммы* 16 *существует постоянная* $C_2(s)$ *такая, что*

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial t_m^r} [f^{(n)}(\mathbf{t}) - e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}] \right| \leqslant C_2(s) k^s e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{16}} \sum_{j=3}^{s} \frac{\beta_j (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{u_j}{2}}}{\delta^j n^{\frac{j-2}{3}}}$$

при $m=1, 2, \ldots, k$; $r=0, 1, \ldots, s$ и $\mathbf{t} \in N_8$. *Здесь* $u_j = j-r$, *при* $j \geqslant r$ *и* $u_j = 0$, *при* $j < r$.

Следствие 5. *Если случайные векторы* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *имеют конечные моменты* s*-го порядка* $(s \geqslant 3)$ *и корреляционная матрица* V *положительно определенная, то существует постоянная* $C_3(s)$ *такая, что*

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial t_m^r} [f^{(n)}(\mathbf{t}) - e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}] \right| \leqslant C_3(s) k^s e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{16}} \sum_{j=3}^{s} \frac{\beta_j (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{u_j}{2}}}{n^{\frac{j-2}{2}}}$$

при

$$\mathbf{t}V\mathbf{t}' \leqslant C_4 n^{\frac{1}{3}} \beta_s^{-\frac{2}{3(s-2)}}, \quad m=1, 2, \ldots, k \text{ и } r=0, 1, \ldots, s.$$

Доказательство леммы 18. Оценим производную

$$Y = \frac{\partial^r}{\partial t_m^r} \left[e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}} \sum_{j=1}^{s-3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^j P_j(i\mathbf{t}) \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{s-3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^j \sum_{p=0}^{r} \frac{r!}{p!(r-p)!} \frac{\partial^p e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}}{\partial t_m^p} \frac{\partial^{r-p} P_j(i\mathbf{t})}{\partial t_m^{r-p}}.$$

Для оценки производных от многочленов $P_j(i\mathbf{t})$, $j=1, 2, \ldots, s-3$, можем использовать неравенство (5.21), только $\beta_s^{\frac{j}{s-2}}$ надо заменить на β_{j+2}:

$$\left| \frac{\partial^{r-p}}{\partial t_m^{r-p}} P_j(i\mathbf{t}) \right| \leqslant (s!)^j s^{r-p} 2^{j(s+4)} \beta_{j+2} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{j-(r-p)}{2}} e^{\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{8}} \tag{5.28}$$

при $r-p=0, 1, \ldots, j$. В случае $r-p=j+1, j+2, \ldots$ имеем

$$\frac{\partial^{r-p}}{\partial t_m^{r-p}} P_j(i\mathbf{t}) \equiv 0. \tag{5.29}$$

Из (5.20), (5.28) и (5.29) следует, что

$$|Y| \leqslant \sum_{j=1}^{s-3} (s!)^j s^r 2^{j(s+4)} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^j \beta_{j+2} (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{u_j+2}{2}} e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{4}} \sum_{p=0}^{r} \frac{r! \, 2^{4p} k^p (p-1)!}{p!(r-p)! \, s^p} \leqslant$$

$$\leqslant (s!)^{s-2} s^r 2^{(s-3)(s+4)+3r} k^r \sum_{j=3}^{s-1} \frac{\beta_j (\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{u_j}{2}}}{n^{\frac{j-2}{2}}} e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{4}}$$

при $\mathbf{t} \in N_8$.

Отсюда и из леммы 16 немедленно вытекает утверждение леммы 18.

§ 6. Доказательство теоремы 1

С начала докажем утверждение теоремы 1 для всех n, удовлетворяющих неравенству

$$g(\sqrt{n}) \geqslant C_4(k)\varkappa_n,$$

где

$$C_4(k) = 27(k+3)(k+3)!\,k^{k+1}\,2^{k+4}, \quad \varkappa_n = M[(\Theta V^{-1}\Theta')\,g(\sqrt{\Theta V^{-1}\Theta'})].$$

В § 4 показано, что для выбранных n ковариационная матрица Λ случайного вектора $\mathbf{Z}_n$ положительно определенная, причем, дисперсии всех координат вектора $\mathbf{Z}_n$ больше $\frac{1}{4}$. Существует матрица B такая, что $\Lambda = B'B$. Нетрудно заметить, что случайный вектор $\mathbf{Y}_n = (\mathbf{Z}_n - M\mathbf{Z}_n)B^{-1}$ имеет равные нулю математические ожидания и единичную корреляционную матрицу.

Далее нам понадобится случайный вектор ζ с функцией распределения $F_\zeta(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{F}_j(\mathbf{x})$. Здесь $\bar{F}_j(\mathbf{x})$ – функция распределения случайного вектора $(\eta_j - M\eta_j)B^{-1}$.

Заметим, что ζ имеет равные нулю математические ожидания и единичную корреляционную матрицу I.

Поскольку класс $\mathfrak{A}$ выпуклых борелевских множеств инвариантен относительно невырожденных линейных преобразований, то

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}} |P\{\mathbf{S}_n\in A\} - \Phi_{0,V}(A)| \leqslant \sup_{A\in\mathfrak{A}} |P\{\mathbf{S}_n\in A\} - P\{\mathbf{Z}_n\in A\}| +$$
$$+\sup_{A\in\mathfrak{A}} |\Phi_{M\mathbf{Z}_n,\Lambda}(A) - \Phi_{0,V}(A)| + \sup_{A\in\mathfrak{A}} |P\{\mathbf{Y}_n\in A\} - \Phi_{0,I}(A)| = J_1 + J_2 + J_3.$$

Оценка J_1. По лемме 8

$$J_1 \leqslant nP\{\Theta V^{-1}\Theta' \geqslant n\}.$$

Поскольку

$$P\{\Theta V^{-1}\Theta' \geqslant n\} = \int\limits_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'\geqslant n} dF(\mathbf{x}) \leqslant \frac{1}{ng(\sqrt{n})}\int\limits_{R^k} (\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}')\,g(\sqrt{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'})\,dF(\mathbf{x}),$$

то

$$J_1 \leqslant \frac{\varkappa_n}{g(\sqrt{n})}.$$

Оценка J_2. Из лемм 7 и 10 вытекает

$$J_2 \leqslant 2\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\sqrt{(M\mathbf{Z}_n)V^{-1}(M\mathbf{Z}_n)'} + \frac{\varepsilon k + (1+\varepsilon)^k - (1-\varepsilon)^k}{(1-\varepsilon)^{\frac{k}{2}}},$$

где $\varepsilon = \frac{2\varkappa_n}{g(\sqrt{n})}$. Заметим, что $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$.

Нетрудно проверить, что

$$\sqrt{(M\mathbf{Z}_n)V^{-1}(M\mathbf{Z}_n)'} \leqslant \frac{\sqrt{k}\,\varkappa_n}{g(\sqrt{n})}.$$

Следовательно, существует постоянная $C_5(k)$, такая что

$$J_2 \leqslant \frac{C_5(k)\,\varkappa_n}{g(\sqrt{n})}\,.$$

Оценка J_3. Как мы заметили в § 1 $\Big($см. (1.1)$\Big)$ для оценки разности J_3 достаточно оценить свертку

$$\bar{\Delta}_n(A) = [P\{\mathbf{Y}_n \in A\} - \Phi_{0,\,I}(A)] * H\Big(\frac{A}{\varepsilon}\Big)$$

при $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{n}}{4}\,(M|\zeta|^3)^{-1}$. Оценим $\bar{\Delta}_n(A)$ для всех борелевских множеств A пространства R^k. По выбору распределение $H(A)$ абсолютно непрерывное с плотностью $p_n(\mathbf{x})$. Плотность распределения $\Phi_{0_k,I}(A) * H\Big(\frac{A}{\varepsilon}\Big)$ обозначим через $q(\mathbf{x})$.

С помощью хорошо известного равенства

$$2\sup_{A\in\mathfrak{R}}|\bar{\Delta}_n(A)| = \int\limits_{R^k} |p_n(\mathbf{x}) - q(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}$$

переходим к оценке интеграла

$$U = \int\limits_{R^k} |p_n(\mathbf{x}) - q(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x},$$

который по неравенству Гельдера не больше произведения

$$\left(\int\limits_{R^k}\Big(1+\sum_{m=1}^{k}|x_m|^{2(k+3)}\Big)|p_n(\mathbf{x})-q(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{R^k}\frac{d\mathbf{x}}{1+\sum\limits_{m=1}^{k}|x_m|^{2(k+3)}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

По многомерному равенству Парсваля получаем

$$U_0 = \int\limits_{R^k}|p_n(\mathbf{x})-q(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{|\mathbf{t}|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}}\left|\Big[\Big(f^{(n)}(\mathbf{t}) - e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}}\Big)h(\mathbf{t}\varepsilon)\Big]\right|^2 d\mathbf{t}$$

и

$$U_m = \int\limits_{R^k}|x_m|^{2(k+3)}|p_n(\mathbf{x})-q(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R^k}\left|\frac{\partial^{k+3}}{\partial t_m^{k+3}}\Big[\Big(f^{(n)}(\mathbf{t}) - e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}}\Big)h(\mathbf{t}\varepsilon)\Big]\right|^2 d\mathbf{t}.$$

Здесь $f^{(n)}(\mathbf{t})$ – характеристическая функция случайного вектора $\mathbf{Y}_n$.

Переходим к оценкам интегралов U_0 и U_m. Далее предположим, что

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{n}}{4}\,(M|\zeta|^3)^{-1} > 1,$$

поскольку в противоположном случае результат (6.7) тривиальный. Обозначим

$$\alpha = C_6(k)\,n^{\frac{1}{6}}\,(M|\zeta|^{k+3})^{-\frac{1}{3(k+1)}},$$

где

$$C_6(k)=\left((k+3)!\ 2^{k+5}\,k^{k+1}\right)^{-1}.$$

Очевидно,

$$\alpha<\frac{1}{\varepsilon}.$$

Оценим только интеграл U_m. Интеграл U_0 оценивается значительно проще с использованием аналогичных идей.

В § 1 заметили, что распределение $H(A)$ имеет конечные моменты достаточно высокого порядка, например, порядка $k+3$. Следовательно,

$$\left|\frac{\partial^v h(\mathbf{t})}{\partial t_m^v}\right|\leqslant C_7(k)<\infty,\quad v=0,\ 1,\ \ldots,\ k+3.$$

Очевидно

$$U_m=L_1+L_2, \tag{6.1}$$

где

$$L_1=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{|\mathbf{t}|\leqslant\alpha}\left|\frac{\partial^{k+3}}{\partial t_m^{k+3}}\left[\left(\tilde f^{(n)}(\mathbf{t})-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}}\right)h(\mathbf{t}\varepsilon)\right]\right|^2 d\mathbf{t} \tag{6.2}$$

и

$$L_2=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{\alpha<|\mathbf{t}|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}}\left|\frac{\partial^{k+3}}{\partial t_m^{k+3}}\left[\left(\tilde f^{(n)}(\mathbf{t})-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}}\right)h(\mathbf{t}\varepsilon)\right]\right|^2 d\mathbf{t}. \tag{6.3}$$

В силу следствия 7 при $|\mathbf{t}|\leqslant\alpha$

$$\left|\frac{\partial^{k+3}}{\partial t_m^{k+3}}\left[\left(\tilde f^{(n)}(\mathbf{t})-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}}\right)h(\mathbf{t}\varepsilon)\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{r=0}^{k+3}\frac{(k+3)!}{r!\,(k+3-r)!}\,\frac{\partial^{k+3-r}h(\mathbf{t}\varepsilon)}{\partial t_m^{k+3-r}}\,\frac{\partial^r}{\partial t_m^r}\left[\tilde f^{(n)}(\mathbf{t})-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}}\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_8(k)\sum_{r=0}^{k+3}\sum_{j=3}^{k+3}\frac{|\mathbf{t}|^{u_j(r)}M|\xi|^j}{n^{\frac{j-2}{2}}}\,e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{16}},$$

где $u_j(r)=j-r$ при $j>r$ и $u_j(r)=0$ при $r\leqslant j$. Следовательно, существует постоянная $C_9(k)$ такая, что

$$L_1\leqslant C_9(k)\sum_{j=3}^{k+3}\left(\frac{M|\xi|^j}{n^{\frac{j-2}{2}}}\right)^2. \tag{6.4}$$

После несложных вычислений получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{\alpha<|\mathbf{t}|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}}\left|\frac{\partial^{k+3}}{\partial t_m^{k+3}}\left[e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}}h(\mathbf{t}\varepsilon)\right]\right|^2 d\mathbf{t}\leqslant C_{10}(k)\left(\frac{M|\xi|^{k+3}}{n^{\frac{k+1}{2}}}\right)^2. \tag{6.5}$$

Предположим далее, что

$$\alpha > \frac{27(k+3)}{2}.$$

В случае

$$\alpha \leqslant \frac{27(k+3)}{2}$$

неравенство (6.7) тривиальное.

По лемме 17

$$\left| \frac{\partial^{k+3}}{\partial t_m^{k+3}} [f^{(n)}(\mathbf{t})\, h(\mathbf{t}\varepsilon)] \right| \leqslant C_{11}(k) \sum_{r=1}^{k+3} \left(1+\prod_{j=3}^{k} \left(k|\mathbf{t}| + \frac{M|\zeta|^j}{n^{\frac{j-2}{2}}}\right)^r\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{3} + \left(\frac{k+3}{16}\right)^{\frac{1}{3}} |\mathbf{t}|^{\frac{4}{3}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{12}(k) \sum_{r=1}^{k+3} \left(1+\prod_{j=3}^{r} \left(k|\mathbf{t}| + \frac{M|\zeta|^j}{n^{\frac{j-2}{2}}}\right)^r\right) \exp\left\{-\left(\frac{k+3}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{|\mathbf{t}|^{\frac{4}{3}}}{6}\right\}$$

при

$$\frac{27(k+3)}{2} < \alpha \leqslant |\mathbf{t}| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$L_2 \leqslant C_{13}(k) \sum_{r=1}^{k+3} \left(1+\prod_{j=3}^{r} \left(\frac{M|\zeta|^j}{n^{\frac{j-2}{2}}}\right)^r\right)^2 \left(\frac{M|\zeta|^{k+3}}{n^{\frac{k+1}{2}}}\right)^2. \tag{6.6}$$

Теперь из (6.1 –6.6) вытекает

$$U_m \leqslant C_{14}(k) \left\{ \sum_{j=3}^{k+3} \left(\frac{M|\zeta|^j}{n^{\frac{j-2}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{M|\zeta|^{k+3}}{n^{\frac{k+1}{2}}}\right) \left(\sum_{r=1}^{k+3} 1+\prod_{j=3}^{r} \left(\frac{M|\zeta|^j}{n^{\frac{j-2}{2}}}\right)^r\right)^2 \right\}.$$

Аналогичному неравенству удовлетворяет интеграл U_0. Таким образом, мы показали, что существует постоянная $C_{15}(k)$ такая, что

$$J_3 \leqslant C_{15}(k) \left\{ \sum_{j=3}^{k+3} \frac{M|\zeta|^j}{n^{\frac{j-2}{2}}} + \sum_{r=3}^{k+3} \prod_{j=3}^{r} \left(\frac{M|\zeta|^j}{n^{\frac{j-2}{2}}}\right)^r \frac{M|\zeta|^{k+3}}{n^{\frac{k+1}{2}}} \right\}. \tag{6.7}$$

По определению вектора ζ имеем

$$M|\zeta|^{\nu} = M[(\zeta I \zeta')^{\frac{\nu}{2}}] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} M\left[\left((\eta_j - M\eta_j) B^{-1} (B^{-1})' (\eta_j - M\eta_j)'\right)^{\frac{\nu}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} M\left[\left((\eta_j - M\eta_j) \Lambda^{-1} (\eta_j - M\eta_j)'\right)^{\frac{\nu}{2}}\right]. \tag{6.8}$$

Здесь

$$M\left[\left(\eta_j - M\eta_j) \Lambda^{-1} (\eta_j - M\eta_j)'\right)^{\frac{\nu}{2}}\right] = \int\limits_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}' \leqslant n} \left((\mathbf{x} - M\eta_j) \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - M\eta_j)'\right)^{\frac{\nu}{2}} dF_j(x) +$$

$$+ \left((M\eta_j) \Lambda^{-1} (M\eta_j)'\right)^{\frac{\nu}{2}} \int\limits_{\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}' > n} dF_j(\mathbf{x}). \tag{6.9}$$

Из лемм 6 и 10 следует, что

$$|\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'-\mathbf{x}\Lambda^{-1}\mathbf{x}'|\leqslant\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,(\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}')$$

для всех $\mathbf{x}\in R_k$. Здесь

$$\varepsilon=\frac{2\varkappa_n}{g(\sqrt{n})}$$

и

$$0<\varepsilon<\frac{1}{2}\,.$$

Поэтому

$$0<\mathbf{x}\,\Lambda^{-1}\mathbf{x}'\leqslant\frac{3}{2}\,(\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'),\tag{6.10}$$

$$0\leqslant(\mathbf{x}-M\eta_j)\,\Lambda^{-1}(\mathbf{x}-M\eta_j)'\leqslant\frac{3}{2}\,(\mathbf{x}-M\eta_j)\,V^{-1}(\mathbf{x}-M\eta_j)'\tag{6.11}$$

и

$$0\leqslant(M\eta_j)\,\Lambda^{-1}(M\eta_j)'\leqslant\frac{3}{2}\,(M\eta_j)\,V^{-1}(M\eta_j)'\tag{6.12}$$

для всех $\mathbf{x}\in R^k$.

Поскольку

$$\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'=\sup_{\mathbf{t}\in R^k}\frac{(\mathbf{x},\,\mathbf{t})^2}{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}\,,$$

тогда

$$(\mathbf{x}-M\eta_j)\,V^{-1}(\mathbf{x}-M\eta_j)'=\sup_{\mathbf{t}\in R^k}\frac{(\mathbf{x}-M\eta_j,\,\mathbf{t})^2}{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}\leqslant$$

$$\leqslant 2\,(\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}')+2\left(\frac{M\,[(\gamma_j\,V^{-1}\,\gamma_j')\,g\,(\sqrt{\gamma_j\,V^{-1}\,\gamma_j'})]}{\sqrt{n}\;g\,(\sqrt{n})}\right)^2$$

и

$$(M\eta_j)\,V^{-1}(M\eta_j)'=\sup_{\mathbf{t}\in R^k}\frac{(M\eta_j,\,\mathbf{t})^2}{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}\leqslant\left(\frac{M\,[(\gamma_j\,V^{-1}\,\gamma_j')\,g\,(\sqrt{\gamma_j\,V^{-1}\,\gamma_j'})]}{\sqrt{n}\;g\,(\sqrt{n})}\right)^2.$$

Из (6.8—6.12) вытекает

$$M\,|\zeta|^\nu\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{3^\nu}{g\,(\sqrt{n})}\,M\,[(\gamma_j\,V^{-1}\,\gamma_j')\,g\,(\sqrt{\gamma_j\,V^{-1}\,\gamma_j'})]\leqslant\frac{3^\nu\,n^{\frac{\nu-2}{2}}\,\varkappa_n}{g\,(\sqrt{n})}$$

при $\nu=3,\,4,\,\ldots,\,k+3$ и для всех n удовлетворяющих неравенство

$$g\,(\sqrt{n})\geqslant C_4\,(k)\,\varkappa_n.$$

Следовательно, существует постоянная $C_{16}\,(k)$ такая, что

$$J_3\leqslant\frac{C_{16}\,(k)\,\varepsilon_n}{g\,(\sqrt{n})}\,.$$

Теперь из оценок J_1, J_2 и J_3 вытекает

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}|P\{\,\mathbf{S}_n\in A\}-\Phi_{0,\,V}(A)\,|\leqslant\frac{C_{17}\,(k)}{g\,(\sqrt{n})}\,\varkappa_n$$

при $g\,(\sqrt{n})\geqslant C_4\,(k)\,\varkappa_n$.

В случае $g\,(\sqrt{n})\leqslant C_{14}(k)\,\varkappa_n$ утверждение теоремы 1 тривиальное. Теорема 1 доказана.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
16.II.1970

Литература

1. А. Журавский, О предельной теореме исчисления вероятностей, Труды физ.-мат. и-та им. В. А. Стеклова, отд. матем., **IV** (1933), 9–36.
2. C.-G. Esseen, Fourier analysis of distributions functions. A mathematical study of the Lap lace-Gaussian law, Acta Math., 77 (1945), 1–125.
3. М. К. Халиков, Локальная теорема для сумм независимых случайных векторов Изв. АН УзССР. сер. физ.-мат., 2 (1958), 95–105.
4. R. Ranga Rao, On the central limit theorem in R_k, Bull. Amer. Math. Soc., **67**, N 4 (1961), 359–361.
5. G. de Barra, The convergence of a sum of independent random variables, Proc. Cambr. Philos. Society, **59**, part 2 (1963), 411–416.
6. А. Бикялис, Об уточнении остаточного члена в многомерной центральной предельной теореме, Лит. матем. сб., **IV**, 2 (1964), 153–158.
7. М. Маматов и М. К. Халиков, О глобальных предельных теорем для плотностей, Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат., 1 (1964), 13–21.
8. А. Бикялис, Об остаточных членах в многомерных предельных теоремах, ДАН СССР, 168, 4 (1966), 634–635.
9. С. М. Садикова, Двумерные аналоги неравенства Эссеена с применением к центральной предельной теореме, Теор. вер. и ее прим., **XI**, вып. 3 (1966), 369–379.
10. B. von Bahr, On the central limit theorem in R^k, Arkiv för Math., **7**, N 5 (1967), 61–69.
11. B. von Bahr, Multi-dimensional integral limit theorems, Arkiv för Math., **7**, N 6 (1967), 71–88.
12. С. М. Садикова, Расстояние между распределениями, связанными с их значениями на выпуклых множествах, ДАН СССР, **176**, 4 (1967), 787–789.
13. С. М. Садикова, О многомерной центральной предельной теореме, Теор. вер. и ее прим., **XIII**, вып. 1 (1968), 164–170.
14. А. Бикялис, Асимптотические разложения для плотностей и распределений сумм независимых одинакового распределённых случайных векторов, Лит. матем. сб., **VIII**, 3 (1968), 405–422.
15. R. N. Bhattacharya, The central limit theorem in R^k, $k>1$, and normal approximation to the probabilities of Borel sets, Ann. Math. Stat., **39**, N 4 (1968), 1360–1361.
16. R. N. Bhattacharya, Berry-Esseen bounds for the multi-dimensional central limit theorem Bull. Amer. Math. Soc., **74**, N 2 (1968), 285–287.
17. В. Паулаускас, А. Слушнис, Оценка скорости сходимости в двумерной центральной предельной теореме, Лит. матем. сб., **VIII**, 3 (1968), 591–595.
18. А. Бикялис, Асимптотические разложения для распределений сумм независимых одинаково распределенных решетчатых случайных векторов, Теор. вер. и ее прим., **XIV**, вып. 3 (1968), 499–507.
19. H. Bergström, On the central limit theorem in R^k $k\geqslant 1$, Skand. Aktuartiedskr., 28 (1945), 106–127.
20. H. Bergström, On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables, Skand. Aktuartiedskr., 33 (1949), 37–62.
21. H. Bergström, On asymptotic expansions of probability functions, Skand. Aktuartiedskr., H. 1–2 (1951), 1–34.
22. В. В. Сазонов, К оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, Теор. вер. и ее прим., **XII**, вып. 1 (1967), 82–95.
23. В. В. Сазонов, О скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, Теор. вер. и ее прим., **XIII**, вып. 1 (1968), 191–194.
24. V. V. Sazonov, On the multi-dimensional central limit theorem, Sankhya, ser. A, **30**, part 2 (1968), 181–204.
25. В. Паулаускас, Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. I, Лит. матем. сб., **IX**, 2 (1969), 329–343.

6\. А. Бикялис, Асимптотические разложения для разложения сумм независимых нерешетчатых случайных векторов, Лит. матем. сб., **X**, 4 (1970), 673–679.

27. Н. Шахайдарова, О многомерной предельной теореме, Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат., 4 (1965), 11–16.
28. Н. Шахайдарова, Замечание к многомерной предельной теореме, Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат., 1 (1966), 89–90.
29. В. М. Золоторев, Многомерный аналог неравенства Берри-Эссеена для множеств ограниченного диаметра, Теор. вер. и ее прим., **XI**, вып. 3 (1966), 507–513, **XIII**, вып. 1 (1968), 195.
30. Н. Н. Вахания, Н. П. Канделаки, Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, Сообщ. АН ГрССР, сер. матем., **50**, 2 (1968), 273–276.
31. W. Worobey, Generalized limit theorems for multi-dimensional random vectors, Dissertation Abstracts, **28**, N 4 (1967), 1623–1624.
32. А. Бикялис, Об асимптотическом разложении для многомерных характеристических функций, Теор. вер. и ее прим., **XIV**, вып. 3 (1969), 508–511.
33. С. М. Садикова, Некоторые неравенства для характеристических функций, Теор. вер. и ее прим., **XI**, вып. 3 (1966), 500–506.
34. А. Бикялис, О многомерных характеристических функциях, Лит. матем. сб., **VIII**, 1 (1968), 21–39.
35. А. Бикялис, Об остаточных членах в асимптотических разложениях для характеристических функций и их производных, Лит. матем. сб., **VII**, 4 (1967), 571–582.
36. Э. Беккенбах, Р. Бельман, Неравенства, М., „Мир", 1965.
37. С. Р. Рао, Линейные статистические методы и их применения, М., „Наука", 1968.
38. A. Wintner, On a classe of Fourier transforms, Amer. J. Math., 58 (1936).
39. Е. Л. Рвачева, Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений, Уч. зап. Львовского ун-та, сер. мех.-мат., **29**, 6 (1954), 5–44.
40. W. Richter, Mehrdimensionale Grenzwertsätze für grosse Abweichungen und ihre Anwendung auf die Verteilung von χ^2, Теор. вер. и ее прим., **IX**, вып. 1 (1964), 31–42.
41. Е. Л. Рвачева, Многомерная локальная теорема для предельных устойчивых распределений, Труды ин-та мат. и мех. АН УССР, **10**, 1(1953), 106–121.

APIE CENTRINĘ RIBINĘ TEOREMĄ ERDVĖJE R^k. I

A. Bikelis

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama nepriklausomų k-mačių atsitiktinių vektorių $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ normuotos ir centruotos sumos

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - M\xi_j)$$

pasiskirstymo konvergavimo greitis į k-matį normalinį pasiskirstymą tolygiai visoms iškilioms Borelio aibėms. Reikalaujama, kad atsitiktinių vektorių koordinatės ξ_{ij}, $i=1, 2, \ldots, k$, $j=1, 2, \ldots, n$, tenkintų sąlygą: $M\,[\xi_{ij}^2 g(\xi_{ij})] < \infty$. Čia $g(x)$ – Kaco funkcija.

ON THE CENTRAL LIMIT THEOREM IN R^k. I

A. Bikelis

(*Summary*)

Let G be the class of all functions $g(x)$ defined on the real line and satisfying the following conditions:

1) $g(x)$ is non-negative, even, non-decreasing on $[0, \infty)$ and

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty;$$

2) $\frac{x}{g(x)}$ is defined for all x and is non-decreasing on $[0, \infty)$.

Let $\xi_j = (\xi_{1j}, \xi_{2j}, \ldots, \xi_{kj})$, $j = 1, \ldots, n$, be a sequence of independent random vectors in R^k, with the distributions $F_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Thus in this paper it is proved the following

Theorem. *Let ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, possess finite moments $M[\xi_{ij}^2 g(\xi_{ij})]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$, and let be the covariance matrix W ot the distribution function*

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F_j(\mathbf{x} + M\xi_j)$$

of the random vector Θ non-singular. Then uniformly for all convex Borel sets A

$$\left| P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - M\xi_j) \in A \right\} - \Phi_{0, W}(A) \right| \leq \frac{C(k)}{g(\sqrt{n})} M[(\Theta W^{-1} \Theta') \, g(\sqrt{\Theta W^{-1} \Theta'})].$$

Where $\Theta W^{-1} \Theta'$ is the quadratic form.